

УДК 533.6.011

О НЕОДНОМЕРНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ С ПЛОСКИМИ ВОЛНАМИ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Пославский С. А., Шикин И. С.

Получен набор новых точных автомодельных решений, описывающих неоднородные адиабатические движения идеального совершенного газа с плоскими волнами. В рассматриваемых решениях присутствует однородное расширение газа в плоскостях, перпендикулярных направлению основного движения. Система уравнений газовой динамики сводится для этих решений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Задачи о коротком ударе и о распространении сильной взрывной волны в однородно расширяющемся газе решались численно в [2], где найдено также точное решение задачи о коротком ударе при специальном значении показателя адиабаты.

1. Рассмотрим адиабатические движения идеального совершенного газа, параметры которого определяются формулами

$$(1.1) \quad \rho = \frac{a}{x^{k+3}t^s} R(\lambda), \quad p = \frac{a}{x^{k+1}t^{s+2}} P(\lambda)$$

$$v = \frac{x}{t} V(\lambda), \quad v_i = \varepsilon_i^{(\beta)} \frac{x_i}{t}, \quad \lambda = \frac{x}{bt^\delta}$$

Здесь x_i — прямоугольные декартовы координаты ($x_1 = x$). Компоненты скорости вдоль осей x , x_i обозначены v , v_i ; индекс i принимает значения 2, 3 (суммирование по i отсутствует). Движение (1.1) предполагается либо двумерным ($\beta = 1$, $\varepsilon_2^{(1)} = 1$, $\varepsilon_3^{(1)} = 0$, $v_2 = x_2/t$, $v_3 = 0$), либо трехмерным ($\beta = 2$, $\varepsilon_2^{(2)} = 1$, $\varepsilon_3^{(2)} = 1$, $v_2 = x_2/t$, $v_3 = x_3/t$). Постоянные a и b имеют размерности $[a] = ML^kT^s$, $[b] = LT^{-\delta}$.

Система уравнений газовой динамики сводится для таких движений к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений в переменных $z(\tau) = \gamma P/R$, $V(\tau)$, $R(\tau)$, $\tau = \ln |\lambda|$ [1]:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} dz/dV &= z \{ z [2 - \kappa(\gamma - 1) - 2V] + [(\gamma + 1)V - 2 + \beta(\gamma - 1)] (V - \delta)^2 - (\gamma - 1)V(V - 1)(V - \delta) \} (V - \delta)^{-1} \times \\ &\times [z(\kappa - \beta - V) + V(V - 1)(V - \delta)]^{-1} \\ V' &= [z(\kappa - \beta - V) + V(V - 1)(V - \delta)] [z - (V - \delta)^2]^{-1} \\ R'(V - \delta) &= R [s - \beta + (k + 2)V - V'] \\ \kappa &= [s + 2 + \delta(k + 1)] \gamma^{-1} \end{aligned}$$

(γ — показатель адиабаты, $\gamma > 1$).

Последнее уравнение (1.2) можно заменить интегралом адиабатичности [2]

$$PR^{-\gamma} = \text{const} [R(V - \delta)]^\xi \lambda^\eta$$

$$\xi = \frac{2 - (\gamma - 1)s + \delta[k + 1 - \gamma(k + 3)]}{s - \beta + \delta(k + 2)},$$

$$\eta = - \frac{(\gamma + 1)s + 2(k + 2) + \beta[k + 1 - \gamma(k + 3)]}{s - \beta + \delta(k + 2)}$$

Соотношения на скачках записываются так же, как и в случае одномерных автомодельных движений [3]

$$(1.3) \quad R_1(V_1 - \delta) = R_2(V_2 - \delta)$$

$$V_1 - \delta + \frac{z_1}{\gamma(V_1 - \delta)} = V_2 - \delta + \frac{z_2}{\gamma(V_2 - \delta)}$$

$$(V_1 - \delta)^2 + \frac{2z_1}{\gamma - 1} = (V_2 - \delta)^2 + \frac{2z_2}{\gamma - 1}$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены величины по разные стороны поверхности разрыва.

2. Примем, в качестве невозмущенного фона однородно расширяющийся газ, в котором (ρ_0, p_0 — постоянные)

$$(2.1) \quad \rho = \frac{\rho_0}{t^\beta}, \quad p = \frac{p_0}{t^{\beta\gamma}}, \quad v = 0, \quad v_i = \varepsilon_i^{(\beta)} \frac{x_i}{t}, \quad i = 2, 3$$

$$([\rho_0] = ML^{-3}T^\beta, [p_0] = ML^{-1}T^{\beta\gamma-2})$$

Рассмотрим задачу об истечении в вакуум газа с параметрами (2.1), занимающего правое полупространство ($x > 0$). Для выполнения условия автомодельности необходимо потребовать, чтобы истечение газа в левое полупространство началось в момент $t = 0$, отвечающий сингулярности решения (2.1). Характерными размерными постоянными являются ρ_0 и p_0 . Поэтому показатель автомодельности δ и автомодельная переменная λ определяются формулами

$$\delta = \frac{2 - \beta(\gamma - 1)}{2}, \quad \lambda = \alpha \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} \frac{x}{t^\delta}$$

где α — отвлеченная безразмерная постоянная.

Далее предполагается $\gamma < 1 + 2/\beta$. Тогда значение δ будет заключено в интервале (0, 1).

Полагая в (1.1) $a = \rho_0$, приводим систему (1.2) к виду

$$(2.2) \quad \frac{dz}{dV} = \frac{z \{2z - [(1 + \gamma)V - 2\delta](V - \delta) + (\gamma - 1)V(V - 1)\}}{V[z - (V - 1)(V - \delta)]}$$

$$V' = - \frac{V[z - (V - 1)(V - \delta)]}{z - (V - \delta)^2}, \quad R'(V - \delta) = -R(V' + V)$$

Поле интегральных кривых уравнения (2.2) на плоскости (V, z) имеет следующие особые точки: O ($V = 0, z = 0$) — узел, A ($V = 0, z = \delta^2$) — седло, B ($V = \delta, z = 0$) — седло, C ($V = 1, z = 0$) — узел, D ($V = 2\delta(\gamma + 1)^{-1}, z = \delta(\gamma - 1)(\gamma - 2\delta + 1)(\gamma + 1)^{-2}$) — узел, E ($V = 0, z = \infty$) — седло, F ($V = \infty, z = 0$) — седло, G ($V = \infty, z = \infty$) — вырожденная особая точка (седло-узел) (фиг. 1, штрихами показана парабола $z = (V - \delta)^2$).

Решение задачи об истечении однородно расширяющегося газа в вакуум изображается последовательностью отрезков интегральных кривых OA, AG, GC . Отрезок OA соответствует невозмущенному состоянию (2.1), особая точка A — слабому разрыву. Сшивание решения в бесконечно удаленной особой точке G можно провести, например, с помощью замены переменных $W = (V - \delta)^{-1}, y = z(V - \delta)^{-2}$. На плоскости (W, y) особой точке G соответствует прямая $W = 0$, а интегральной кривой AGC — сепаратриса, соединяющая образы особых точек A и C и пересекающая прямую $W = 0$ в некоторой неособой точке.

Из-за наличия сингулярности в решении при $t = 0$ граница с вакуумом мгновенно уходит на бесконечность ($\lambda = -\infty$), которой соответствует особая точка C . Асимптотические формулы вблизи этой точки имеют вид

$$z = c_1 |\lambda|^{-\omega}, \quad V = 1 + c_2 |\lambda|^{-\chi}, \quad R = c_3 |\lambda|^{1/(\delta-1)}$$

$\omega = 2(\beta + 1)/\beta, \chi = 1/(1 - \delta)$ при $\gamma \geq 1 + (\beta + 1)^{-1}, \chi = \omega$ при $\gamma < 1 + (\beta + 1)^{-1}$ (c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные).

Если $\gamma = 1 + 2(\beta + 1)^{-1}$, то рассматриваемая задача имеет точное решение, которое в области за слабым разрывом описывается соотношениями

$$(2.3) \quad \left| (V - 1)^\beta \left(V - \frac{1}{\beta + 2} \right) \right| = \frac{1}{\beta + 2} \left| \frac{\lambda_*}{\lambda} \right|^{\beta+1}$$

$$z = \left(\frac{V - 1}{\beta + 1} \right)^2, \quad R = \frac{V - 1}{(\beta + 2)V - 1}$$

где $\lambda_* = \alpha \sqrt{(\beta + 3)(\beta + 1)}$ — значение автомодельной переменной, соответствующее слабому разрыву.

В размерных переменных решение (2.3) имеет вид ($-\infty < x < x_*$)

$$\left| \left(v - \frac{x}{t} \right)^\beta \left(v - \frac{1}{\beta + 2} \frac{x}{t} \right) \right| = \frac{1}{\beta + 2} \left(\frac{x_*}{t} \right)^{\beta+1}, \quad v_i = \varepsilon_i^{(\beta)} \frac{x_i}{t}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{t^\beta} \frac{v - x/t}{(\beta + 2)v - x/t}, \quad p = \frac{p_0}{t^{\beta\gamma}} \frac{t^2}{x_*^2} \frac{(v - x/t)^3}{(\beta + 2)v - x/t}$$

$$x_* = \sqrt{(\beta + 1)(\beta + 3)} p_0 / \rho_0 t^{1/(\beta+1)}$$

Перед слабым разрывом ($x \geq x_*$) параметры газа определяются формулами (2.1). Профили плотности, давления и скорости, а также схема движения для данного решения при $\beta = 1$, $\gamma = 2$ представлены на фиг. 2 (кривая 1 соответствует распределению ρ/ρ_* , кривая 2 — p/p_* , кривая 3 — vt/x_* ; звездочкой отмечены значения величин в невозмущенном решении (2.1)).

Из условий на скачках (1.3) следует, что в случае $\gamma = 1 + \beta^{-1}$ особая точка D ($V = \beta(2\beta + 1)^{-1}$, $z = 1/2(\beta + 1)(2\beta + 1)^{-2}$) изображает такое состояние газа за ударной волной, которому перед разрывом соответствует состояние, изображаемое точкой O ($V = 0$, $z = 0$). Поэтому при $\gamma = 1 + \beta^{-1}$ существует точное решение автомодельной задачи о распространении сильной взрывной волны в однородно расширяющемся газе. В размерных переменных это решение представляется формулами (2.1) (с $p_0 = 0$) при $x > x_*$ где $x_* = b\sqrt{t}$ — координата фронта ударной волны (b — постоянная), и формулами

$$v = \frac{\beta}{2\beta + 1} \frac{x}{t}, \quad v_i = \varepsilon_i^{(\beta)} \frac{x_i}{t}$$

$$\rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\rho_0}{t^\beta} \left(\frac{x}{x_*} \right)^{2\beta}, \quad p = \frac{\beta\rho_0 b^2}{2(2\beta + 1)t^{\beta+1}} \left(\frac{x}{x_*} \right)^{2(\beta+1)}$$

при $x < x_*$. Профили параметров газа в этом решении и схема движения показаны на фиг. 3 (кривая 1 — ρ/ρ_* , кривая 2 — p/p_* , кривая 3 — v/v_* ; звездочкой отмечены значения величин непосредственно за фронтом ударной волны, $\beta = 1$, $\gamma = 2$).

3. Положим в системе уравнений (1.2) $\delta = 1$, $\kappa = \beta$, $k = -1$, $s = \beta\gamma - 2$. Тогда она существенно упростится и примет вид

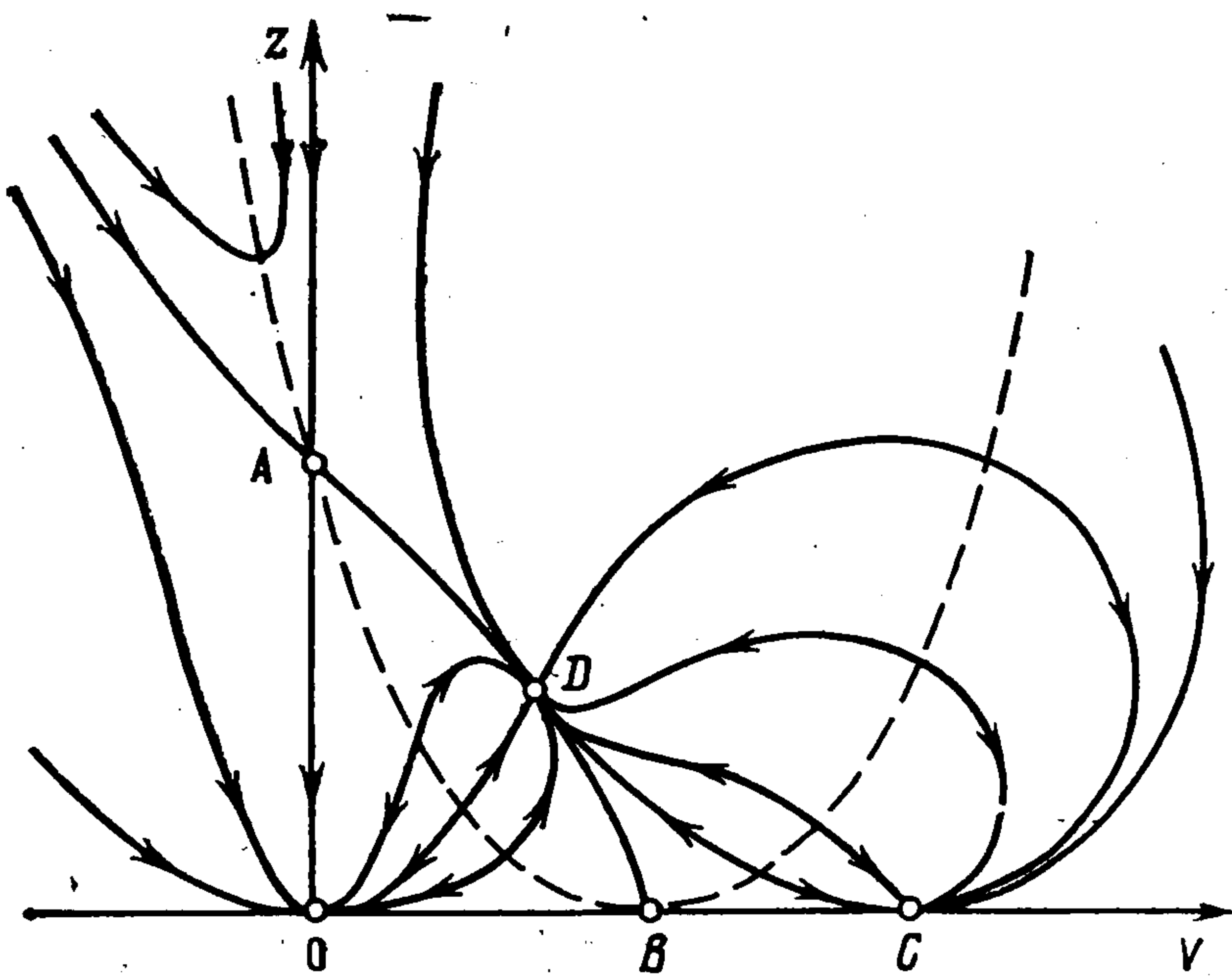
$$(3.1) \quad z' = z [2 - \beta(\gamma - 1) - 2V] (V - 1)^{-1}, \quad V' = -V$$

$$R' (V - 1) = R [2V + \beta(\gamma - 1) - 2]$$

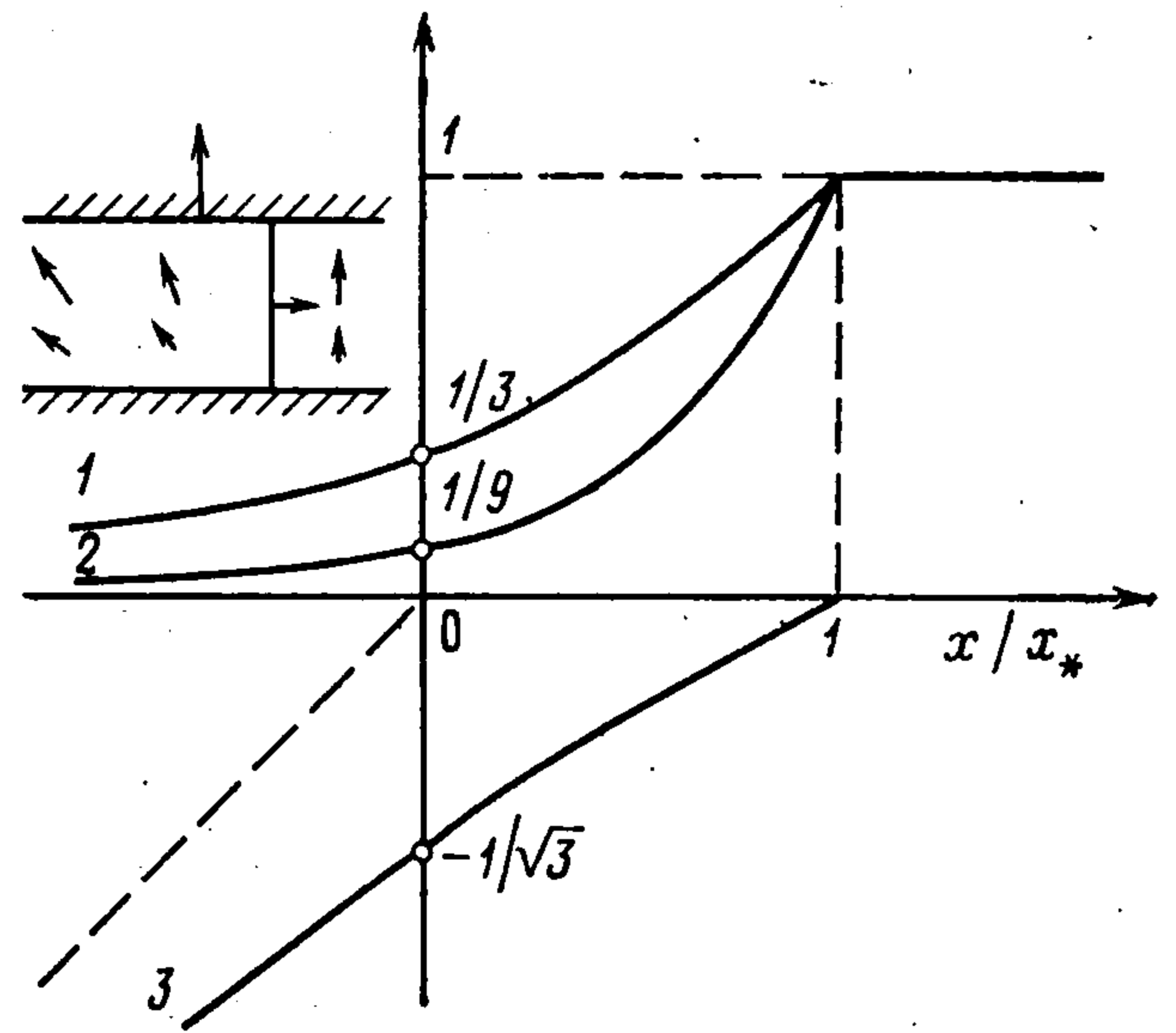
Интегрируя (3.1), получаем

$$(3.2) \quad V = \frac{c_1}{\lambda}, \quad R = \frac{c_3}{z}, \quad z = \begin{cases} c_2 |V|^{2-\beta(\gamma-1)} |V - 1|^{\beta(\gamma-1)}, & c_1 \neq 0 \\ c_2 |\lambda|^{\beta(\gamma-1)-2}, & c_1 = 0 \end{cases}$$

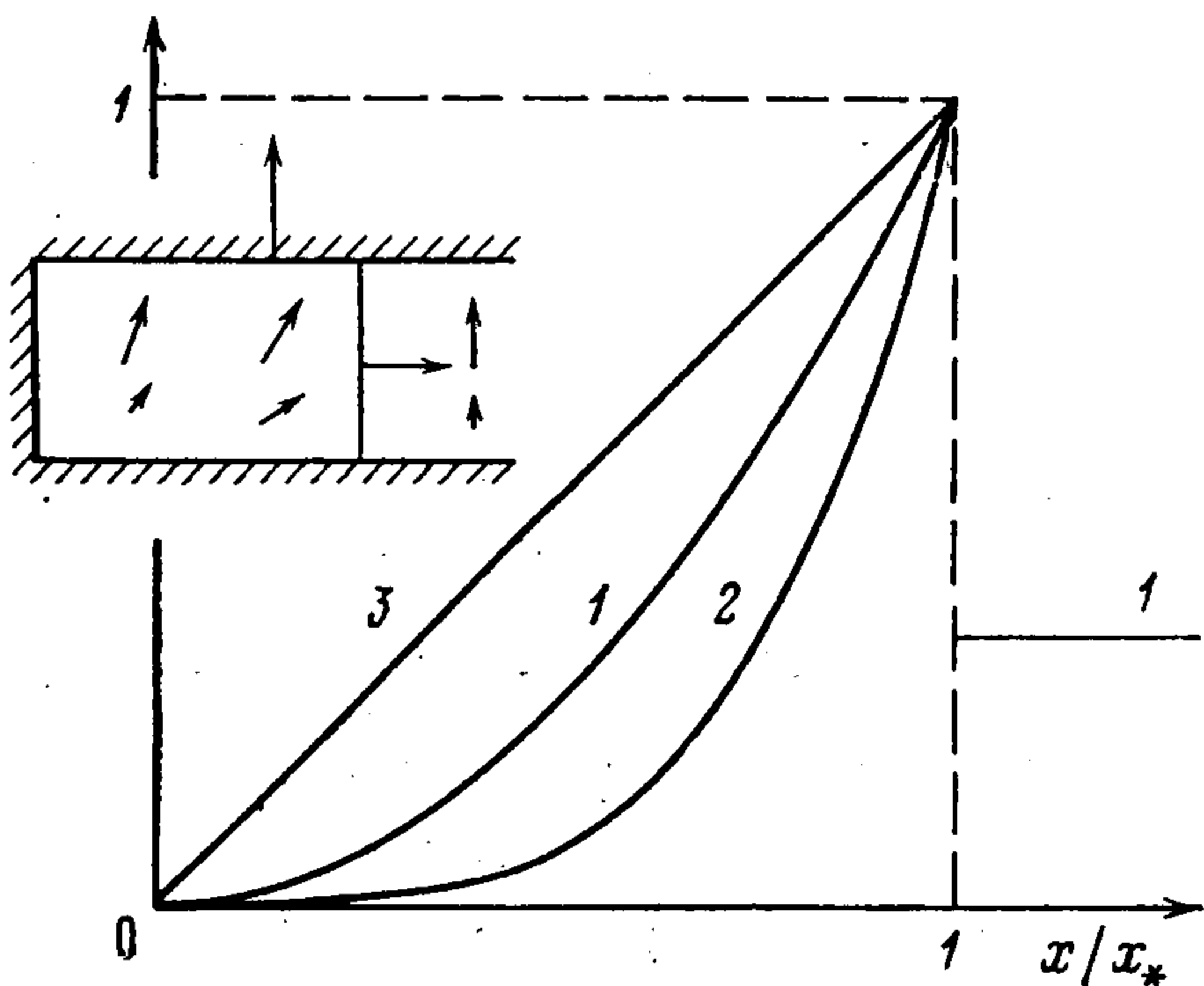
Кроме решения (3.2) в рассматриваемом случае существует особое решение исходной системы уравнений газовой динамики, которое в перемен-



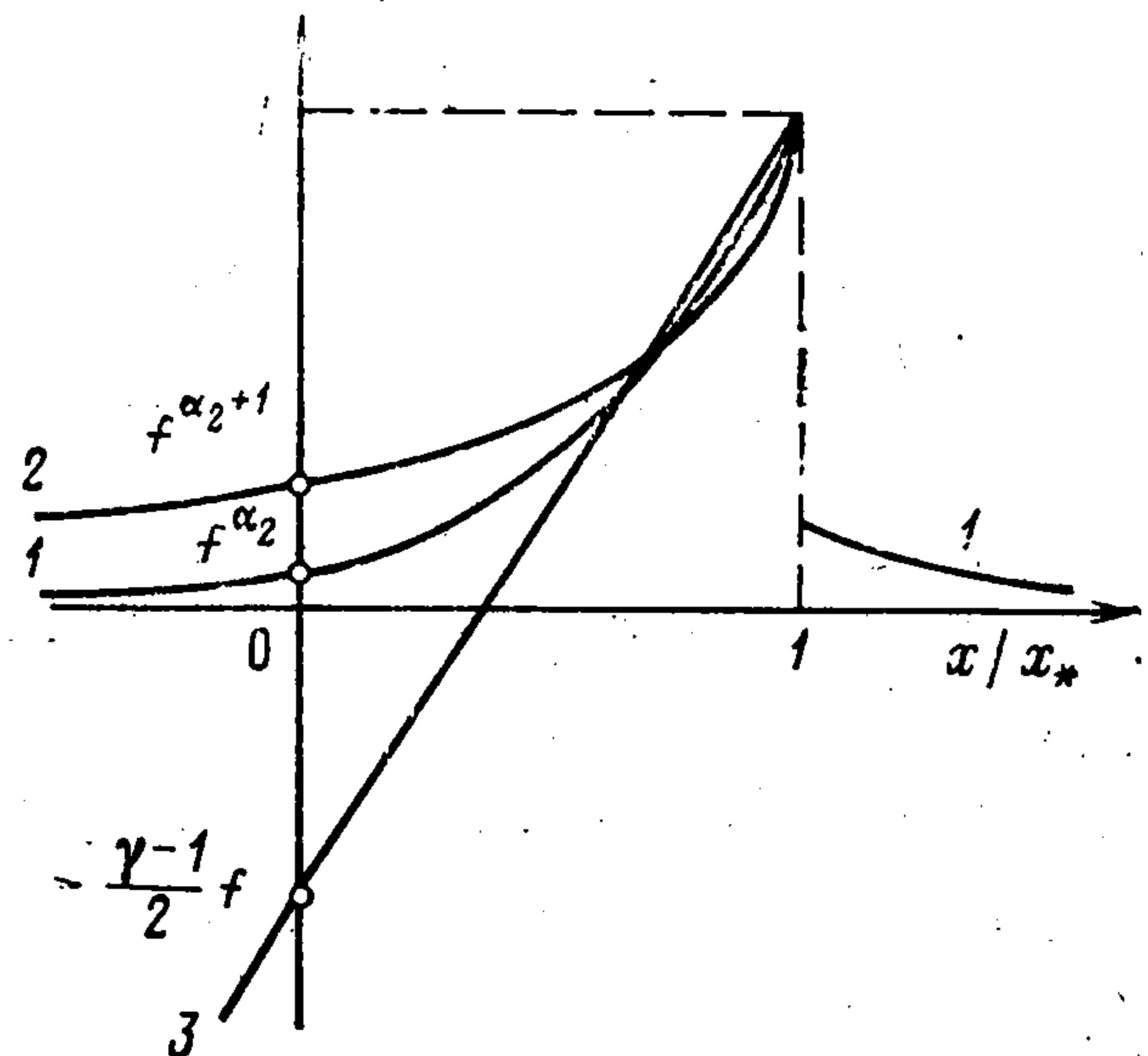
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ных z , V , R , λ имеет вид

$$(3.3) \quad z = (V - 1)^2, \quad V = \frac{2 - \beta(\gamma - 1)}{\gamma + 1} + \frac{k_1}{\lambda}$$

$$R = k_2 |V - 1|^\psi \left| V - \frac{2 - \beta(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right|^{-(\psi+2)}, \quad \psi = \frac{2 - \beta(\gamma - 1)(\gamma + 2)}{(\gamma - 1)(\beta + 1)}$$

где k_1 , k_2 — произвольные постоянные.

Формулы (3.2) при $c_1 = 0$ и формулы (3.3) дают решение задачи об истечении в вакуум поперечно расширяющегося газа с неоднородным распределением плотности. В размерных переменных это решение записывается следующим образом:

$$x_* \leq x < \infty: \quad v = 0, \quad \rho = \frac{A}{x^{\beta(\gamma-1)} t^\beta}, \quad p = \frac{p_0}{t^{\beta\gamma}}$$

$$x_V \leq x < x_*: \quad v = \frac{2 - \beta(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left[\frac{x}{t} - \left(\frac{\gamma p_0}{A} \right)^\varphi \right]$$

$$\rho = \frac{A}{t^{\beta\gamma}} \left(\frac{\gamma p_0}{A} \right)^{-\beta\varphi(\gamma-1)} \left[\frac{2 - \beta(\gamma - 1)}{\gamma + 1} + \frac{(\beta + 1)(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma p_0}{A} \right)^{-\varphi} \frac{x}{t} \right]^\psi$$

$$p = \frac{p_0}{t^{\beta\gamma}} \left[\frac{2 - \beta(\gamma - 1)}{\gamma + 1} + \frac{(\beta + 1)(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma p_0}{A} \right)^{-\varphi} \frac{x}{t} \right]^{\psi+2}$$

$$v_i = \varepsilon_i^{(\beta)} \frac{x_i}{t}, \quad x_* = \left(\frac{\gamma p_0}{A} \right)^\varphi t$$

$$x_V = - \frac{2 - \beta(\gamma - 1)}{(\beta + 1)(\gamma - 1)} \left(\frac{\gamma p_0}{A} \right)^\varphi t, \quad \varphi = \frac{1}{2 - \beta(\gamma - 1)}$$

Здесь x_* и x_V — координаты слабого разрыва и границы с вакуумом соответственно.

Укажем на существование аналога инварианта Римана для данного решения в области $x_V \leq x \leq x_*$ (c — скорость звука)

$$v - \frac{2 - \beta(\gamma - 1)}{(\beta + 1)(\gamma - 1)} c = \text{const}$$

4. Рассмотрим автомодельную задачу о коротком ударе для однородно расширяющегося газа, параметры которого в невозмущенном движении имеют вид ($x > 0$)

$$v = 0, \quad v_i = \varepsilon_i^{(\beta)} \frac{x_i}{t}, \quad \rho = \frac{A}{x^{\omega t^\beta}}, \quad p = 0$$

Здесь A — постоянная с размерностью $[A] = ML^{\omega-3}T^\beta$, $\beta = 0, 1, 2$ ($\varepsilon_2^{(0)} = \varepsilon_3^{(0)} = 0$), $i = 2, 3$.

Пусть $\lambda = x/(bt^\delta)$ — автомодельная переменная, где b — некоторая размерная постоянная, $[b] = LT^{-\delta}$.

Уравнение траектории на плоскости (V, z) , соответствующей решению задачи о коротком ударе, ищем в виде

$$(4.1) \quad z = C(V - 1)(V - \delta), \quad C = \text{const}$$

Эта траектория должна проходить через образ фронта ударной волны ($V = 2\delta(\gamma + 1)^{-1}$, $z = 2\delta^2\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)^{-2}$) и через особую точку на параболе $z = (V - \delta)^2$ с координатами ($V = \delta(\kappa - \beta)(\kappa - \beta + \delta - 1)^{-1}$, $z = \delta^2(1 - \delta)^2(\kappa - \beta + \delta - 1)^{-2}$), где $\kappa = [\beta + 2 + \delta(\omega - 2)]\gamma^{-1}$.

Учитывая также, что зависимость (4.1) должна удовлетворять первому уравнению (1.2), получаем следующие выражения для показателей δ , ω и постоянной C :

$$(4.2) \quad \delta = \beta + 2 - (\beta + 1)\gamma$$

$$\omega = \frac{7 + 4\beta - (5 + 4\beta)\gamma}{2\delta}, \quad C = \frac{2\gamma\delta}{(2\beta + 3)(\gamma - 1)}$$

Ограничимся рассмотрением случая $0 \leq \omega < 1$. Тогда возможные значения показателя адиабаты будут заключены в пределах $1 < \gamma \leq 1 + 2/(5 + 4\beta)$. Отметим, что случай $\omega = 0$, $\gamma = 1 + 2/(5 + 4\beta)$ рассмотрен в [4, 5] (при $\beta = 0$) и в [2] (при $\beta = 1, 2$). Решение задачи о коротком ударе в среде с переменной плотностью ($\beta = 0$, $\omega \neq 0$) получено в [6].

Постоянную b можно выбрать так, чтобы на фронте ударной волны выполнялось условие $\lambda = \lambda_* = 1$. Тогда решение задачи о коротком ударе представится формулами (4.1), (4.2) и соотношениями

$$V(\lambda) = 1 - \frac{(2\beta + 3)(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \frac{1}{\lambda}$$

$$R = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left| \frac{(\gamma + 1)(V - 1)}{(2\beta + 3)(\gamma - 1)} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{(\gamma + 1)(V - \delta)}{\delta(\gamma - 1)} \right|^{\alpha_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{3 + 2\beta}{2\delta(\beta + 1)}, \quad \alpha_2 = -\frac{5 + 4\beta}{2(\beta + 1)}$$

В размерных переменных это решение имеет вид ($x < x_* = bt^\delta$)

$$v = \frac{x}{t} - \frac{(2\beta + 3)(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \frac{x_*}{t}, \quad v_i = \varepsilon_i^{(\beta)} \frac{x_i}{t}$$

$$\rho = \frac{A}{x_*^{\omega t^\beta}} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left\{ \frac{\gamma + 1}{\delta} \left[\frac{2\beta + 3}{\gamma + 1} - (\beta + 1) \frac{x}{x_*} \right] \right\}^{\alpha_2}$$

$$p = \frac{2\delta(\gamma - 1)\rho}{\gamma + 1} \left(\frac{x_*}{t} \right)^2 \left[\frac{2\beta + 3}{\gamma + 1} - (\beta + 1) \frac{x}{x_*} \right]$$

Соответствующие схематичные графики распределения плотности, давления и скорости представлены на фиг. 4 (обозначения кривых те же, что на фиг. 3, $f = (2\beta + 3) \delta^{-1}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 319 с.
2. *Möhning W.* Ähnlichkeitslösungen zur Beschreibung der Bewegung eines starken Verdichtungsstoßes in einem quer expandierenden Gas.— *Z. angew. Math. und Mech.*, 1966, В. 46, Sonderh., S. 208—210.
3. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
4. *Häfele W.* Zur analytischen Behandlung ebener, starker, instationärer Stoßwellen.— *Z. Naturforsch.*, 1955, В. 10a, Н. 12, S. 1006—1016.
5. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963. 632 с.
6. *Андреанкин Э. И.* О некоторых автомодельных движениях газа при ударе и детонации в среде с переменной плотностью.— *ПММ*, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1133—1139.

Москва

Поступила в редакцию
26.II.1985