

УДК 539.3

О МЯГКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Кылатчанов К. М., Черных К. Ф.

Исследуются мягкие оболочки из эластомеров, испытывающие при нагружении большие деформации. Рассматривается обратная задача раскроя — нелинейная при больших деформациях. Полученные результаты иллюстрируются на двухпараметрической оболочке вращения, изготовленной из двухконстантного материала. Выясняются вопросы сопряжения двух- и одноосных зон оболочки, а также раскроя составной оболочки.

Из работ, посвященных теории мягких оболочек в основном при малых деформациях, следует отметить [1—7].

1. Уравнения равновесия безмоментной теории тонких оболочек имеют вид [8, 9]

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sqrt{a^\circ} T^{\gamma j}}{\partial \alpha^\gamma} + \Gamma_{\gamma\beta}^j \sqrt{a^\circ} T^{\gamma\beta} + \sqrt{a} g^j = 0$$

$$b_{\gamma\beta} \sqrt{a^\circ} T^{\gamma\beta} + \sqrt{a} g_n = 0 \quad (j, \gamma, \beta = 1, 2)$$

Здесь и ниже по повторяющимся греческим индексам производится суммирование от 1 до 2.

Для несжимаемого материала

$$(1.2) \quad T^{ij} = 2h^\circ \left[\frac{\partial \Phi^\circ}{\partial A} a^{cij} + \left(B \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial B} - B^{-1} \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \lambda_\xi^2} \right) a^{ij} \right]$$

$$(1.3) \quad \lambda_\xi = (a/a^\circ)^{-1/2} = B^{-1/2}, \quad A = a^\circ \alpha^\beta a_{\alpha\beta} \quad (a^\circ = |a_{ij}^\circ|, \quad a = |a_{ij}|)$$

(λ_ξ — кратность удлинения поперечного волокна, $\Phi^\circ = \Phi|_{\xi=0}$ — значение упругого потенциала на срединной поверхности оболочки).

Практика расчета тонкостенных резинотехнических изделий показала, что деформацию несжимаемых эластомеров хорошо описывает трехконстантный упругий потенциал

$$(1.4) \quad \Phi^\circ = \mu n^{-2} [(1 + \beta)(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_\xi^n - 3) + (1 - \beta)(\lambda_1^{-n} + \lambda_2^{-n} + \lambda_\xi^{-n} - 3)]$$

Здесь λ_1, λ_2 — главные кратности удлинений срединной поверхности. При этом

$$(1.5) \quad A = \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \quad B = \lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad \lambda_\xi = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}$$

$$\lambda_{1,2} = 1/2 [(A + 2B^{1/2})^{1/2} \pm (A - 2B^{1/2})^{1/2}]$$

Для трехконстантного упругого потенциала упругий закон принимает вид

$$(1.6) \quad \frac{T^{ij}}{\mu h^\circ n^{-1}} = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} [1 + \beta + (1 - \beta) \lambda_1^{-n} \lambda_2^{-n}] a^{cij} +$$

$$+ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1} \{ (1 + \beta) [\lambda_1^2 \lambda_2^n - \lambda_1^n \lambda_2^2 - (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \lambda_1^{-n} \lambda_2^{-n}] +$$

$$+ (1 - \beta) [\lambda_1^{-n} \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^{-n} + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \lambda_1^n \lambda_2^n] \} a^{ij}$$

В главных осях деформации $a^{012} = a^{12} = 0$, $a^{ii} = a^{0ii} \lambda_i^{-2}$ и

$$(1.7) \quad T^{11} = \mu h^\circ n^{-1} [1 + \beta + (1 - \beta) \lambda_2^n] \lambda_1^{-2} (\lambda_1^n - \lambda_1^{-n} \lambda_2^{-n}) / a_{11}^\circ$$

$$T^{22} = \mu h^\circ n^{-1} [1 + \beta + (1 - \beta) \lambda_1^n] \lambda_2^{-2} (\lambda_2^n - \lambda_1^{-n} \lambda_2^{-n}) / a_{22}^\circ, \quad T^{12} = 0$$

В частности, для неогуковского материала ($\beta = 1, n = 2$)

$$(1.8) \quad T^{ij} = \mu h^\circ (a^{oij} - B^{-1} a^{ij})$$

и в главных осях

$$T^{11} = \mu h^\circ (1 - \lambda_1^{-n} \lambda_2^{-2}) / a_{11}^\circ, \quad T^{22} = \mu h^\circ (1 - \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-n}) / a_{22}^\circ, \quad T^{12} = 0$$

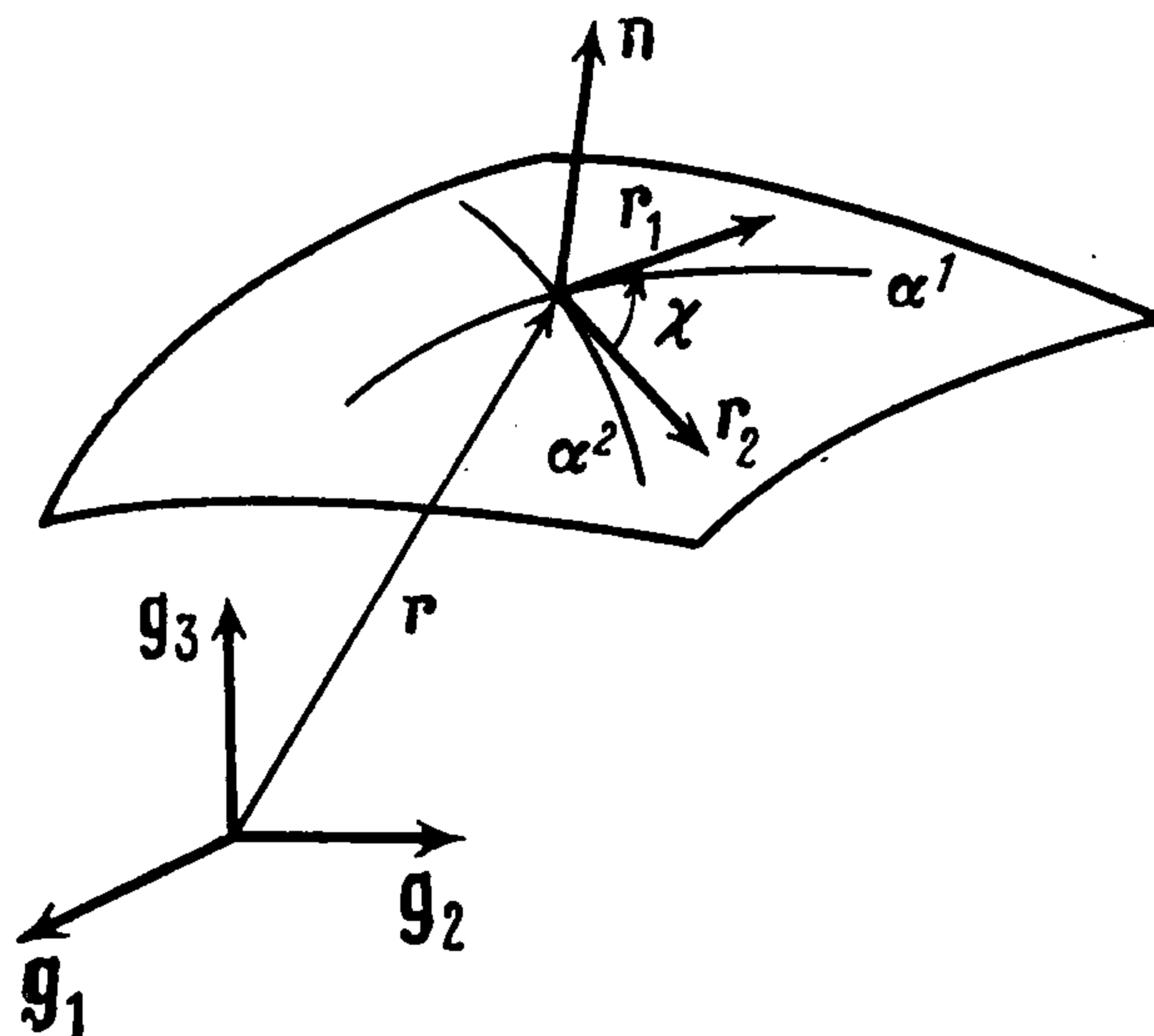
Толщины оболочки до и после деформации (h° и h) связаны для несжимаемого материала соотношением

$$(1.9) \quad h = \lambda_\xi h^\circ = (a/a^\circ)^{-1/2} h^\circ = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} h^\circ$$

Физические компоненты тензора истинных напряжений, отнесенные к метрике деформированной срединной поверхности, определяются по формулам

$$\sigma_{(ij)} = \sqrt{\frac{a_{ii} a_{jj}}{B}} \frac{T^{ij}}{h}$$

Если $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2 + x_3 \mathbf{g}_3$ — представление радиуса-вектора точки срединной поверхности в пространственных прямоугольных декартовых координатах, то (фиг. 1)



Фиг. 1

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^i} \mathbf{g}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^i} \mathbf{g}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^i} \mathbf{g}_3 \\ a_{ij} &= \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^j} \\ a &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \sin^2 \chi = \mu^2 = \mu_{13}^2 + \mu_{23}^2 + \mu_{33}^2 \\ a^{11} &= a_{22}/a, \quad a^{22} = a_{11}/a, \quad a^{12} = -a_{12}/a \\ \mu n &= \mu_{13} \mathbf{g}_1 + \mu_{23} \mathbf{g}_2 + \mu_{33} \mathbf{g}_3 \\ \sin \chi b_{ij} &= \mu_{13} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} + \mu_{23} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} + \mu_{33} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} \\ \sqrt{a_{11} a_{22}} \mu_{13} &= \frac{\partial (x_2, x_3)}{\partial (\alpha^1, \alpha^2)}, \quad \sqrt{a_{11} a_{22}} \mu_{23} = \frac{\partial (x_3, x_1)}{\partial (\alpha^1, \alpha^2)} \\ \sqrt{a_{11} a_{22}} \mu_{33} &= \frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (\alpha^1, \alpha^2)} \\ \Gamma_{ij}^h &= 1/2 \left(\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial a_{j\beta}}{\partial \alpha^i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial \alpha^\beta} \right) a^{\beta h} \end{aligned}$$

Соответствующие зависимости для недеформированной срединной поверхности следуют из выписанных выше добавлением верхнего индекса $^\circ$.

Контравариантные компоненты тензора усилий связаны с его главными значениями соотношениями

$$(1.11) \quad \begin{aligned} a_{11} T^{11} &= \cos^2 \gamma t_1 + \sin^2 \gamma t_2, \quad a_{22} T^{22} = \sin^2 \gamma t_1 + \cos^2 \gamma t_2 \\ \sqrt{a_{11} a_{22}} T^{12} &= \sin \gamma \cos \gamma (t_1 - t_2) \end{aligned}$$

где γ — угол между первой координатной линией и первым координатным направлением.

2. Как известно [1, 2], мягкими называются оболочки с весьма малой изгибной жесткостью, не воспринимающие поэтому сжимающих усилий. В мягкой оболочке могут иметь место двухосные зоны (в которых главные усилия положительны) и одноосные (в которых одно из главных усилий положительно, а другое настолько мало, что его можно принять равным нулю).

Пусть, например [1], в одноосных зонах

$$(2.1) \quad t_1 > 0, \quad t_2 = 0$$

Принимая в одноосных зонах в качестве координатных линий ортогональные линии главных усилий, получаем (при $\gamma = 0$) из соотношений (1.11)

$$(2.2) \quad T^{11} = a_{11}^{-1} t_1, \quad T^{12} = T^{22} = 0$$

и уравнения равновесия (1.1) при нормальном давлении ($q_n = q = \text{const}$, $q^1 = q^2 = 0$) принимают вид

$$(2.3) \quad \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}} \sqrt{a^\circ} T^{11}}{\partial \alpha^1} = 0, \quad - \frac{\sqrt{a_{11}}}{a_{22}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial \alpha^2} \sqrt{a^\circ} T^{11} = 0$$

$$- \frac{a_{11}}{R_1} \sqrt{a^\circ} T^{11} + \sqrt{a_{11} a_{22}} q = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_1} = - \frac{b_{11}}{a_{11}}, \quad \frac{1}{R_2} = - \frac{b_{22}}{a_{22}}, \quad \frac{1}{R_{12}} = \frac{b_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \right)$$

Второе из этих уравнений дает

$$(2.4) \quad a_{11} = a_{11}(\alpha^1)$$

т. е. первая координатная линия — геодезическая. Из первого и третьего следует

$$(2.5) \quad \sqrt{a^\circ} T^{11} = q \frac{c_2(\alpha^2)}{\sqrt{a_{11}}}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{\sqrt{a_{22}}}{c_2(\alpha^2)}$$

Еще три уравнения дают соотношения Кодацци — Гаусса [6], записываемые с учетом выражения (2.4) и второго соотношения (2.5) в следующем виде:

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\sqrt{a_{11}} \partial \alpha^1} \left(\frac{\sqrt{a_{22}}}{R_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left(\frac{1}{R_{12}} \right) = \frac{\sqrt{a_{22}}}{c_2(\alpha^2)} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11}} \partial \alpha^1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\sqrt{a_{22}}}{c_2(\alpha^2)} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial}{\sqrt{a_{11}} \partial \alpha^1} \left(\frac{a_{22}}{R_{12}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\sqrt{a_{11}} \partial \alpha^1} \left(\frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11}} \partial \alpha^1} \right) = - \sqrt{a_{22}} \left[\frac{\sqrt{a_{22}}}{c_2(\alpha^2) R_2} - \frac{1}{R_{12}^2} \right]$$

3. Для мягкой оболочки одной из основных является задача раскрыя: требуется раскрыть (спроектировать) оболочку так, чтобы она при данных нагрузках и условиях закрепления приняла необходимую форму. Поскольку при этом геометрия оболочки и нагрузка заданы, система трех уравнений равновесия линейна относительно искомых усилий

$$\sqrt{a^\circ} T^{11}, \quad \sqrt{a^\circ} T^{12} = \sqrt{a^\circ} T^{21}, \quad \sqrt{a^\circ} T^{22}$$

Для несжимаемого материала из соотношений (1.2) и (1.9) получаем систему трех (существенно различных) нелинейных алгебраических уравнений для определения метрического тензора недеформированной срединной поверхности

$$(3.1) \quad \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial A} a^{oij} + \left(B \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial B} - B^{-1} \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \lambda_\xi^2} \right) a^{ij} = \frac{\sqrt{a^\circ} T^{ij}}{2h \sqrt{a}} = f^{ij}$$

Отсюда с учетом равенств (1.5) и очевидного соотношения $a^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = 2$ получаем инвариантные соотношения

$$(3.2) \quad A \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial A} + 2 \left(B \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial B} - B^{-1} \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \lambda_\xi^2} \right) = a_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}$$

$$\left(B - \frac{1}{4} A^2 \right) \left(\frac{\partial \Phi^\circ}{\partial A} \right)^2 = a [f^{11} f^{22} - (f^{12})^2] - \frac{1}{4} (a_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta})$$

После нахождения из выписанной нелинейной алгебраической системы инвариантов A и B имеем из выражений (3.1) и (1.10)

$$(3.3) \quad \frac{a^{oij}}{a^{ij}} = \left[\frac{f^{ij}}{a^{ij}} - \left(B \frac{\partial \Phi^o}{\partial B} - B^{-1} \frac{\partial \Phi^o}{\partial \lambda_{\xi}^2} \right) \right] / \frac{\partial \Phi^o}{\partial A}$$

$$(3.4) \quad a_{11}^o = aB^{-1}a^{o22}, \quad a_{12}^o = -aB^{-1}a^{o12}, \quad a_{22}^o = aB^{-1}a^{o11}$$

В частности, для неогуковского закона (1.8)

$$B^3 - 4a\mu^{-2} [f^{11}f^{22} - (f^{12})^2] B^2 - 2a_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}\mu^{-1}B - 1 = 0$$

$$a^{oij} = B^{-1}a^{ij} + \frac{\sqrt{a^o} T^{ij}}{\mu h \sqrt{a}}$$

4. Полученные формулы можно использовать и для одноосной зоны. Так, из соотношений (2.2) и первого соотношения (2.5) находим

$$(4.1) \quad f^{11} = \frac{qc_2(\alpha^2)}{2ha_{11}\sqrt{a_{22}}}, \quad f^{12} = f^{22} = 0$$

и, так как $a^{12} = 0$, из соотношений (3.3), (3.4) следует, что $a_{12}^o = 0$. Таким образом, материальные координатные линии являются главными (и ортогональными) для тензора деформации. При этом, согласно соотношениям (1.10)

$$(4.2) \quad \sqrt{a^o} = \sqrt{a_{11}^o a_{22}^o}, \quad a^{o11} = 1/a_{11}^o, \quad a^{o22} = 1/a_{22}^o \quad (a^{o12} = a_{12}^o = 0)$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{a^o} \lambda_1 \lambda_2, \quad a^{11} = 1/(\lambda_1^2 a_{11}^o), \quad a^{22} = 1/(\lambda_2^2 a_{22}^o) \quad (a^{12} = a_{12} = 0)$$

и из зависимостей (4.1) и (3.3) имеем

$$(4.3) \quad \lambda_2^2 = - \left(B \frac{\partial \Phi^o}{\partial B} - B^{-1} \frac{\partial \Phi^o}{\partial \lambda_{\xi}^2} \right) / \frac{\partial \Phi^o}{\partial A}, \quad \lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \bar{q} / \frac{\partial \Phi^o}{\partial A}$$

$$\bar{q} = qc_2(\alpha^2)/(2ha_{22})$$

При этом инварианты определяются из системы уравнений (3.2), правые части которых имеют вид $\sqrt{a_{22}^o \bar{q}}$ и $-(a_{22}^o \bar{q}^2)/4$ соответственно.

Для неогуковского же закона

$$\lambda_2^2 = B^{-1}, \quad \lambda_1^2 = B^{-1} + \frac{qc_2(\alpha^2)}{\mu h \sqrt{a_{22}}}, \quad B^3 - \frac{qc_2(\alpha^2)}{\mu h \sqrt{a_{22}}} B - 1 = 0$$

5. В случае, когда координатные главные линии деформации являются линиями кривизны [6], $R_{12}^{-1} = 0$, и из второго соотношения Кодацци — Гаусса (2.6) находим $\sqrt{a_{22}^o} = c_1(\alpha^1) c_2(\alpha^2)$. Подстановка полученного выражения в остальные два уравнения после преобразований с учетом соотношений (2.5) приводит к равенствам

$$(5.1) \quad R_1^{-1} = c_1(\alpha^1), \quad R_2^{-1} = 1/2 [c_1(\alpha^1) - 1/(c_1(\alpha^1) R^2)]$$

$$\sqrt{a^o} T^{11} = qc_2(\alpha^2)/\sqrt{a_{11}^o}, \quad a_{11} = a_{11}(\alpha^1)$$

При этом $a_{11}(\alpha^1)$, $c_2(\alpha^2)$ — произвольные функции, R — произвольная постоянная, а $c_1(\alpha^1)$ — решение уравнения

$$(5.2) \quad d^2 c_1 / (\sqrt{a_{11}^o} d\alpha^1)^2 + 1/2 (c_1^3 - c_1 R^{-2}) = 0$$

6. Рассмотрим осесимметричную деформацию оболочки вращения (фиг. 2). Для нее

$$(6.1) \quad \alpha^1 = s^o, \quad \alpha^2 = \theta^o$$

В силу предположения об осесимметричности деформации

$$(6.2) \quad x_1^o = r^o(s^o) \cos \theta^o, \quad x_2^o = r^o(s^o) \sin \theta^o, \quad x_3^o = x_3^o(s^o)$$

$$x_1 = r(s^o) \cos \theta^o, \quad x_2 = r(s^o) \sin \theta^o, \quad x_3 = x_3(s^o)$$

Пусть $\lambda_s (= \lambda_1)$, $\lambda_\theta (= \lambda_2)$ — главные кратности удлинений вдоль меридионального и окружного направлений. Из фиг. 3 и ей аналогичной для

деформированной конфигурации следует ($' = \partial/\partial s^\circ$)

$$(6.3) \quad r'^{\circ} = \cos \varphi^\circ, \quad x_3'^{\circ} = -\sin \varphi^\circ, \quad r' = \lambda_s \cos \varphi, \quad x_3' = -\lambda_s \sin \varphi$$

$$\lambda_s = ds/ds^\circ, \quad \lambda_\theta = r/r^\circ$$

Согласно формулам (6.2) и (1.10)

$$(6.4) \quad a_{11}^\circ = 1, \quad a_{22}^\circ = r^{\circ 2}, \quad a^\circ = r^{\circ 2}, \quad a^{011} = 1, \quad a^{022} = 1/r^{\circ 2}$$

$$a_{11} = \lambda_s^2, \quad a_{22} = r^{\circ 2} \lambda_\theta^2, \quad a = (r^\circ \lambda_s \lambda_\theta)^2, \quad a^{11} = \lambda_s^{-1}, \quad a^{22} = (r^\circ \lambda_\theta)^{-2}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \lambda_s \lambda_s', \quad \Gamma_{12}^2 = \lambda_s \cos \varphi / (r^\circ \lambda_\theta), \quad \Gamma_{22}^1 = -r^\circ \lambda_s^{-1} \lambda_\theta \cos \varphi,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{b_{11}}{a_{11}} = \lambda_s^{-1} \varphi', \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{b_{22}}{a_{22}} = \sin \varphi (r^\circ \lambda_\theta)^{-1}, \quad b_{12} = 0$$

С учетом выписанных равенств решение уравнений равновесия (1.1) запишем в виде

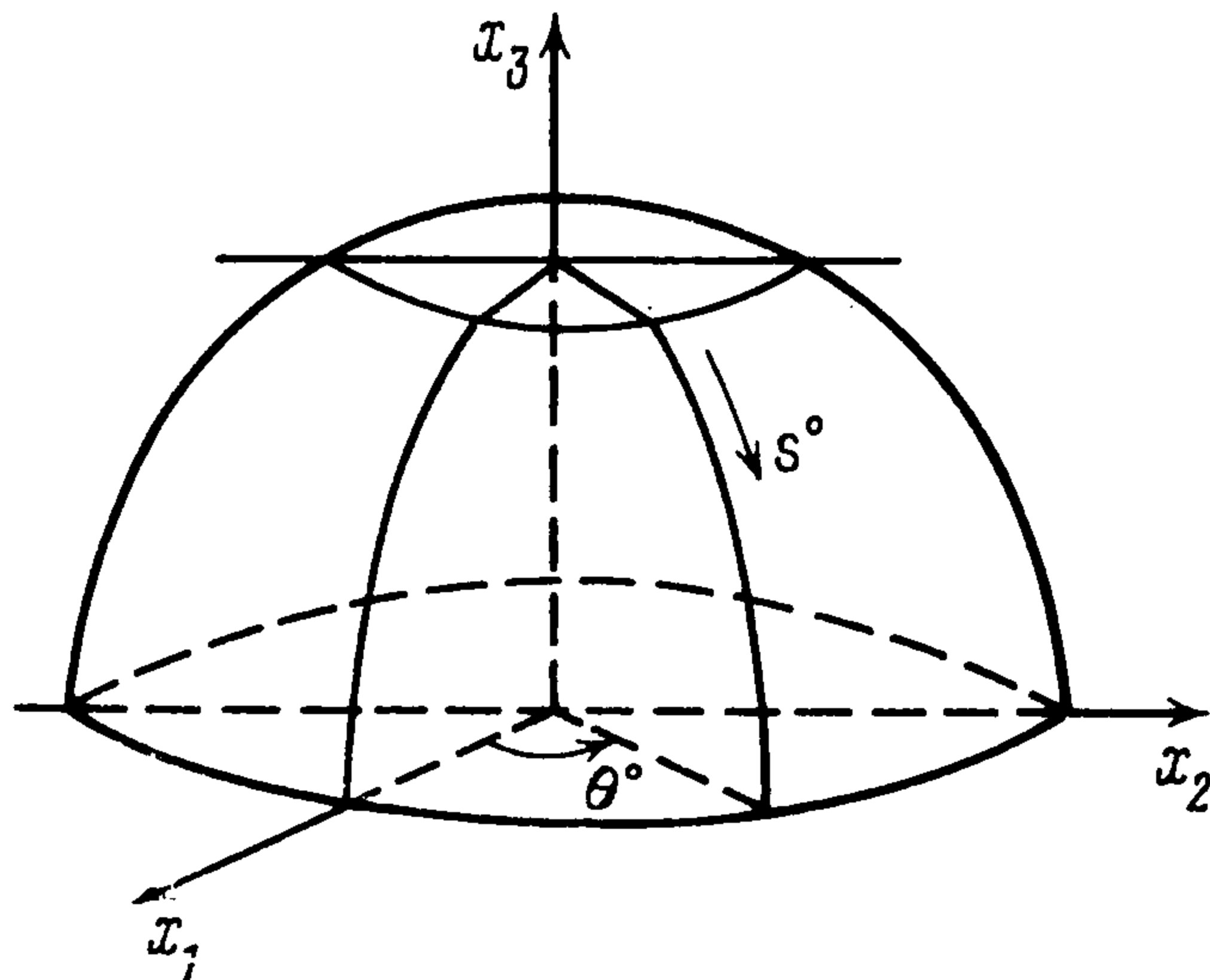
$$(6.5) \quad \lambda_\theta^{-1} T_s = \mu h \bar{\sigma} \left[\frac{k + \bar{r}^2}{\bar{r} \sin \varphi} \right], \quad \lambda_s^{-1} T_\theta = \mu h \bar{\sigma} \left[-\frac{k + \bar{r}^2}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{d\bar{s}} + 2 \frac{\bar{r}}{\sin \varphi} \right]$$

$$(T_s = \lambda_s T^{11}, \quad T_\theta = r^{\circ 2} \lambda_\theta T^{22})$$

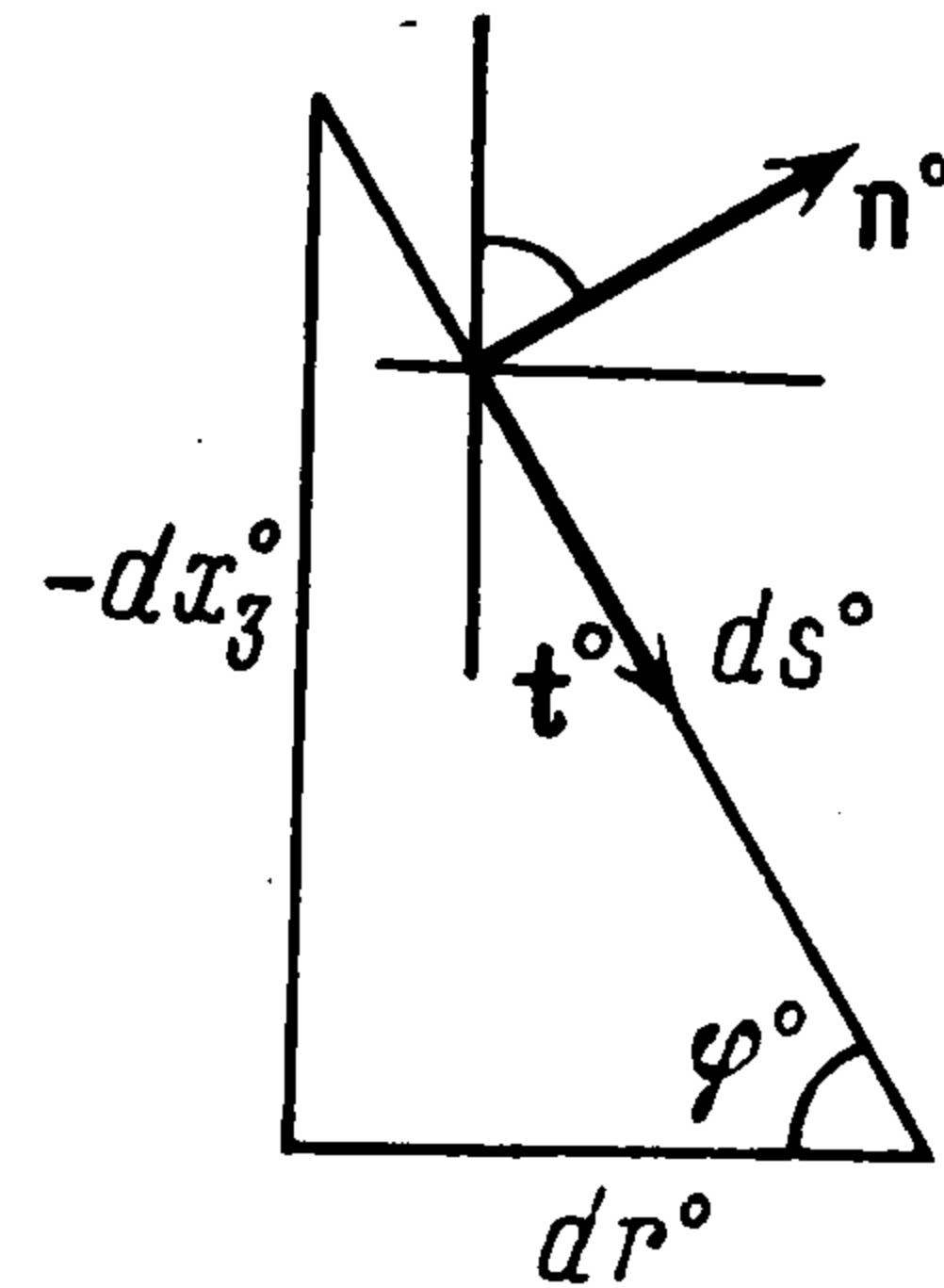
где использованы безразмерные величины

$$(6.6) \quad \bar{r} = r/R_0, \quad \bar{s} = s/R_0, \quad k = P/(1/2 q R_0^2), \quad \bar{\sigma} = q R_0 / (2\mu h)$$

Здесь R_0 — характерный линейный размер срединной поверхности или радиус ее кривизны, q — равномерное давление, $2\pi P$ — сверхдавление. Если оболочка закрыта сверху и действует лишь нормальное давление, то $P = 0$ и $k = 0$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для трехконстантного потенциала (1.4), используя соотношения (1.7), (6.4) и (6.5), находим

$$(6.7) \quad 1/2 [1 + \beta + (1 - \beta) \lambda_\theta^n] (\lambda_s^n - D^{-1}) = f_s$$

$$1/2 [1 + \beta + (1 - \beta) \lambda_s^n] (\lambda_\theta^n - D^{-1}) = f_\theta$$

$$\left(f_s = \frac{\lambda_\theta^{-1} T_s}{(2\mu/n)h}, \quad f_\theta = \frac{\lambda_s^{-1} T_\theta}{(2\mu/n)h}, \quad C = \lambda_s^n + \lambda_\theta^n, \quad D = \lambda_s^n \lambda_\theta^n \right)$$

Складывая и перемножая уравнения (6.7), получаем систему уравнений для нахождения инвариантов C, D . Затем из (6.7) определяем

$$\lambda_s^n = \frac{1}{2} C + \frac{f_s - f_\theta}{1 + \beta + (1 - \beta) D^{-1}}, \quad \lambda_\theta^n = \frac{1}{2} C - \frac{f_s - f_\theta}{1 + \beta + (1 - \beta) D^{-1}}$$

Теперь из соотношений (6.3) последовательно находим

$$(6.8) \quad r^\circ(s) = \lambda_\theta^{-1}(s) r(s), \quad ds^\circ = \lambda_s^{-1} ds$$

$$\cos \varphi^\circ = \frac{dr^\circ}{as'} = \lambda_s \frac{dr^\circ}{ds} = \lambda_s \frac{d[\lambda_\theta^{-1}(s)r(s)]}{ds}$$

$$x_3^\circ(s) = - \int_{s_1}^s \lambda_s^{-1}(s) \sin \varphi^\circ(s) ds, \quad s^\circ = \int_{s_1}^s \lambda_s^{-1} ds$$

Напомним, что выражения (6.5) справедливы для двухосной зоны, т. е. при выполнении неравенств ($q > 0, \bar{\sigma} > 0$)

$$\frac{k + \bar{r}^2}{r \sin \varphi} > 0, \quad -\frac{k + \bar{r}^2}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{d\bar{s}} + 2 \frac{\bar{r}}{\sin \varphi} > 0$$

Согласно соотношениям (1.7), при $\beta = 1$

$$(6.9) \quad \lambda_\theta^{-1} T_s = 2\mu h \frac{\lambda_s^n - \lambda_s^{-n} \lambda_\theta^{-n}}{n}, \quad \lambda_s^{-1} T_\theta = 2\mu h \frac{\lambda_\theta^n - \lambda_s^{-n} \lambda_\theta^{-n}}{n}$$

Дифференцируя эти зависимости, находим

$$(6.10) \quad 2\mu h \lambda_s' = \frac{\lambda_s [(\lambda_\theta^n + \lambda_s^{-n} \lambda_\theta^{-n}) (\lambda_\theta^{-1} T_s)' - \lambda_s^{-n} \lambda_\theta^{-n} (\lambda_s^{-1} T_\theta)']}{\lambda_s^n \lambda_\theta^n + \lambda_s^{-n} + \lambda_\theta^{-n}}$$

$$2\mu h \lambda_\theta' = \frac{\lambda_\theta [-\lambda_s^{-n} \lambda_\theta^{-n} (\lambda_\theta^{-1} T_s)' + (\lambda_s^n + \lambda_s^{-n} \lambda_\theta^{-n}) (\lambda_s^{-1} T_\theta)']}{\lambda_s^n \lambda_\theta^n + \lambda_s^{-n} + \lambda_\theta^{-n}}$$

Переходя к рассмотрению одноосной зоны, заметим, что для оболочки вращения (фиг. 2)

$$(6.11) \quad ds = \sqrt{a_{11}} d\alpha^1 = R_1(\varphi) d\varphi, \quad \sqrt{a_{22}} = r = R_2 \sin \varphi$$

С учетом первого из этих соотношений уравнение (5.2) приводим к виду

$$d^2 c_1^2 / (d\varphi)^2 + c_1^2 = R^{-2}$$

с очевидным общим решением

$$c_1 = \sqrt{d \cos \varphi + \Delta}, \quad \Delta = e \sin \varphi + R^{-2}$$

Согласно соотношениям (6.11) и (5.1)

$$c_2(\theta) = c = \text{const}, \quad d = 0, \quad c = 2/e$$

так что переходя к T_s и T_θ (6.5), имеем

$$(6.12) \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}, \quad \sqrt{a_{22}} = r = R_2 \sin \varphi = \frac{2\sqrt{\Delta}}{e}$$

$$x_3 = - \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\Delta}}, \quad \lambda_\theta^{-1} T_s = \frac{q}{\sqrt{\Delta}}, \quad \lambda_s^{-1} T_\theta = 0$$

7. Рассмотрим оболочки вращения, деформированные срединные поверхности которых содержатся в двухпараметрическом семействе

$$(7.1) \quad R_1 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad R_2 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

Здесь [10, 11] $\gamma = 0$ отвечает сфере, $\gamma = -1$ — параболоиду, $\gamma < -1$ — гиперболоидам, а $\gamma > -1$ — эллипсоидам вращения.

С учетом соотношений (7.1), (6.5) и (6.6) получаем при $k = 0$

$$(7.2) \quad \lambda_\theta^{-1} T_s = \mu h \bar{\sigma} \left[\frac{1}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{1/2}} \right]$$

$$\lambda_s^{-1} T_\theta = \mu h \bar{\sigma} \left[\frac{1 - \gamma \sin^2 \varphi}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{1/2}} \right], \quad \bar{\sigma} = \frac{q R_0}{2\mu h}$$

с учетом следующего из формул (6.4) соотношения

$$(7.3) \quad ' \equiv \frac{d}{ds^\circ} = \frac{\lambda_s}{R_1} \frac{d}{d\varphi}$$

находим отсюда ($h = \text{const}$)

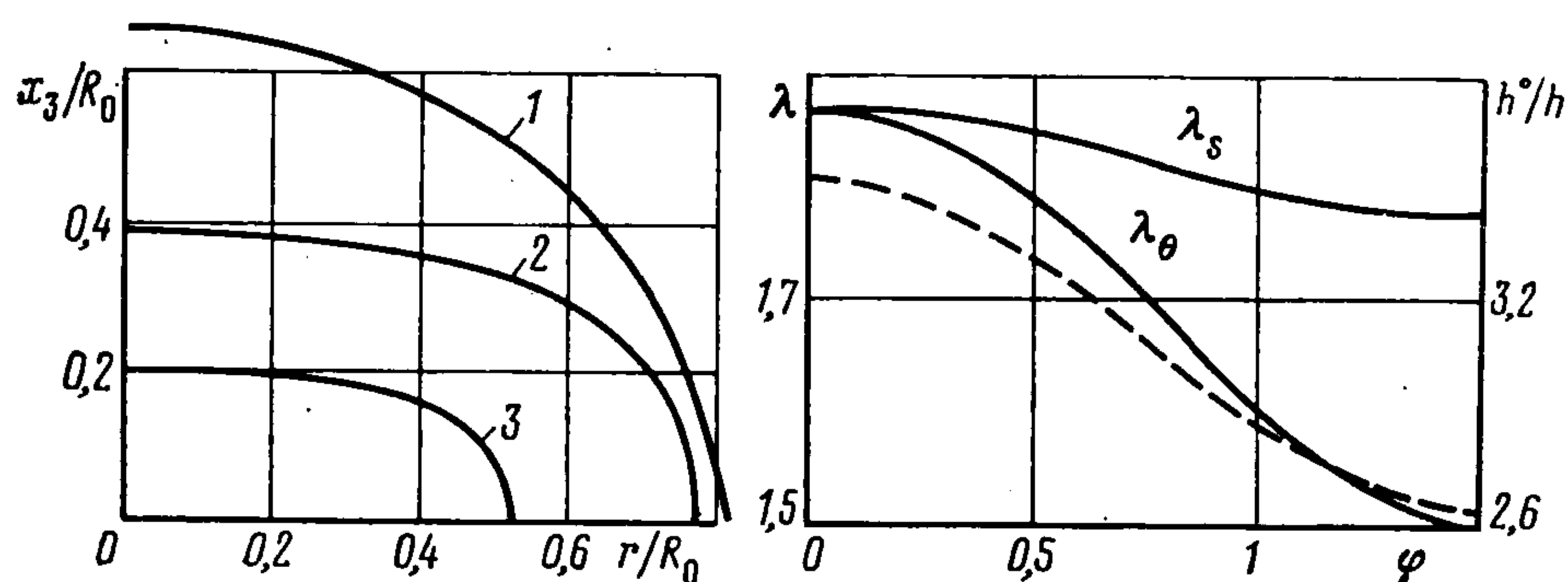
$$(7.4) \quad \begin{aligned} (\lambda_\theta^{-1} T_s)' &= 1/2 q \lambda_s [-\gamma \sin \varphi \cos \varphi] \\ (\lambda_s^{-1} T_\theta)' &= 1/2 q \lambda_s [-\gamma \sin \varphi \cos \varphi (3 + \gamma \sin^2 \varphi)] \end{aligned}$$

Напомним, что полученные в п. 7 соотношения справедливы лишь для двухосных зон при $T_s > 0$, $T_\theta > 0$, т. е. согласно (7.2) при

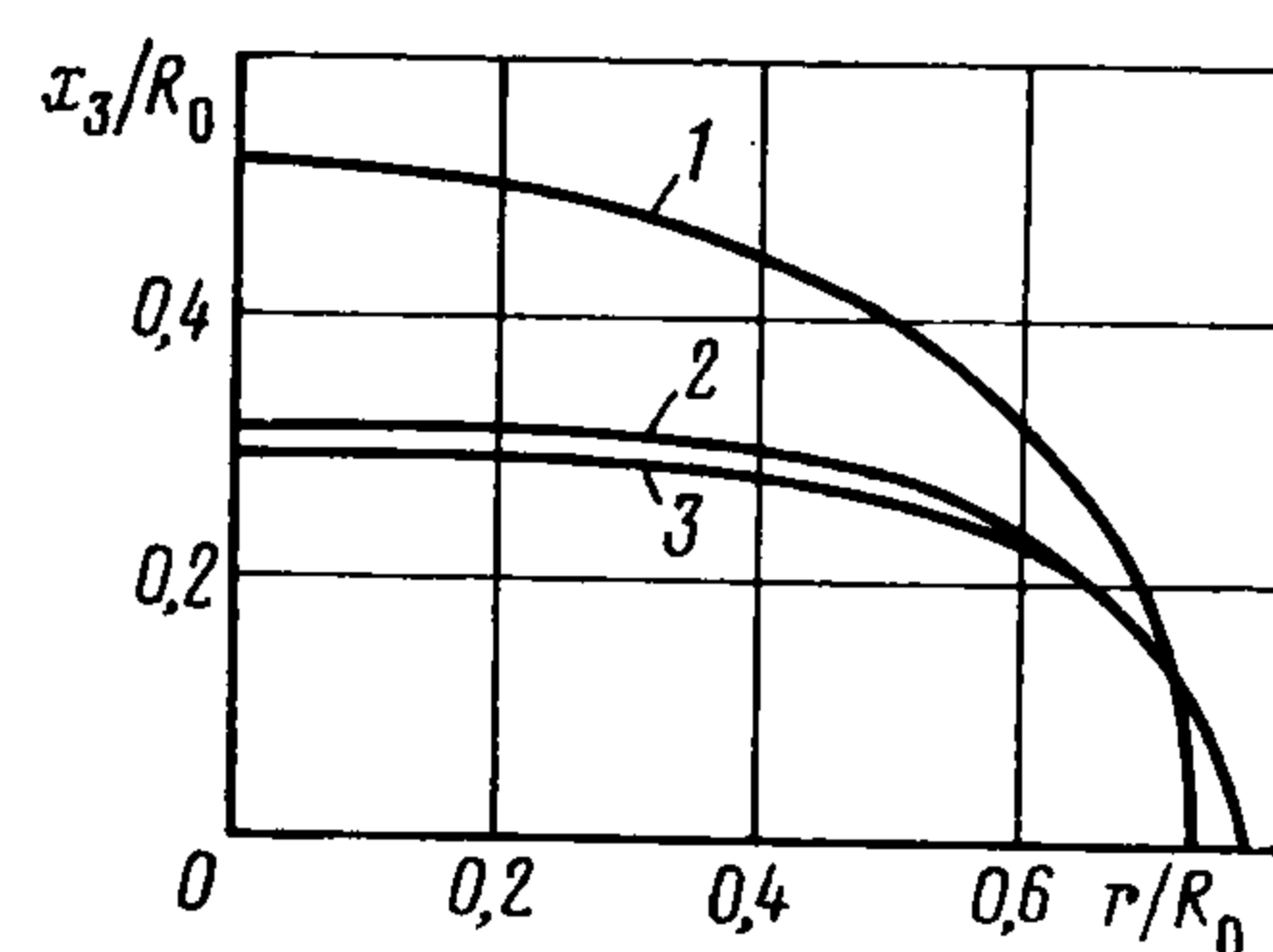
$$(7.5) \quad \varphi < \varphi_*, \quad \sin^2 \varphi_* = \gamma^{-1}$$

Отсюда следует, что условие (7.5) накладывает ограничения лишь на эллиптические оболочки вращения. Если a, b — полуоси эллипса, то $\gamma = (a/b)^2 - 1$ и $\sin \varphi_* = [(a/b)^2 - 1]^{-1/2}$. Отсюда, в частности, следует [1], что эллиптическая оболочка при $b/a > 1/\sqrt{2} \cong 0,7$ или $\gamma < 1$ целиком находится в двухосном напряженном состоянии.

Для потенциала (1.7) при $\beta = 1$ были проведены расчеты. На фиг. 4, а ($\gamma = 0,5$) кривой 1 отвечают раскройные формы: кривая 2 ($n = 2, \bar{\sigma} = 0,89$) и кривая 3 ($n = 4, \bar{\sigma} = 6,18$). На фиг. 4, б показаны распределения величин $\lambda_s, \lambda_\theta$ и (штрихами) h°/h , от-



Фиг. 4



Фиг. 5

вечающих $n = 4$. На фиг. 5 ($\gamma = 0,9$) кривой 1 отвечают раскройные формы: кривая 2 ($n = 2, \bar{\sigma} = 0,45$) и кривая 3 ($n = 4, \bar{\sigma} = 0,51$). Усматривается характерное для достаточно пологих оболочек свойство — укорочение при раздувании.

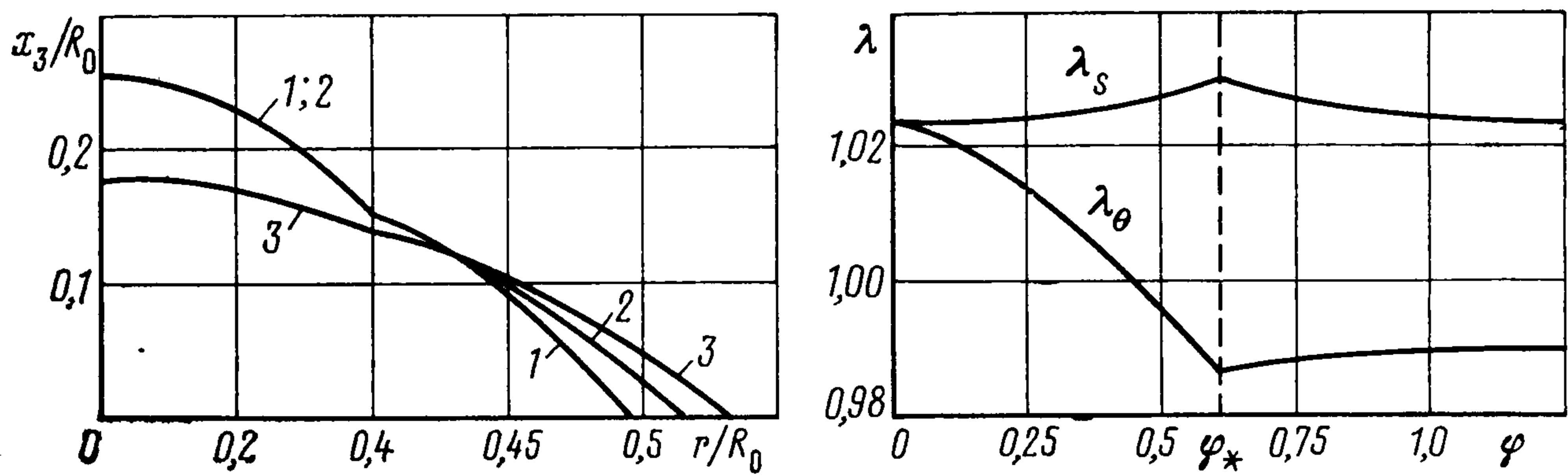
8. При $\gamma > 1$ только часть эллиптической оболочки, удовлетворяющая условию (7.5), находится в двухосном напряженном состоянии. Для дополнения «выбывающей» ее части необходимо добавить одноосную зону (6.12). Примем в качестве условий сопряжения одноосной (индекс минус) и двухосной (индекс плюс) частей следующие очевидные равенства:

$$(8.1) \quad r^+ = r^-, \quad \varphi^+ = \varphi^-, \quad (\lambda_\theta^{-1} T_s)^+ = (\lambda_\theta^{-1} T_s)^-$$

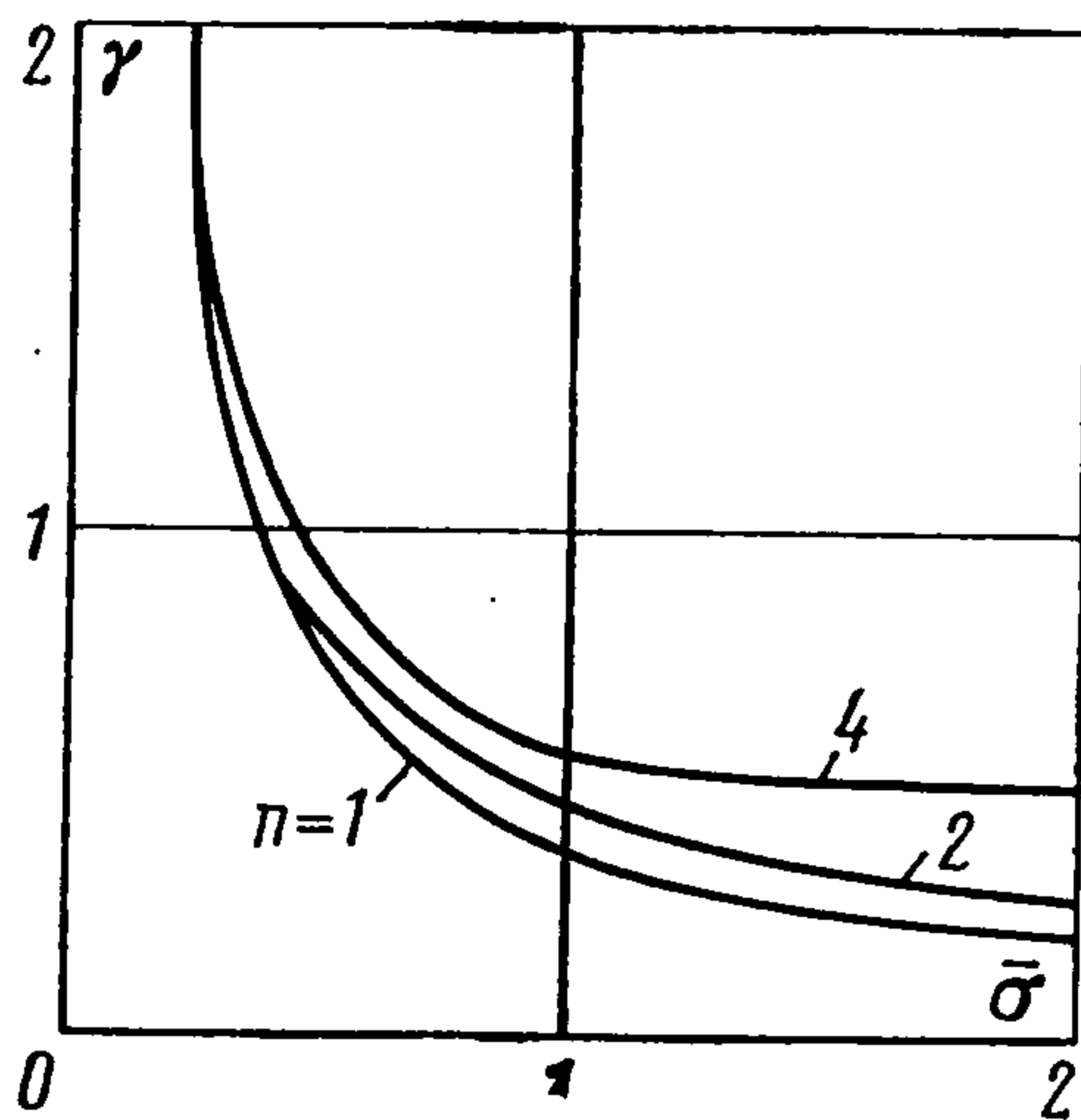
Второе из них обеспечивает отсутствие перерезывающих сил, уравновесить которые в безмоментном состоянии нечем. Третье, при выполнении второго, обеспечивает передачу через линию сопряжения вертикальной осевой силы.

Согласно последнему из выражений (6.3), естественное требование $r^{o+} = r^{o-}$ (обеспечивающее непрерывность раскройной формы) равносильно $\lambda_\theta^+ = \lambda_\theta^-$. Последнее, третье из условий (8.1), дает согласно (6.9) $\lambda_s^+ = \lambda_s^-$ и $(\lambda_s^{-1} T_\theta)^+ = (\lambda_s^{-1} T_\theta)^-$ (при $\mu^+ = \mu^-, h^+ = h^-$). Последнее равенство при учете (7.2) и (6.12) показывает, что сопряжение двухосной и одноосной зон возможно лишь при $\varphi = \varphi_*$ (7.5). При этом из условий сопряжения (8.1) следует $R^{-2} = 0, e = 8\gamma^{1/2} R_0^{-2}$. Таким образом, для одноосной зоны ($S = R_0 \gamma^{-1/4} / \sqrt{8}$)

$$(8.2) \quad \begin{aligned} R_1 &= \frac{S}{\sqrt{\sin \varphi}}, \quad r = R_2 \sin \varphi = 2S \sqrt{\sin \varphi}, \quad x_3 = -S \int_{\varphi_1}^{\varphi} \sqrt{\sin \varphi} d\varphi \\ \lambda_\theta^{-1} T_s &= \frac{qS}{\sqrt{\sin \varphi}}, \quad \lambda_s^{-1} T_\theta = 0, \quad (\lambda_\theta^{-1} T_s)' = -\frac{q\lambda_s}{2} \text{ctg} \varphi, \\ (\lambda_s^{-1} T_\theta)' &= 0 \end{aligned}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Из первых выражений в (7.1) и (8.2) следует $R_1^+ = R_1^-$, т. е. на линии сопряжения непрерывна и кривизна срединной поверхности.

Итак, согласно выражениям (7.2), (7.5) и (8.2)

$$(\lambda_\theta^{-1} T_s)^+ = (\lambda_\theta^{-1} T_s)^- = \mu h \bar{\sigma} / \sqrt{2}, \quad (\lambda_s^{-1} T_\theta)^+ = (\lambda_s^{-1} T_\theta)^- = 0$$

Подстановка выписанных выражений в (6.9) дает

$$\lambda_\theta^+ = \lambda_\theta^- = \lambda_*, \quad \lambda_s^+ = \lambda_s^- = \lambda_*^{-2}, \quad \lambda_*^{-2n} - \lambda_*^n = \bar{\sigma} n / (2 \sqrt{2})$$

Подставляя эти выражения в (6.10), получим на линии сопряжения

$$2\mu h (\lambda_s')^+ = -2\mu h (\lambda_s')^- = q \sqrt{\gamma - 1} \frac{\lambda_*^{n-4}}{\lambda_*^{2n} + 2\lambda_*^{-n}}$$

$$2\mu h (\lambda_\theta')^+ = \frac{q \sqrt{\gamma - 1}}{2} \left[-\frac{3\lambda_*^n + 4\lambda_*^{-2n}}{\lambda_* (\lambda_*^{2n} + 2\lambda_*^{-n})} \right]$$

$$2\mu h (\lambda_\theta')^- = \frac{q \sqrt{\gamma - 1}}{2} \left[\frac{\lambda_*^n}{\lambda_* (\lambda_*^{2n} + 2\lambda_*^{-n})} \right]$$

Таким образом, величины λ_s , λ_θ , непрерывные на линии сопряжения, имеют там разрывные производные. Из соотношений (6.3), (6.8) следует равенство

$$\cos \varphi^\circ = \lambda_s \lambda_\theta^{-1} \cos \varphi + r \lambda_\theta^{-2} \lambda_\theta'$$

из которого видно, что разрывность λ_θ' означает разрывность угла на раскройной форме.

На фиг. 6, а показана оболочка вращения, соответствующая $\gamma = 3$. Кривой 1 отвечает поверхность двухпараметрического семейства (7.1). Кривая 2 отвечает составной оболочке (с двух- и одноосной зонами). На фиг. 6, б видны выявленные выше разрывности λ_θ' и λ_s' на линии сопряжения (пунктирная линия). Составной оболочке 2 отвечает семейство раскройных форм, зависящих от значения параметра $\bar{\sigma}$. При этом, чем больше $\bar{\sigma}$, тем больше раскройная форма отличается от нагруженной. В процессе расчетов обнаружилось наличие предельной формы (кривая 3), отвечающей $\bar{\sigma}_{\max}$ (при больших значениях $\bar{\sigma}$ кратности удлинения λ_s , λ_θ уже не удовлетворяют следующему

из (6.8) неравенству

$$\left| \frac{dr^\circ}{ds^\circ} \right| = \left| \lambda_s \frac{d}{ds} \left(\frac{r}{\lambda_\theta} \right) \right| \leq 1$$

Как подметил Е. П. Колпак, $\bar{\sigma}_{\max}$ отвечает уплощению окрестности полюса раскройной формы. Он же предложил определять $\bar{\sigma}_{\max}$ из условия уплощения ($' = d/ds^\circ$):

$$(8.3) \quad r_0^{\circ\circ} = r_0^{\circ\circ\circ} = 0, \quad \left(\cos \varphi^\circ(s^\circ) - 1 = r_0^{\circ\circ} s^\circ + \frac{1}{2} r_0^{\circ\circ\circ} s^{\circ 2} + \dots \right)$$

Здесь и далее нижним нулевым индексом помечаются значения величин при $\varphi = 0$.

Рассмотрим условие уплощения. Прежде всего из соотношений (7.2), (7.4) и полученных дифференцированием последних с учетом (7.3) и (7.1) имеем

$$\begin{aligned} (\lambda_\theta^{-1} T_s)_0 &= (\lambda_s^{-1} T_\theta)_0 = \mu h \bar{\sigma}, & (\lambda_\theta^{-1} T_s)_0' &= (\lambda_s^{-1} T_\theta)_0' = 0 \\ (\lambda_\theta^{-1} T_s)_0'' &= -\frac{q\gamma (\lambda_s)_0^2}{2R_0}, & (\lambda_s^{-1} T_\theta)_0'' &= -\frac{3q\gamma (\lambda_s)_0^2}{2R_0} \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства, из соотношений (6.9), (6.10) и полученных дифференцированием последних находим

$$(8.4) \quad \lambda_{s0} = \lambda_{\theta 0} = \lambda_0, \quad (\lambda_0^n - \lambda_0^{-2n})/n = 1/2\bar{\sigma}; \quad \lambda_{s0}' = \lambda_{\theta 0}' = 0$$

$$(8.5) \quad \begin{aligned} 2\mu h \lambda_{s0}'' &= -\frac{q\gamma \lambda_0^3}{2R} \left[\frac{\lambda_0^n - 2\lambda_0^{-2n}}{\lambda_0^{2n} + 2\lambda_0^{-n}} \right] \\ 2\mu h \lambda_{\theta 0}'' &= -\frac{q\gamma \lambda_0^3}{2R_0} \left[\frac{3\lambda_0^n + 2\lambda_0^{-2n}}{\lambda_0^{2n} + 2\lambda_0^{-n}} \right] \end{aligned}$$

С учетом третьего из соотношений (6.3), (7.3), (7.1) и (8.4) получаем

$$(8.6) \quad r_0 = 0, \quad r_0' = \lambda_0, \quad r_0'' = 0, \quad r_0''' = \lambda_{s0}'' - \lambda_0^3 R_0^{-2}$$

С учетом первого из соотношений (6.8) и полученных выше находим

$$r_0^\circ = 0, \quad r_0^{\circ\prime} = 1, \quad r_0^{\circ\prime\prime} = 0, \quad r_0^{\circ\prime\prime\prime} = \lambda_0^{-1} [r_0''' - 3\lambda_{\theta 0}']$$

Отсюда и из зависимостей (8.5), (8.6) следует, что первое из условий уплощения (8.3) выполняется тождественно, а второе приводит к уравнению

$$(8.7) \quad 4\bar{\sigma}\gamma = \frac{\lambda_0^{2n} + 2\lambda_0^{-n}}{\lambda_0^n + \lambda_0^{-2n}}$$

определяющее совместно с (8.4) $\bar{\sigma}_{\max}$, отвечающее предельно возможной раскройной форме. На фиг. 7 показаны кривые $\bar{\sigma}_{\max}$ для разных n .

Отметим, что рассмотренное в п. 8 относится к случаю, когда одноосная зона осесимметрична (без складок). Вопрос об устойчивости такого напряженно-деформированного состояния нуждается в специальном рассмотрении.

Авторы благодарят Е. П. Колпака за ценные замечания и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев С. А. Основы теории мягких осесимметричных оболочек. — В кн.: Расчет пространственных конструкций. Вып. 10. М.: Стройиздат, 1965, с. 5—37.
2. Алексеев С. А. Основы теории мягких оболочек. — В кн.: Расчет пространственных конструкций. Вып. 11. М.: Стройиздат, 1967, с. 31—52.
3. Балабух Л. И., Усюкин В. И. Приближенная теория мягких оболочек вращения. — В кн.: Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ростов-на-Дону, 1971. М.: Наука, 1973, с. 230—235.
4. Григорьев А. С. Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 1083—1090.
5. Усюкин В. И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1, с. 70—75.
6. Магула В. Э. Судовые эластичные конструкции. Л.: Судостроение, 1978. 263 с.
7. Магула В. Э. Основные зависимости теории мягких оболочек. — Тр. Николаев. кораблестроит. ин-та, 1973, вып. 78, с. 3—15.
8. Черных К. Ф. Нелинейная теория изотропно-упругих тонких оболочек. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 148—159.
9. Черных К. Ф. Нелинейная теория тонких упругих оболочек из эластомеров. — В кн.: Устойчивость пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981, с. 8—11.
10. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек: Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
11. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ч. I. Л.: Изд-во ЛГУ, 1962. 274 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
26.IV.1984