Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 539.3!

ИЗГИБ, РАСТЯЖЕНИЕ И КРУЧЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А.

Сен-Венаном [1] было установлено, что пространственная задача линейной теории упругости о деформации прямых стержней со свободной от нагрузок боковой поверхностью допускает практически полное исследование: задача о растяжении решается точно (если не принимать во внимание погранслой), а задачи об изгибе и кручении сводятся к задачам Неймана для уравнения Лапласа в области поперечного сечения стержня (см. [2, 3]). Ниже показано, что аналогичная ситуация имеет место для естественно закрученного стержня: пространственную задачу удается свести к задаче типа Неймана для некоторой системы эллиптических уравнений второго порядка на поперечном сечении. Существенно, что это можно сделать для произвольного значения крутки стержня. При нулевой крутке задача на сечении переходит в задачу Сен-Венана. В случае центрально-симметричных сечений задача распадается на две независимые — задачу об изгибе и задачу о растяжении — кручении. Для последней в работе построены вариационные принципы, некоторые двусторонние оценки жесткостей на растяжение и кручение, исследован случай вытянутых сечений.

Задача о растяжении — кручении естественно закрученных стержней рассматривалась ранее в работе [4]. Отличие от данной работы обсуждается в п. 4.

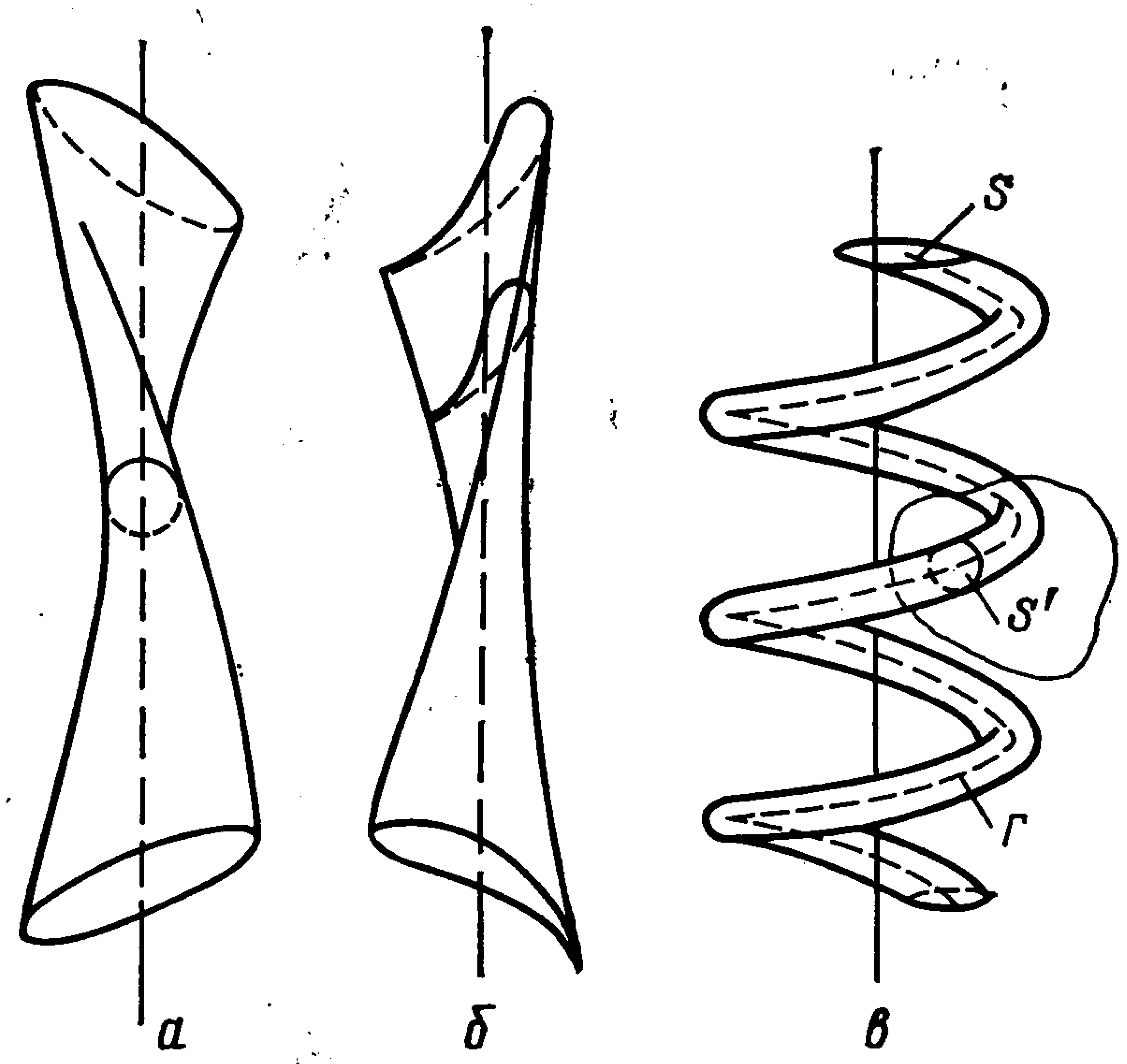
1. Недеформированное состояние. Рассмотрим в трехмерном пространстве, отнесенном к декартовым координатам x^i (латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3), отрезок $0 \leqslant x^3 \leqslant l$, расположенный на оси x^3. Возьмем двумерную область S, расположенную в плоскости $x^3 = 0$, и будем перемещать ее вдоль оси x^3, поворачивая одновременно вокруг оси x^3 на угол $\varphi = \omega x^3$, $\omega = \mathrm{const}$. При этом заметается область V типа областей, изображенных на фиг. 1, *а* — 1, *в*. Фиг. 1, *а* соответствует случаю, когда центр тяжести поперечного сечения лежит на оси; фиг. 1, *б* — когда ось вращения не совпадает с линией центров тяжести сечений, как это имеет место для турбинных лопаток; фиг. 1, *в* — случаю, когда ось вращения не проходит через поперечное сечение. В последнем случае получаются тела типа пружин, при этом, если S — круг, то в сечении пружины плоскостью, перпендикулярной к осевой линии Г, получается эллипс S', т. е. в обычном смысле это будет пружина с эллиптическим сечением. Пружинам с круговым сечением S' отвечает эллиптическая область S.

Упругое тело, занимающее в недеформированном состоянии область V, называют естественно закрученным стержнем, а ω — его круткой.

Введем на оси $x^3 \equiv x$ единичный орторепер из векторов $\boldsymbol{\tau}_1(x)$, $\boldsymbol{\tau}_2(x)$ и $\boldsymbol{\tau}$, вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен по оси x, а векторы $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ вращаются при движении вдоль оси x со скоростью ω. Орторепер $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\tau}$ определен соотношениями

$$\frac{d\tau_\alpha{}^i(x)}{dx} = \omega e_{\alpha\cdot}{}^{\beta}\tau_\beta{}^i(x), \quad \tau_\alpha{}^i\tau_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \tau_i\tau_\alpha{}^i = 0, \quad \tau^i\tau_i = 1 \tag{1.1}$$

Греческие индексы пробегают значения 1, 2; $\tau_\alpha{}^i$, τ^i — компоненты векторов $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ и $\boldsymbol{\tau}$ соответственно, $e_{\alpha\beta}$ — символы Леви-Чивиты ($e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = 1$); по повторяющимся нижнему и верхнему индексам производится суммирование.



Фиг. 1

В переменных x^α, x поперечные сечения $x = \text{const}$ занимают при разных значениях x разные области и удобно ввести новые координаты ξ^α, ξ, в которых область S неподвижна. Они определяются равенствами

$$\xi = x, \quad x^i = \tau^i \xi + \tau_\alpha{}^i(\xi)\,\xi^\alpha \tag{1.2}$$

Координаты ξ^α изменяются в области S, координата ξ — на отрезке $[0, l]$. Координаты ξ^α являются сопутствующими для области S.

Поскольку $\tau_\alpha{}^\beta(\xi)$ — ортогональная матрица, $\tau_\alpha{}^3 = 0$, $\tau^\alpha = 0$, $\tau^3 = 1$, формулы (1.2) можно переписать также в виде $x^\beta = \tau_\alpha{}^\beta(\xi)\,\xi^\alpha$, $x = \xi$. Согласно (1.1), матрица $\tau_\alpha{}^\beta(\xi)$ удовлетворяет соотношению $d\tau_\alpha{}^\beta(\xi)/d\xi = \omega e_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\gamma}\tau_\gamma{}^\beta$. Можно проверить, что справедливы формулы

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi} = \tau^i + \omega e_\alpha^{\cdot\beta}\xi^\alpha \tau_\beta{}^i, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} = \tau_\alpha{}^i \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x^i} = \tau_i, \quad \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} = \tau_i{}^\alpha - \omega e_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}\xi^\beta \tau_i$$

Для произвольной скалярной функции $f(\xi^\alpha, \xi)$ определим оператор дифференцирования D по формуле

$$Df = f_{,\xi} - \omega e_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}\xi^\beta f_{,\alpha} \tag{1.4}$$

Запятой перед индексом α отмечается дифференцирование по ξ^α, запятой перед ξ — дифференцирование по ξ. Оператор D имеет следующий смысл:

$$Df = \partial f/\partial x\,|_{x^\alpha = \text{const}} \tag{1.5}$$

Для доказательства надо воспользоваться последними двумя соотношениями (1.3).

Если в сопутствующих координатах имеется вектор с компонентами f^α, то оператор D определим равенством

$$(Df^\alpha)\,\boldsymbol{\tau}_\alpha = \left.\frac{\partial (f^\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha)}{\partial x}\right|_{x^\alpha = \text{const}} = (f^\alpha_{,\xi} - \omega e_{\beta\cdot}^{\cdot\sigma}\xi^\beta f^\alpha_{,\sigma} + f^\sigma \omega e_{\sigma\cdot}^{\cdot\alpha})\,\boldsymbol{\tau}_\alpha \tag{1.6}$$

Аналогично определение оператора D для тензора второго ранга

$$(Df^{\alpha\beta})\,\boldsymbol{\tau}_\alpha\boldsymbol{\tau}_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial x}(f^{\alpha\beta}\boldsymbol{\tau}_\alpha\boldsymbol{\tau}_\beta)\,|_{x^\alpha = \text{const}} = (f^{\alpha\beta}_{,\xi} - \omega e_{\sigma\cdot}^{\cdot\gamma}\xi^\sigma f^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \omega e_{\sigma\cdot}^{\cdot\alpha} f^{\sigma\beta} + \omega e_{\sigma\cdot}^{\cdot\beta} f^{\alpha\sigma})\,\boldsymbol{\tau}_\alpha\boldsymbol{\tau}_\beta$$

Очевидно, что оператор D обладает свойствами оператора ковариантного дифференцирования:

$$D(fg) = (Df)\, g + f\,(Dg),\ \ D(f^\alpha g_\alpha) = (Df^\alpha)\, g_\alpha + f^\alpha\,(Dg_\alpha)$$

2. Уравнения пространственной задачи теории упругости в сопутствующих координатах. Сведение пространственной задачи теории упругости к некоторой двумерной задаче основано на выборе в качестве искомых функций проекций перемещений w^i на векторы $\boldsymbol{\tau}_\alpha$, $\boldsymbol{\tau}$: $w_\alpha = \tau_\alpha{}^i(x)\, w_i$, $w = \tau^i w_i$. Величины w_α, w ищутся как функции от ξ^α, ξ. Подчеркнем, что w_α и w не являются компонентами перемещений в сопутствующей системе координат ξ^α, ξ, поскольку векторы $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ и $\boldsymbol{\tau}$ совпадают с векторами базиса сопутствующей системы координат только на оси вращения, а вне оси от них отличаются. В некотором смысле такой выбор искомых функций аналогичен выбору искомых функций в задаче об обтекании тела жидкостью, в которой компоненты скорости относительно инерциальной системы отсчета рассматриваются как функции от чужих координат — координат неинерциальной системы, жестко связанной с телом.

Приведем систему уравнений пространственной теории упругости, в которой все функции считаются зависящими от ξ^α, ξ

$$(2.1)\qquad \sigma^{\alpha\beta}_{,\beta} + D\sigma^{\alpha 3} = 0, \qquad \sigma^{\alpha 3}_{,\alpha} + D\sigma^{33} = 0$$

$$(2.2)\qquad \sigma^{\alpha\beta} = \lambda\,(\varepsilon_\gamma{}^\gamma + \varepsilon_{33})\,\delta^{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon^{\alpha\beta}, \qquad \sigma^{\alpha 3} = 2\mu\varepsilon^{\alpha 3}$$

$$\sigma^{33} = \lambda\varepsilon_\gamma{}^\gamma + (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{33}$$

$$(2.3)\qquad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha}, \qquad 2\varepsilon_{\alpha 3} = w_{,\alpha} + Dw_\alpha, \qquad \varepsilon_{33} = Dw$$

$$(2.4)\qquad (\sigma^{\alpha\beta} - \omega e_{\sigma.}^{\cdot\beta}\xi^\sigma\sigma^{\alpha 3})\,\nu_\beta = 0, \quad (\sigma^{\alpha 3} - \omega e_{\sigma.}^{\cdot\alpha}\xi^\sigma\sigma^{33})\,\nu_\alpha = 0 \quad \text{на } \partial S$$

(ν_α — компоненты нормали к границе ∂S области S). Видно, что отличие системы уравнений (2.1)—(2.4) от уравнений теории упругости в декартовых координатах заключается в замене оператора $\partial/\partial x$ на оператор D, и в некотором усложнении краевых условий на ∂S.

3. Уравнения для интегральных характеристик. Определим векторы перерезывающей силы Q_α и изгибающих моментов M_α, крутящий момент M и растягивающее осевое усилие T формулами

$$(3.1)\qquad Q_\alpha = \langle\!\langle \sigma_{\alpha 3} \rangle\!\rangle, \quad M_\alpha = \langle\!\langle \sigma_{33}\xi_\alpha \rangle\!\rangle, \quad M = \langle\!\langle e_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha 3}\xi^\beta \rangle\!\rangle, \quad T = \langle\!\langle \sigma_{33} \rangle\!\rangle$$

($\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle$ — интеграл по сечению S). Выведем уравнения, которым удовлетворяют интегральные характеристики напряженного состояния Q_α, M_α, M, T. Для этого перепишем уравнения равновесия (2.1), учитывая определение оператора D (1.4), (1.6), в виде

$$(3.2)\qquad (\sigma^{\alpha\beta} - \omega e_{\sigma.}^{\cdot\beta}\xi^\sigma\sigma^{\alpha 3})_{,\beta} + \sigma^{\alpha 3}_{,\xi} + \omega e_{\beta.}^{\cdot\alpha}\sigma^{\beta 3} = 0$$

$$(\sigma^{\alpha 3} - \omega e_{\sigma.}^{\cdot\alpha}\xi^\sigma\sigma^{33})_{,\alpha} + \sigma^{33}_{,\xi} = 0$$

Здесь использованы тождества

$$(\omega e_{\sigma.}^{\cdot\beta}\xi^\sigma\sigma^{\alpha 3})_{,\beta} \equiv \omega e_{\sigma.}^{\cdot\beta}\xi^\sigma\sigma^{\alpha 3}_{,\beta}$$

$$(\omega e_{\sigma.}^{\cdot\alpha}\xi^\sigma\sigma^{33})_{,\alpha} \equiv \omega e_{\sigma.}^{\cdot\alpha}\xi^\sigma\sigma^{33}_{,\alpha}$$

Интегрируя уравнения (3.2) по S и используя краевые условия (2.4), имеем

$$(3.3)\qquad DQ_\alpha = 0, \ DT = 0$$

Отметим, что для функций, не зависящих от ξ^α, каковыми и являются интегральные характеристики, оператор D, примененный к скаляру, согласно (1.4), совпадает с производной по ξ, и $DT \equiv \partial T/\partial\xi$, а оператор D, примененный к двумерному вектору, согласно (1.6), имеет вид $DQ_\alpha \equiv \equiv \partial Q_\alpha/\partial\xi + \omega e^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}Q_\sigma$.

Умножим теперь второе уравнение (3.2) на ξ^α и проинтегрируем результат по S. Интегрируя по частям и привлекая краевые условия (2.4), получим уравнения

$$DM_\alpha = Q_\alpha \tag{3.4}$$

Свертывая первое уравнение (3.2) с $e_{\alpha\sigma}\xi^\sigma$ и интегрируя по S, аналогично предыдущему найдем

$$DM = 0 \tag{3.5}$$

Уравнения (3.3)—(3.5) представляют собой уравнения равновесия одномерной теории стержней и означают, что растягивающее усилие и крутящий момент постоянны вдоль оси, перерезывающее усилие постоянно в том смысле, что $\partial\,(Q^\alpha\tau_\alpha)/\partial\xi = 0$, а изгибающие моменты связаны с перерезывающими усилиями уравнением (3.4).

4. Задача о растяжении — кручении. Возможность независимого исследования задачи растяжения — кручения связана со свойствами симметрии поперечного сечения. Из изложенного далее в п. 10 следует, что для стержней с центрально-симметричным поперечным сечением (наряду с каждой точкой ξ^α сечение содержит точку $-\xi^\alpha$) задача об изгибе отделяется от задачи о растяжении — кручении. Будем считать сечение центрально-симметричным и рассмотрим деформацию стержня, при которой перемещения имеют вид

$$w = \gamma\xi + w'(\xi^\alpha), \quad w_\alpha = \Omega\xi e_{\alpha\beta}\xi^\beta + w_\alpha'(\xi^\gamma) \tag{4.1}$$

где γ, Ω — некоторые постоянные, а w' и w_α' — функции от координат поперечного сечения, которые дальше будут отыскиваться. Поскольку функции w, w_α в дальнейших формулах не встречаются, штрих у w', w_α' опускается.

Вычисляя деформации, имеем

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha}, \quad 2\varepsilon_{\alpha3} = \Omega e_{\alpha\beta}\xi^\beta + w_{,\alpha} - \omega e^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}w_\beta - \\ - \omega e^{\cdot\sigma}_{\beta\cdot}\xi^\beta w_{\alpha,\sigma}, \quad \varepsilon_{33} = \gamma - \omega e^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\xi^\beta w_{,\alpha} \tag{4.2}$$

Видно, что деформации не зависят от ξ, поэтому от ξ не будут также зависеть и напряжения. Следовательно, система уравнений будет состоять из уравнений равновесия

$$(\sigma^{\alpha\beta} - \omega e^{\cdot\beta}_{\sigma\cdot}\xi^\sigma\sigma^{\alpha3})_{,\beta} + \omega e^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\sigma^{\beta3} = 0 \\ (\sigma^{\alpha3} - \omega e^{\cdot\alpha}_{\sigma\cdot}\xi^\sigma\sigma^{33})_{,\alpha} = 0 \tag{4.3}$$

уравнений состояния (2.2), кинематических соотношений (4.2) и краевых условий (2.4). Условия интегрируемости задачи (4.3), (2.4) выполняются в силу очевидных равенств $Q^\alpha = \langle\!\langle \sigma^{\alpha3} \rangle\!\rangle = 0$. Если ее переписать в терминах функций w, w_α, то получится система трех уравнений второго порядка в области S с краевыми условиями типа Неймана. При нулевой крутке ω уравнения переходят в соответствующие уравнения задачи Сен-Венана.

Замечание. В работе [4] рассматривалась задача о растяжении — кручении естественно закрученных стержней. В этой работе есть основные соображения о выборе в качестве искомых функций зависимостей проекций перемещений на декартовы оси от сопутствующих координат. Отличие от изложенного выше заключается в выборе формы перемещений. Они брались в виде (ср. с (4.1))

$$w = \gamma\xi + \psi(\xi^\alpha), \quad w_\alpha = \Omega\xi e_{\beta\alpha}\xi^\beta + f(\xi^\gamma)_{,\alpha} - \xi_\alpha\omega(\xi^\gamma)$$

и составлялись уравнения для определения искомых функций ψ, f, ω. В связи с этим уравнения получались более высокого порядка, чем те, которые могут быть получены исходя из (4.1), (4.3). Таким образом, результат п. 4 можно интерпретировать как доказательство возможности понижения порядка системы определяющих уравнений [4].

5. Вариационный принцип. Систему уравнений задачи о растяжении — кручении стержня можно получить как систему уравнений Эйлера для функционала

$$I = \langle\langle U \rangle\rangle \tag{5.1}$$

$$2U = \lambda(\varepsilon_\alpha{}^\alpha + \varepsilon_{33})^2 + 2\mu(\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha3}\varepsilon^{\alpha3} + \varepsilon_{33}{}^2)$$

где компоненты деформаций выражаются через функции w, w_α по формулам (4.2) и минимум ищется по всем функциям w, w_α при фиксированных параметрах γ и Ω. Это утверждение проверяется непосредственным вычислением.

Если исключить твердые движения условиями

$$\langle\langle w \rangle\rangle = 0, \ \langle\langle e_{\alpha\beta} w^\alpha \xi^\beta \rangle\rangle = 0$$

то функционал (5.1) становится строго выпуклым и можно утверждать, что решение сформулированной задачи существует и единственно.

Нижняя грань функционала $\underline{I}$ является квадратичной формой по параметрам γ, Ω

$$\underline{I} = {}^1/_2\,(\bar{E}\gamma^2 + 2B\gamma\Omega + C\Omega^2) \tag{5.2}$$

Справедливы формулы

$$T = \partial\underline{I}/\partial\gamma = \bar{E}\gamma + B\Omega, \ M = \partial\underline{I}/\partial\Omega = B\gamma + C\Omega \tag{5.3}$$

Поэтому коэффициент $\bar{E}$ имеет смысл эффективного модуля Юнга, коэффициент C — жесткости стержня на кручение, коэффициент B описывает перекрестный эффект возникновения растягивающих усилий при кручении и крутящего момента при растяжении.

Докажем формулу (5.3). Дадим произвольные приращения $\delta\gamma$, $\delta\Omega$ параметрам γ и Ω. При этом минимизирующие функции w° и $w_\alpha{}^\circ$ также получат некоторые приращения δw°, $\delta w_\alpha{}^\circ$. Изменение минимального значения функционала $\delta\underline{I}$ будет равно

$$\delta\underline{I} = \langle\langle \sigma^{\alpha3} e_{\alpha\beta}\xi^\beta\delta\Omega + \sigma^{33}\delta\gamma \rangle\rangle = M\delta\Omega + T\delta\gamma \tag{5.4}$$

Слагаемые, содержащие δw° и $\delta w_\alpha{}^\circ$, аннулируются в силу уравнений Эйлера функционала $\underline{I}$. Из (5.4) и (5.2) следует (5.3).

6. Двойственный вариационный принцип и функции напряжений. Двойственный вариационный принцип формулируется следующим образом:

$$\underline{I} = \sup\,[\langle\langle \sigma^{\alpha3} e_{\alpha\beta}\xi^\beta \rangle\rangle\,\Omega + \langle\langle \sigma^{33} \rangle\rangle\,\gamma - \langle\langle U^* \rangle\rangle] \tag{6.1}$$

$$U^* = [(1+\nu)(\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + 2\sigma^{\alpha3}\sigma_{\alpha3} + (\sigma^{33})^2) - \nu(\sigma_\alpha{}^\alpha + \sigma^{33})^2]/(2E)$$

Здесь верхняя грань ищется по всем функциям $\sigma^{\alpha\beta}$, $\sigma^{\alpha3}$, σ^{33}, удовлетворяющим уравнениям равновесия (4.3) и краевым условиям (2.4). Он строится по общему правилу ([5], § 3, гл. II).

Построим общее решение уравнений (4.3), вводя соответствующие функции напряжений. Второе уравнение (4.3) означает, что существует функция χ, такая, что имеет место равенство

$$\sigma^{\alpha3} - \omega e_{\sigma\cdot}^{\cdot\alpha}\xi^\sigma\sigma^{33} = e^{\alpha\beta}\chi_{,\beta} \tag{6.2}$$

Величина σ^{33} не входит в первое уравнение (4.3), поэтому можно считать σ^{33} и χ произвольными функциями, при этом равенства (6.2) выражают величины $\sigma^{\alpha 3}$ через σ^{33} и χ.

Рассмотрим выражение $\omega e_{\beta}^{\cdot\alpha}\sigma^{\beta 3}$, входящее в первое уравнение (4.3). Согласно (6.2), его можно переписать в виде

$$(6.3)\qquad \omega e_{\beta}^{\cdot\alpha}\sigma^{\beta 3} = \omega\chi,^{\alpha} - \omega^2\xi^{\alpha}\sigma^{33}$$

Не ограничивая общности, функцию σ^{33} можно представить в форме

$$(6.4)\qquad \sigma^{33} = 3\psi + \xi^{\nu}\psi_{,\nu}$$

Действительно, в полярной системе координат r, θ равенство (6.4) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение $3\psi + r\partial\psi/\partial r = \sigma^{33}$, позволяющее вычислить ψ по σ^{33}.

Непосредственной подстановкой проверяется, что равенство (6.3) после подстановки в него (6.4) переходит в равенство

$$(6.5)\qquad \omega e_{\beta}^{\cdot\alpha}\sigma^{\beta 3} = (\omega\chi\delta^{\alpha\beta} - \omega^2\psi\xi^{\alpha}\xi^{\beta})_{,\beta}$$

В силу (6.5) первое уравнение равновесия (4.3) приобретает форму

$$(6.6)\qquad (\sigma^{\alpha\beta} - \omega e_{\sigma}^{\cdot\beta}\xi^{\sigma}\sigma^{\alpha 3} + \omega\chi\delta^{\alpha\beta} - \omega^2\psi\xi^{\alpha}\xi^{\beta})_{,\beta} = 0$$

Уравнение (6.6) означает, что существуют функции φ^{α}, такие, что

$$(6.7)\qquad \sigma^{\alpha\beta} - \omega e_{\sigma}^{\cdot\beta}\xi^{\sigma}\sigma^{\alpha 3} + \omega\chi\delta^{\alpha\beta} - \omega^2\psi\xi^{\alpha}\xi^{\beta} = e^{\beta\lambda}\varphi^{\alpha}_{,\lambda}$$

Осталось удовлетворить условию симметрии тензора $\sigma^{\alpha\beta}$ по α, β, которое получается свертыванием равенства (6.7) с $e^{\alpha\beta}$

$$(6.8)\qquad \omega\xi_{\alpha}\sigma^{\alpha 3} = \varphi^{\alpha}_{,\alpha} = \omega\xi_{\alpha}e^{\alpha\beta}\chi_{,\beta} = (\omega e^{\alpha\beta}\xi_{\alpha}\chi)_{,\beta}$$

Здесь использовано соотношение (6.2). Формула (6.8) означает, что вектор $\varphi^{\alpha} + \omega e^{\alpha\beta}\xi_{\beta}\chi$ имеет нулевую дивергенцию, т. е. существует функция φ, такая, что

$$(6.9)\qquad \varphi^{\alpha} + \omega e^{\alpha\beta}\xi_{\beta}\chi = e^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta}$$

Итак, общее решение уравнений равновесия выражается через три функции φ, ψ и χ по формулам

$$(6.10)\qquad \begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta} &= e^{\alpha\mu}e^{\beta\lambda}\varphi_{,\mu\lambda} + \omega\,[e_{\sigma}^{\cdot\beta}\xi^{\sigma}e^{\alpha\lambda}\chi_{,\lambda} + e^{\sigma\alpha}\xi_{\sigma}e^{\beta\lambda}\chi_{,\lambda} - 2\delta^{\alpha\beta}\chi] + \\ &+ \omega^2\,[e_{\lambda}^{\cdot\beta}e_{\mu}^{\cdot\alpha}\xi^{\lambda}\xi^{\mu}(3\psi + \xi^{\nu}\psi_{,\nu}) + \psi\xi^{\alpha}\xi^{\beta}] \\ \sigma^{\alpha 3} &= e^{\alpha\beta}\chi_{,\beta} + \omega e_{\sigma}^{\cdot\alpha}\xi^{\sigma}(3\psi + \xi^{\nu}\psi_{,\nu}) \\ \sigma^{33} &= 3\psi + \xi^{\nu}\psi_{,\nu} \end{aligned}$$

Функция φ представляет аналог функции Эри, а функция χ — функции кручения.

Определим, какой произвол остается в функциях напряжений при фиксированном напряженном состоянии. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай нулевого напряженного состояния. Полагая $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha 3} = \sigma^{33} = 0$, получим

$$\chi_{,\alpha} = 0, \quad 3\psi + \xi^{\nu}\psi_{,\nu} = 0, \quad e^{\alpha\mu}e^{\beta\lambda}\varphi_{,\mu\lambda} - 2\omega\chi\delta^{\alpha\beta} + \omega^2\psi\xi^{\alpha}\xi^{\beta} = 0$$

Из первого уравнения следует, что $\chi = c = \mathrm{const}$. Второе уравнение интегрируется в полярных координатах: $\psi = a(\theta)\,r^{-3}$. Будем считать, что начало координат лежит в области S и рассматриваемые функции напряжений не имеют особенностей в S. Тогда $\psi \equiv 0$ и третье уравнение дает $\varphi = \mathrm{const} + c_{\alpha}\xi^{\alpha} + \omega c\xi_{\alpha}\xi^{\alpha}$, где c_{α} — постоянные. Итак, функция χ определена с точностью до постоянной c, функция φ — с точностью до линейной функции и слагаемого $\omega c\xi_\alpha\xi^\alpha$, а функция ψ произволов не содержит.

Функция χ, согласно (6.2) и второму краевому условию (2.4), постоянна на ∂S. Функция φ, согласно (6.7), (6.9) и первому краевому условию (2.4), на границе области S удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{ds}(e^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta} - \omega e^{\alpha\beta}\xi_\beta\chi) = \omega\chi\nu^\alpha - \omega^2\psi\xi^\alpha\xi_\beta\nu^\beta \tag{6.11}$$

Здесь s — длина дуги вдоль ∂S, и принято, что при движении вдоль ∂S по направлению касательного вектора $\tau^\alpha = d\xi^\alpha/ds$ область S остается слева, а вектор нормали ν^α направлен вне S, так что $\nu^\alpha = e^{\alpha}_{\cdot\beta}\tau^\beta$, $\tau^\lambda = e^{\beta\lambda}\nu_\beta$.

В односвязной области функцию χ можно считать равной нулю на ∂S, поэтому связь между φ и ψ (6.11) приобретает вид

$$\frac{d}{ds}(e^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta}) = -\omega^2\psi\xi^\alpha\xi_\beta\nu^\beta \tag{6.12}$$

Рассмотрим функционал в (6.1) как функционал от функций φ, ψ и χ, который получается подстановкой в (6.1) вместо компонент тензора напряжений выражений (6.10). Двойственный вариационный принцип в функциях напряжений формулируется следующим образом: истинное напряженное состояние доставляет максимум функционалу в (6.1), на множестве функций φ, ψ, χ, удовлетворяющих ограничению (6.11) и условию $\chi = \mathrm{const}$ на ∂S. Для односвязной области их можно заменить на (6.12) и условие $\chi = 0$ на ∂S.

7. Некоторые оценки. Самая грубая оценка эффективных жесткостей получается, если положить $w = w_\alpha = 0$. Из (5.1), (5.2) и (4.2) имеем

$$^1/_2\,(\bar{E}\gamma^2 + 2B\gamma\Omega + C\Omega^2) \leqslant {}^1/_2\,[(\lambda + 2\mu)\,|\,S\,|\,\gamma^2 + \mu I_\alpha{}^\alpha\Omega^2]$$

Здесь через $I^{\alpha\beta} = \langle\langle\xi^\alpha\xi^\beta\rangle\rangle$ обозначен тензор инерции поперечного сечения, $|\,S\,|$ — площадь области S. Более точная оценка получается, если положить $w_\alpha = a\xi_\alpha$, $w = {}^1/_2 b_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$, а неизвестные коэффициенты a и $b_{\alpha\beta}$ искать из условия минимума функционала (5.1). Тогда из (5.1), (5.2) и (4.2) найдем

$$\begin{aligned}
&^1/_2\,(\bar{E}\gamma^2 + 2B\gamma\Omega + C\Omega^2) \leqslant {}^1/_2\,(\bar{E}^+\gamma^2 + 2B^+\gamma\Omega + C^+\Omega^2)\\
&\bar{E}^+ = E\,[\,|\,S\,| - 2\,(1+\nu)\,\omega^2\,(I_1 - I_2)^2/\Delta]\\
&B^+ = -E\omega\,(I_1 - I_2)^2/\Delta\\
&C^+ = \mu\,[I_\alpha{}^\alpha - (I_1 - I_2)^2/\Delta],\ I_1 = I^{11},\ I_2 = I^{22}\\
&\Delta = I_1 + I_2 + \omega^2\,[(2 + \lambda/\mu)\,\langle\langle(\xi_1{}^2 - \xi_2{}^2)^2\rangle\rangle -\\
&- 4\nu^2\,(I_1 - I_2)^2/((1 - 2\nu)\,|\,S\,|\,)]
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Если стержень не закручен ($\omega = 0$), то, как нетрудно убедиться, $B = 0$, а неравенство (7.1) переходит в оценки $\bar{E} \leqslant E\,|\,S\,|$, $C \leqslant 4\mu I_1 I_2/(I_1 + I_2)$. Первая из них дает точное значение продольной жесткости для незакрученного стержня, а вторая представляет неравенство Е. Л. Николаи [6].

Если крутка ω отлична от нуля, то неравенство (7.1) сводится к трем оценкам

$$\bar{E} \leqslant \bar{E}^+,\quad (B^+ - B)^2 \leqslant (C^+ - C)\,(\bar{E}^+ - E),\quad C \leqslant C^+ \tag{7.2}$$

Величина Δ в формулах (7.1) неотрицательна, поэтому $\bar{E}^+$ уменьшается с ростом крутки. Следовательно, согласно (7.2), эффективный модуль Юнга закрученного стержня с произвольным поперечным сечением меньше, чем у незакрученного стержня с таким же поперечным сечением. В пределе при

$\omega \to \infty$ величина $\bar{E}^+$ выходит на значение

$$E\,|\,S\,|\,[1 - (1 + \nu)(1 - 2\nu)(\varkappa - 2\nu^2)^{-1}],$$
$$\varkappa = (1 - \nu)\,|\,S\,|\,\langle\langle(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2\rangle\rangle(I_1 - I_2)^{-2}$$

Второе неравенство оценивает амплитуду перекрестного эффекта. Третье представляет обобщение неравенства Е. Л. Николаи на естественно закрученные стержни.

Приведем значения $\bar{E}^+$, B^+, C^+ для эллиптических сечений $(\xi_1^2/a^2 + \xi_2^2/b^2 \leqslant 1)$ с отношением полуосей $c = b/a$

(7.3) $$\bar{E}^+ = E\pi ab\,[1 - \bar{\omega}^2(1 + \nu)(1 - c^2)^2/(2(1 + c^2 + \bar{\omega}^2\alpha))]$$
$$B^+ = -E\omega\pi ba^3(1 - c^2)^2/(4(1 + c^2 + \bar{\omega}^2\alpha))$$
$$C^+ = \mu\pi ba^3\,[c^2 + \bar{\omega}^2(1 + c^2)\,\alpha/4]/(1 + c^2 + \bar{\omega}^2\alpha)$$
$$\bar{\omega} = a\omega, \quad \alpha = [(1 - \nu - \nu^2)(1 + c^4) - {}^2/_3c^2(1 - \nu - 3\nu^2)]/(1 - 2\nu)$$

Оценки (7.2) справедливы для стержней с произвольным центрально-симметричным сечением. Для того чтобы охарактеризовать погрешность этих оценок, построим оценки эффективных характеристик снизу в случае эллиптического сечения. Положим $\chi = A\,(\xi_1^2/a^2 + \xi_2^2/b^2 - 1)$, $\varphi = {}^1/_2\,(B_1\xi_1^2 + B_2\xi_2^2)$, A, B_1, B_2 — постоянные. Тогда краевое условие для χ удовлетворено, а краевое условие (6.12) принимает вид

(7.4) $$(B_2/a^2 + \omega^2\psi)\,\xi_1 = 0, \quad (B_1/b^2 + \omega^2\psi)\,\xi_2 = 0$$

Возьмем для функции ψ простейшее выражение: $\psi = B/\omega^2$. Условие (7.4) будет выполнено, если положить $B_1 = -Bb^2$, $B_2 = -Ba^2$. Постоянные A и B выберем из условия максимума функционала (6.1). Из (6.10), (6.1) получим

(7.5) $${}^1/_2\,(\bar{E}^-\gamma^2 + 2B^-\gamma\Omega + C^-\Omega^2) \leqslant {}^1/_2\,(\bar{E}\gamma^2 + 2B\gamma\Omega + C\Omega^2)$$
$$\bar{E}^- = E_0, \; E_0 = E\,|\,S\,|\,[1 - \bar{\omega}^2(1 + \nu)(1 - c^2)^2/(2(1 + c^2))]$$
$$B^- = -E\omega\pi ba^3(1 - c^2)^2/(4(1 + c^2))$$
$$C^- = \mu\frac{\pi ba^3c^2}{1 + c^2}\{1 + \bar{\omega}^2[3(1 + \nu)^2(1 - c^2)^4 - 8(1 + \nu)c^2(1 + c^4) - 8(38 + 22\nu)c^4][48(1 + \nu)c^2(1 + c^2)]^{-1}\}$$

Выражения для $\bar{E}^-$, B^-, C^- приведены в случае малых круток $\bar{\omega}$ (слагаемые, содержащие $\bar{\omega}^3$ и более высокие степени $\bar{\omega}$ опущены) и $c \lesssim 1$. Из сравнения формул (7.3) и (7.5) видно, что при малых $\bar{\omega}$ для стержней с эллиптическим сечением верхняя и нижняя оценки эффективного модуля Юнга сходятся и определяют его точное значение: $\bar{E} = \bar{E}^+ = \bar{E}^- = E_0$. Отличие эффективного модуля Юнга закрученного и незакрученного стержня характеризуются следующими числами: при $\bar{\omega} = 0{,}5$, $c = 0{,}1$, $\nu = 0{,}3$ эффективный модуль Юнга у закрученного стержня меньше на 16%.

Выражения для C^+ и C^- не совпадают в случае малых круток. Это указывает на то, что выбранные допустимые поля достаточно хороши для аппроксимации напряженного состояния, вызванного растяжением, и неудовлетворительны при описании кручения.

Перекрестные коэффициенты в нижней и верхней оценках B^- и B^+ в пределе малых круток совпадают, однако из-за различия C^- и C^+ это не позволяет указать точное значение B.

Случаи, когда задача содержит малые параметры — малую крутку или малую толщину поперечного сечения (вытянутое сечение) — допускают полное асимптотическое исследование.

Рассмотрим здесь случай стержней с вытянутыми сечениями, который часто встречается в технических приложениях (см. [7]).

8. **Вытянутые сечения.** Рассмотрим стержни с поперечными сечениями, для которых координатные оси являются осями симметрии. Будем считать, что часть границы ∂S с $\xi_2 \geqslant 0$ однозначно проектируется на ось ξ_1 и ее уравнение может быть записано в виде $\xi_2 = h(\xi_1)$, $|\xi_1| \leqslant a$. Обозначим через b максимальное значение h. По условию, h — четная функция ξ_1, мало меняющаяся на расстояниях порядка b, и $b \ll a$.

Проведем асимптотический анализ функционала (5.1). Перепишем плотность упругой энергии в виде

$$2U = E\varepsilon_{33}^2 + E^{\alpha\beta\gamma\delta}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \nu\varepsilon_{33}\delta_{\alpha\beta})(\varepsilon_{\gamma\delta} + \nu\varepsilon_{33}\delta_{\gamma\delta}) + 4\mu\varepsilon_{\alpha3}\varepsilon^{\alpha3} \tag{8.1}$$

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \mu(\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\beta\gamma}\delta^{\alpha\delta})$$

Заменим в (8.1) деформации их выражениями через перемещения (4.2) и введем вместо w_α новые искомые функции v_α по формуле $w_\alpha = -\nu\gamma\xi_\alpha + v_\alpha$. Получим

$$\begin{aligned}2U = {} & E(\gamma - \omega\xi_1 w_{,2} + \underline{\omega\xi_2 w_{,1}})^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}\omega^2(\xi_1 w_{,2} - \underline{\xi_2 w_{,1}})^2 + \\ & + \lambda(v_{1,1} + v_{2,2})^2 + 2\mu\left(\underline{v_{1,1}^2} + v_{2,2}^2 + \frac{1}{2}v_{1,2}^2 + \underline{\frac{1}{2}v_{2,1}^2 + v_{1,2}v_{2,1}}\right) - \\ & - 2\lambda\omega(v_{1,1} + v_{2,2})\cdot(\xi_1 w_{,2} - \underline{\xi_2 w_{,1}}) + \mu(w_{,1} + \xi_2\Omega - \omega v_2 - \omega\xi_1 v_{1,2} + \\ & + \underline{\omega\xi_2 v_{1,1}})^2 + \mu(w_{,2} - \xi_1\Omega + \omega v_1 - w\xi_1 v_{2,2} + \underline{\omega\xi_2 v_{2,1}})^2\end{aligned} \tag{8.2}$$

Из этого выражения видно, что минимизирующие функции w и v_2 являются нечетными функциями ξ_2 (и, следовательно, равны нулю при $\xi_2 = 0$), а v_1 — четной функцией ξ_2. Доказательство проводится так же, как доказательство аналогичного утверждения в работе [8].

Будем считать, что крутка не мала и $a\omega \sim 1$. Найдем порядки искомых функций. Очевидно, что коэффициент Пуассона при определении порядков функций несуществен, поэтому можно считать $\lambda = 0$.

Если $\gamma = \Omega = 0$, то и минимизирующие функции функционала $\langle\langle U\rangle\rangle$ равны нулю. Отличие решения от нуля порождается перекрестными членами между γ, Ω и искомыми функциями. Поэтому грубая прикидка порядков сводится к сохранению в функционале только главных членов по искомым функциям и главных перекрестных членов. При выделении главных членов будем считать, что производные искомых функций по ξ_2 гораздо больше производных по ξ_1. По этой причине все подчеркнутые слагаемые в (8.2) можно отбросить, как малые по сравнению с предшествующими слагаемыми. Сохраняя в U главные члены, получим

$$\begin{aligned}2U_0 = {} & -2E\omega\gamma\xi_1 w_{,2} + 2\mu\left(v_{2,2}^2 + \frac{1}{2}v_{1,2}^2\right) + \mu(-2\omega\xi_2\Omega v_2 - 2\xi_2\omega\Omega\xi_1 v_{1,2}) + \\ & + \mu(w_{,2}^2 - 2w_{,2}\xi_1\Omega - 2\xi_1\omega\Omega v_1 + 2\omega\Omega\xi_1^2 v_{2,2})\end{aligned} \tag{8.3}$$

Здесь все перекрестные члены между искомыми функциями опущены, так как производится грубая оценка порядков, кроме того, опущены слагаемые $E\omega^2\xi_1^2 w_{,2}^2$ и $\mu\omega^2\xi_1^2 v_{1,2}^2$, которые имеют такой же вид, как сохраненные члены $\mu w_{,2}^2$ и $\mu v_{1,2}^2$, и не влияют на порядки искомых функций. Минимизируя упрощенный функционал $\langle\langle U_0\rangle\rangle$ по w и v_2, находим (при этом надо учесть, что $w = v_2 = 0$ при $\xi_2 = 0$)

$$w \sim ab(\Omega + \omega\gamma), \quad v_2 \sim a^2 b\omega\Omega \tag{8.4}$$

Однако задача о минимуме функционала $\langle\langle U_0\rangle\rangle$ по v_1 оказывается некорректной: сдвиги по v_1 на постоянную могут увести значение функционала в $-\infty$. Поэтому следует несколько изменить исходное предположение о характере поведения v_1. Выделим из функции v_1 постоянную по ξ_2 составляющую. Без ограничения общности можно написать $v_1 = u(\xi_1) + v(\xi_1, \xi_2)$, где функция v удовлетворяет условию: $\langle v\rangle = 0$ ($\langle\cdot\rangle$ — интеграл по ξ_2 в пределах $[-b, b]$). Будем считать, что $|v_{,2}| \gg v_1$, и, фиксируя $u(\xi_1)$, найдем порядок v. Главный член по v будет $\mu v_{,2}^2$, главный перекрестный член между v и Ω: $-2\mu\omega\Omega\xi_1\xi_2 v_{,2}$, перекрестный член $\langle\langle 2\mu\omega\Omega\mu_1 v\rangle\rangle$ равен нулю в силу условия $\langle v\rangle = 0$. Задача об отыскании v теперь корректна и показывает, что $v \sim ab^2\omega\Omega$.

Значение функционала при $w = v_\alpha = 0$ имеет порядок $\mu(\gamma^2 + a^2\Omega^2)ab$. Ясно, что это — максимально возможный порядок любого из слагаемых энергии. Припишем $u_{,1}$ максимально возможный порядок $\gamma + a\Omega$, а u — порядок $(\gamma + a\Omega)a$ и выделим, пользуясь приведенными оценками, главные члены в энергии (8.2). Оставляя только главные члены, получим

$$2U = E\,(\gamma - \omega\xi_1 w_{,\,2})^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}\,\omega^2\xi_1^2 w_{,\,2}^2 + \lambda\,(u_{,\,1} + v_{2,\,2})^2 + 2\mu\,(u_{,\,1}^2 + v_{2,\,2}^2) - 2\lambda\omega\,(u_{,\,1} + v_{2,\,2})\,\xi_1 w_{,\,2} + \mu\,(w_{,\,2} - \xi_1\Omega + \omega u - \omega\xi_1 v_{2,\,2})^2 \tag{8.5}$$

Все слагаемые в энергии имеют порядок $\mu\,(\gamma + a\Omega)^2$ (при $a\omega \sim 1$), а все отброшенные слагаемые — более высокий порядок малости. Таким образом, формула (8.5) дает значение энергии в первом приближении.

Энергия зависит от функций w и v_2 только через производные $w_{,2}$ и $v_{2,2}$. Поэтому можно выбрать $w_{,2}$ и $w_{2,2}$ за новые независимые искомые функции. Тогда минимизация «U» по w и v_2 сводится к алгебраической задаче минимизации квадратичной формы (8.5) по аргументам $w_{,2}$ и $v_{2,2}$. Минимум достигается на функциях

$$v_2 = -D^{-1}\Big[\mu\omega\Omega\xi_1^2 + \lambda u_{,\,1} - \mu\omega^2\xi_1 u - \frac{1}{A}\,(\lambda^2\omega^2\xi_1^2 u_{,\,1} + (\lambda+\mu)\,\omega\xi_1^2\,(\mu\Omega + \omega E\gamma) - \lambda\mu\omega^2\xi_1\,(u - \xi_1 u_{,\,1}) - \mu^2\omega^2\xi_1 u\Big]\,\xi_2$$

$$w = A^{-1}\,[\mu\xi_1\Omega + E\omega\xi_1\gamma + \lambda\omega\xi_1\,(u_{,1} + v_{2,2}) + \mu\omega\xi_1 v_{2,2} - \mu\omega u]\,\xi_2$$

$$D = \lambda + 2\mu + [\mu - (\lambda+\mu)^2/A]\,\omega^2\xi_1^2,\quad A = \mu + [E + \lambda^2/(\lambda+\mu)]\omega^2\xi_1^2$$

При этом энергия становится функционалом от u

$$«U» = \int_{-a}^{a}(\alpha u_{,\,1}^2 - 2\beta u_{,\,1} + \delta u^2 - 2\varepsilon u + 2\eta u u_{,\,1})\,h(\xi_1)\,d\xi_1 + \int_{-a}^{a}\Big[E\gamma^2 + \mu\xi_1^2\Omega - \frac{1}{A}\,(\mu\Omega + E\omega\gamma)^2\,\xi_1^2 - \frac{1}{D}\Big(\mu\omega\xi_1^2\Omega - \frac{\lambda+\mu}{A}\,\omega\xi_1^2\,(\mu\Omega + E\omega\gamma)\Big)^2\Big]\,h(\xi_1)\,d\xi_1 \tag{8.6}$$

$$\alpha = \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{A}\,\omega^2\xi_1^2 - \frac{\lambda^2}{D}\Big(1 - \frac{\lambda+\mu}{A}\,\omega^2\xi_1^2\Big)^2$$

$$\beta = \frac{\lambda}{A}\,(\mu\Omega + E\omega\gamma)\,\omega\xi_1^2 + \frac{\lambda}{D}\Big[\mu\Omega - \frac{\lambda+\mu}{A}\,(\mu\Omega + E\omega\gamma)\Big]\Big(1 - \frac{\lambda+\mu}{A}\,\omega^2\xi_1^2\Big)\,\omega\xi_1^2$$

$$\delta = \mu\omega^2\Big[1 - \frac{\mu}{A} - \frac{\mu}{D}\,\omega^2\Big(1 - \frac{\lambda+\mu}{A}\Big)^2\,\xi_1^2\Big]$$

$$\varepsilon = \mu\omega\xi_1\Omega - \frac{\mu}{A}\,\omega\xi_1\,(\mu\Omega + E\omega\gamma) - \frac{\mu}{D}\Big[\mu\Omega - \frac{\lambda+\mu}{A}\,(\mu\Omega + E\omega\gamma)\Big]\Big(1 - \frac{\lambda+\mu}{A}\Big)\,\omega^3\xi_1^3$$

$$\eta = \mu\omega^2\xi_1\Big[\frac{\lambda}{A} + \frac{\lambda}{D}\Big(1 - \frac{\lambda+\mu}{A}\,\omega^2\xi_1^2\Big)\Big(1 - \frac{\lambda+\mu}{A}\Big)$$

Эта задача сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и в общем случае является машинной.

9. Стержни с вытянутыми эллиптическими сечениями. Пусть $h(\xi_1) = \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2}$. Введем вместо переменной ξ_1 переменную x по формуле $\xi_1 = a\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и определим безразмерные перемещения и начальную крутку равенствами $u = a\bar{u}$, $\bar{\omega} = a\omega$, $\bar{\Omega} = a\Omega$. Тогда, согласно (5.2) и (8.6), эффективные жесткости даются формулами

$$\bar{E} = 2Eba\Big\{\int_0^\pi \sin^2 x\Big[1 - \frac{E}{\bar{A}}\,\bar{\omega}^2\cos^2 x - \frac{E}{\bar{D}}\Big(\frac{\lambda+\mu}{\bar{A}}\Big)^2\,\bar{\omega}^4\cos^4 x\Big]\,dx + \frac{\mu}{E}\,\inf_{\bar{u}}\int_0^\pi(\bar{\alpha}\bar{u}_{,\,x}^2 + \bar{\delta}\bar{u}^2 - 2\bar{\varepsilon}_1\bar{u})\,dx\Big\} \tag{9.1}$$

$$C = 2\mu ba\Big\{\int_0^\pi \sin^2 x\Big[\Big(1 - \frac{\mu}{\bar{A}}\Big)\cos^2 x - \frac{\mu}{\bar{D}}\Big(1 - \frac{\lambda+\mu}{\bar{A}}\Big)^2\,\bar{\omega}^2\cos^4 x\Big]\,dx + \inf_{\bar{u}}\int_0^\pi(\bar{\alpha}\bar{u}_{,\,x}^2 + \bar{\delta}\bar{u}^2 - 2\bar{\varepsilon}_2\bar{u})\,dx\Big\} \tag{9.2}$$

$$B=2Eba\left\{\int_0^{\pi}\left[\sin^2 x\left(-\frac{\mu}{\bar A}\,\bar\omega\cos^2 x+\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\bar D\bar A}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\right)\bar\omega^3\cos^4 x\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\mu}{E}\,\bar\varepsilon_2\bar u_{(1)}\right]dx\right\}$$
$$\bar A=\mu+\left(E+\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}\right)\bar\omega^2\cos^2 x,\quad \bar D=\lambda+2\mu+\left[\mu-\frac{(\lambda+\mu)^2}{\bar A}\right]\bar\omega^2\cos^2 x$$
$$\bar\alpha=2+\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda^2}{\mu\bar A}\bar\omega^2\cos^2 x-\frac{\lambda^2}{\mu\bar D}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\bar\omega^2\cos^2 x\right)^2$$
$$\bar\delta=\bar\omega^2\left\{\sin^2 x\left[1-\frac{\mu}{\bar A}-\frac{\mu}{\bar D}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\right)^2\bar\omega^2\cos^2 x\right]+\frac{1}{2}\left[\sin 2x\left(\frac{\lambda}{\bar A}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\lambda}{\bar D}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\bar\omega^2\cos^2 x\right)\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\right)\right)\right]_{,x}\right\}$$
$$\bar\varepsilon_1=2(1+\nu)\bar\omega^2\left\{\left[\cos^2 x\sin x\left(\frac{\lambda}{\bar A}-\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\bar D\bar A}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\bar\omega^2\cos^2 x\right)\right)\right]_{,x}+\right.$$
$$\left.+\sin^2 x\cos x\left[-\frac{\mu}{\bar A}+\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\bar D\bar A}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\right)\bar\omega^2\cos^2 x\right]\right\}$$
$$\bar\varepsilon_2=\bar\omega\left\{\left[\cos^2 x\sin x\left(\frac{\lambda}{\bar A}+\frac{\lambda}{\bar D}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\right)\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\bar\omega^2\cos^2 x\right)\right)\right]_{,x}+\right.$$
$$\left.+\sin^2 x\cos x\left[1-\frac{\mu}{\bar A}-\frac{\mu}{\bar D}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{\bar A}\right)^2\bar\omega^2\cos^2 x\right]\right\}$$

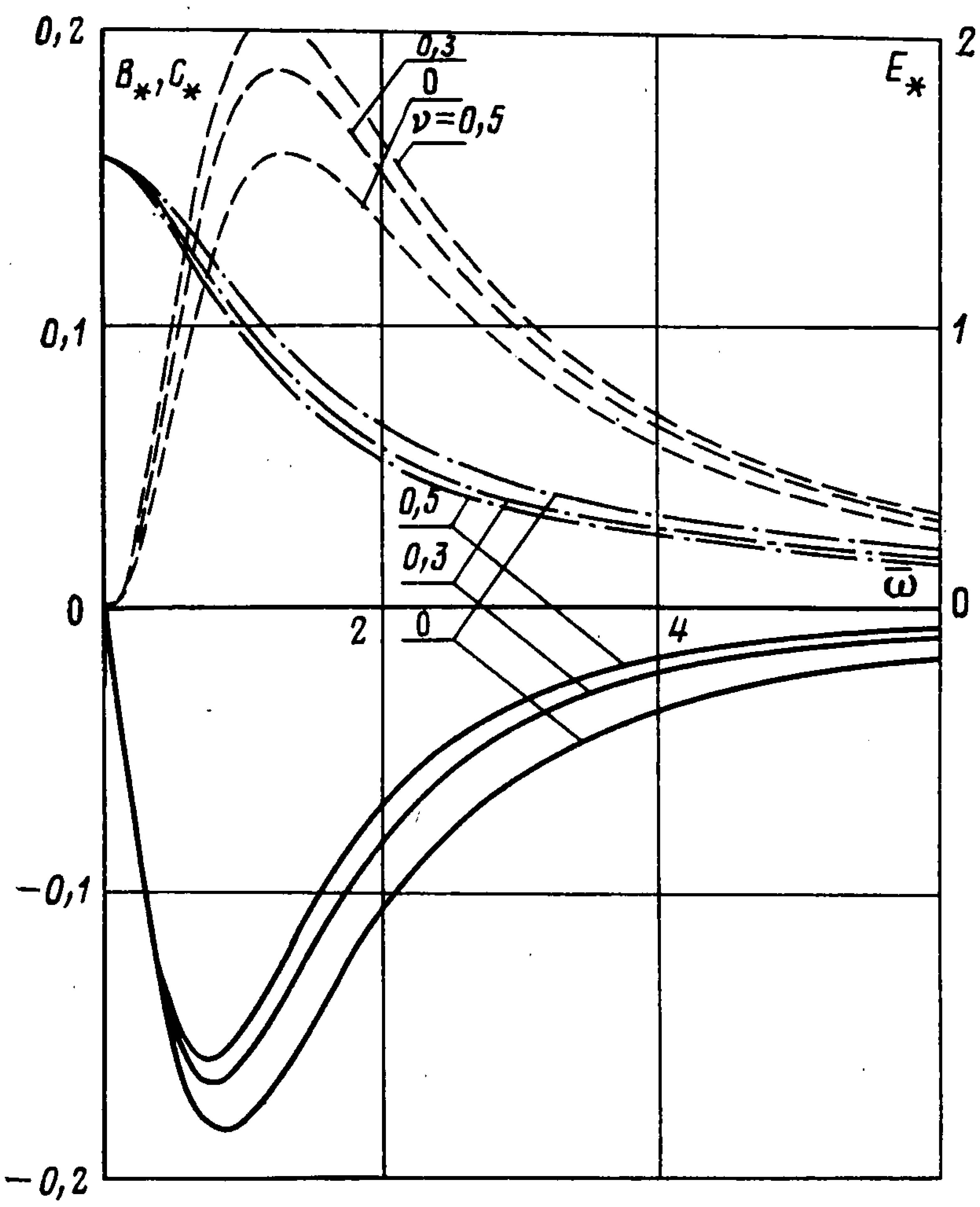
Функции $\bar u_{(1)}{}^{\circ}$, $\bar u_{(2)}{}^{\circ}$, доставляющие минимум функционалам (9.1) и (9.2), находятся из решения краевых задач

$$\bar\alpha\bar u_{(1,2),\,xx}+\bar\alpha_{,\,x}\bar u_{(1,2),\,x}-\bar\delta\bar u=-\bar\varepsilon_{(1,2)};\quad \bar u_{(1,2),\,x}=0 \text{ при } x=0,\ \pi \tag{9.3}$$

В случае малых круток эффективные модули находятся аналитически:

$$\bar E=E\,[\pi ba-{}^1/_2\,(1+\nu)\,\pi ba\bar\omega^2],\ B=-{}^1/_4 E\pi ba\bar\omega,$$
$$C={}^1/_4\mu\,(1+\nu)\pi ba\bar\omega^2$$

В рамках рассматриваемой асимптотики $b/a\ll 1$ в жесткость на кручение C не входит классическое слагаемое $\mu\pi b^3/a$, так как оно асимптотически мало по отношению к выписанному (при $\bar\omega\sim 1$). Видно, что эффективный модуль Юнга при закручивании стержня уменьшается, а крутильная жесткость увеличивается.



Фиг. 2

Задачи (9.3) были решиены методом сеточной прогонки. Эффективные модули $\bar{E}$, B, C вычислялись численным интегрированием. Значения функций $\bar{E}_* = \bar{E}/(2Eba)$, $B_* = B/(2Eba)$, $C_* = C/(2\mu ba)$ в зависимости от параметра $\bar{\omega}$ при разных коэффициентах Пуассона ν представлены на фиг. 2, где сплошные линии относятся к B_*, штриховые — к C_* и штрихпунктирные — к $\bar{E}_*$. Графики показывают, что при увеличении крутки крутильная жесткость растет, пока $\bar{\omega} \leqslant 1{,}1-1{,}2$, а затем начинает уменьшаться. Аналогично ведет себя перекрестный коэффициент B_*; перекрестные эффекты наиболее заметны при значениях крутки 0,7—0,8. Эффективный модуль Юнга монотонно уменьшается с ростом крутки.

Наличие ниспадающей ветви у эффективных коэффициентов можно объяснить следующим образом: при малых крутках на кручение и растяжение работает практически все сечение, а при больших — только «ядро» сечения, которое с ростом крутки стягивается к максимальному кругу, вписанному в поперечное сечение.

10. Сведение системы уравнений пространственной теории упругости к системам двумерных уравнений на сечении стержня. Сформулируем общий прием перехода от системы трехмерных уравнений (2.1)—(2.4) к системам уравнений на сечении естественно закрученного стержня. Будем искать решение задачи (2.1)—(2.4) в виде

$$w_\alpha = u_\alpha(\xi) + f_\alpha{}^\sigma Q_\sigma + g_\alpha^\sigma M_\sigma + \theta(\xi) e_{\alpha\beta}\xi^\beta + e_\alpha M + r_\alpha T \tag{10.1}$$
$$w = \psi_\alpha(\xi)\xi^\alpha + f^\sigma Q_\sigma + g^\sigma M_\sigma + u(\xi) + eM + rT, \qquad \psi_\alpha = \varphi_\alpha - Du_\alpha$$

Здесь T, M — растягивающее усилие и крутящий момент, Q_α, M_σ — компоненты векторов перерезывающих сил и изгибающих моментов, изменение которых вдоль оси задается интегральными уравнениями равновесия (3.3)—(3.5), $u(\xi)$, $u_\alpha(\xi)$ — продольное и поперечные перемещения оси, $\theta(\xi)$ — угол поворота в плоскости сечения, ψ_α — поперечные углы поворота сечения, включающие сдвиг, $f_\alpha{}^\sigma$, f^σ, $g_\alpha{}^\sigma$, g^σ, e_α, e, r_α, r — искомые функции координат ξ^α. Без ограничения общности на функции, входящие в перемещение (10.1), можно наложить условия, фиксирующие смысл кинематических переменных u, u_α, θ, ψ_α:

$$\langle\langle f_\alpha{}^\sigma\rangle\rangle = \langle\langle g_\alpha{}^\sigma\rangle\rangle = \langle\langle e_\alpha\rangle\rangle = \langle\langle r_\alpha\rangle\rangle = \langle\langle f^\sigma\rangle\rangle = \langle\langle g^\sigma\rangle\rangle = \langle\langle e\rangle\rangle = \langle\langle r\rangle\rangle = 0 \tag{10.2}$$

$$e_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}\langle\langle f_\alpha{}^\sigma\xi^\beta\rangle\rangle = e_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}\langle\langle g_\alpha{}^\sigma\xi^\beta\rangle\rangle = e_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}\langle\langle e_\alpha\xi^\beta\rangle\rangle = e_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}\langle\langle r_\alpha\xi^\beta\rangle\rangle = 0 \tag{10.3}$$

$$\langle\langle f^\sigma\xi^\alpha\rangle\rangle = \langle\langle g^\sigma\xi^\alpha\rangle\rangle = \langle\langle e\xi^\alpha\rangle\rangle = \langle\langle r\xi^\alpha\rangle\rangle = 0 \tag{10.4}$$

Выразим деформации (2.3) через перемещения (10.1)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = f^\sigma_{(\alpha,\beta)}Q_\sigma + g^\sigma_{(\alpha,\beta)}M_\sigma + e_{(\alpha,\beta)}M + r_{(\alpha,\beta)}T \tag{10.5}$$
$$2\varepsilon_{\alpha3} = \varphi_\alpha + \Omega e_{\alpha\beta}\xi^\beta + (f^\sigma_{,\alpha} + Df_\alpha{}^\sigma + g_\alpha{}^\sigma)Q_\sigma + (g^\sigma_{,\alpha} + Dg_\alpha{}^\sigma)M_\sigma +$$
$$+ (e_{,\alpha} + De_\alpha)M + (r_{,\alpha} + Dr_\alpha)T$$
$$\varepsilon_{33} = \gamma + \Omega_\alpha\xi^\alpha + (Df^\sigma + g^\sigma)Q_\sigma + M_\sigma Dg^\sigma + MDe + TDr$$
$$\Omega = \theta_{,\xi}, \quad \Omega_\alpha = D\psi_\alpha$$

Величины γ, Ω_α, Ω, φ_α в (10.5) имеют смысл «стержневых» мер растяжения оси, изгиба, кручения и сдвига. Свяжем их при помощи матрицы податливости с силами и моментами

$$\gamma = t^\sigma Q_\sigma + \rho^\sigma M_\sigma + tT + \rho M \tag{10.6}$$
$$\varphi_\alpha = a_\alpha{}^\sigma Q_\sigma + b_\alpha{}^\sigma M_\sigma + h_\alpha T + s_\alpha M$$
$$\Omega_\alpha = c_\alpha{}^\sigma Q_\sigma + d_\alpha{}^\sigma M_\sigma + p_\alpha T + q_\alpha M$$
$$\Omega = i^\sigma Q_\sigma + j^\sigma M_\sigma + iT + jM$$

Коэффициенты матрицы податливости — пока неопределенные постоянные. По деформациям (10.5) при условии (10.6) вычислим напряжения (2.2) и подставим в систему (2.1) и краевые условия (2.4). Приравнивая нулю коэффициенты, стоящие при силах и моментах, получим систему двумерных уравнений относительно искомых функций $f_\alpha{}^\sigma$, f^σ, $g_\alpha{}^\sigma$, g^σ, e_α, e, r_α, r:

$$
\begin{aligned}
(10.7)\qquad & \lambda\,[(Df^\sigma)_{,\alpha} + g^\sigma_{,\alpha} + f^{\sigma\gamma}_{\gamma,\alpha}] + \mu\,[2f^{\sigma\ \ \beta}_{(\alpha,\beta)} + Df^\sigma_{,\alpha} + D^2 f_\alpha{}^\sigma + 2Dg_\alpha{}^\sigma + \\
& + g^\sigma_{,\alpha}] + \lambda c_\alpha{}^\sigma + \mu\,[Da_\alpha{}^\sigma + b_\alpha{}^\sigma + e_{\alpha\beta}\xi^\beta (Di^\sigma + j^\sigma)] = 0 \\
& \mu\,[f^{\sigma\alpha}_{,\alpha} + (Df_\alpha{}^\sigma)_,{}^\alpha + g^{\sigma\alpha}_{\alpha,}] + (\lambda + 2\mu)(D^2 f^\sigma + 2Dg^\sigma) + \lambda\,(Df^{\sigma\alpha}_{\alpha,} + g^{\sigma\alpha}_{\alpha,}) + \\
& + (\lambda + 2\mu)\,[Dt^\sigma + \rho^\sigma + \xi^\alpha (Dc_\alpha{}^\sigma + d_\alpha{}^\sigma)] = 0 \\
(10.8)\qquad & \lambda\,[(Dg^\sigma)_{,\alpha} + g^{\sigma\ \gamma}_{\gamma,\alpha}] + \mu\,(2g^{\sigma\ \ \beta}_{(\alpha,\beta)} + Dg^\sigma_{,\alpha} + D^2 g_\alpha{}^\sigma) + \lambda d_\alpha{}^\sigma + \\
& + \mu\,(Db_\alpha{}^\sigma + e_{\alpha\beta}\xi^\beta Dj^\sigma) = 0 \\
& \mu\,[g^{\sigma\alpha}_{,\alpha} + (Dg_\alpha{}^\sigma)_,{}^\alpha] + (\lambda + 2\mu)\,D^2 g^\sigma + \lambda Dg^{\sigma\alpha}_{\alpha,} + (\lambda + 2\mu)\,\times \\
& \times (D\rho^\sigma + \xi^\alpha D d_\alpha{}^\sigma) = 0 \\
(10.9)\qquad & \lambda\,[(De)_{,\alpha} + e_{\gamma,\alpha}^{\ \ \gamma}] + \mu\,(2e_{(\alpha,\beta)}^{\ \ \ \beta} + De_{,\alpha} + D^2 e_\alpha) + \lambda q_\alpha + \mu D s_\alpha = 0 \\
& \mu\,[e^\alpha_{,\alpha} + (De_\alpha)_,{}^\alpha] + (\lambda + 2\mu)\,D^2 e + \lambda De_{\alpha,}{}^\alpha + (\lambda + 2\mu)\,\xi^\alpha D q_\alpha = 0 \\
(10.10)\qquad & \lambda\,[(Dr)_{,\alpha} + r_{\gamma,\alpha}^{\ \ \gamma}] + \mu\,(2r_{(\alpha,\beta)}^{\ \ \ \beta} + Dr_{,\alpha} + D^2 r_\alpha) + \lambda p_\alpha + \mu Dh_\alpha = 0 \\
& \mu\,[r^\alpha_{,\alpha} + (Dr_\alpha)_,{}^\alpha] + (\lambda + 2\mu)\,D^2 r + \lambda Dr_{\alpha,}{}^\alpha + (\lambda + 2\mu)\,\xi^\alpha D p_\alpha = 0
\end{aligned}
$$

и систему краевых условий типа Неймана

$$
\begin{aligned}
(10.11)\qquad & [\lambda\,(Df^\sigma + g^\sigma + f^{\sigma\gamma}_{\gamma,})\,\delta_{\alpha\beta} + \mu\,(2f^\sigma_{(\alpha,\beta)} - \omega e_{\nu\beta}\xi^\nu (f^\sigma_{,\alpha} + Df_\alpha{}^\sigma + g_\alpha{}^\sigma)) + \\
& + \lambda\,(t^\sigma + c_\nu{}^\sigma \xi^\nu)\,\delta_{\alpha\beta} - \mu\omega e_{\nu\beta}\xi^\nu (a_\alpha{}^\sigma + e_{\alpha\gamma}\xi^\gamma i^\sigma)]\,\nu^\beta = 0 \\
& [\mu\,(f^\sigma_{,\alpha} + Df_\alpha{}^\sigma + g_\alpha{}^\sigma) - \omega e_{\rho\alpha}\xi^\rho\,((\lambda + 2\mu)(Df^\sigma + g^\sigma) + \lambda f^{\sigma\gamma}_{\gamma,}) + \\
& + \mu\,(a_\alpha{}^\sigma + e_{\alpha\beta}\xi^\beta i^\sigma) - (\lambda + 2\mu)\,\omega e_{\rho\alpha}\xi^\rho (t^\sigma + \xi^\gamma c_\gamma{}^\sigma)]\,\nu^\alpha = 0 \\
(10.12)\qquad & [\lambda\,(Dg^\sigma + g^{\sigma\gamma}_{\gamma,})\,\delta_{\alpha\beta} + \mu\,(2g^\sigma_{(\alpha,\beta)} - \omega e_{\nu\beta}\xi^\nu (g^\sigma_{,\alpha} + Dg_\alpha{}^\sigma)) + \\
& + \lambda\,(\rho^\sigma + d_\nu{}^\sigma \xi^\nu)\,\delta_{\alpha\beta} - \mu\omega e_{\nu\beta}\xi^\nu (b_\alpha{}^\sigma + e_{\alpha\gamma}\xi^\gamma j^\sigma)]\,\nu^\beta = 0 \\
& [\mu\,(g^\sigma_{,\alpha} + Dg_\alpha{}^\sigma) - \omega e_{\rho\alpha}\xi^\rho\,((\lambda + 2\mu)\,Dg^\sigma + \lambda g^{\sigma\gamma}_{\gamma,}) + \mu\,(b_\alpha{}^\sigma + e_{\alpha\beta}\xi^\beta j^\sigma) - \\
& - (\lambda + 2\mu)\,\omega e_{\rho\alpha}\xi^\rho (\rho^\sigma + \xi^\gamma d_\gamma{}^\sigma)]\,\nu^\alpha = 0 \\
(10.13)\qquad & [\lambda\,(De + e^\gamma_{\gamma,})\,\delta_{\alpha\beta} + \mu\,(2e_{(\alpha,\beta)} - \omega e_{\nu\beta}\xi^\nu (e_{,\alpha} + De_\alpha)) + \\
& + \lambda\,(\rho + q_\gamma \xi^\gamma)\,\delta_{\alpha\beta} - \mu\omega e_{\nu\beta}\xi^\nu (s_\alpha + e_{\alpha\gamma}\xi^\gamma j)]\,\nu^\beta = 0 \\
& [\mu\,(e_{,\alpha} + De_\alpha) - \omega e_{\nu\alpha}\xi^\nu\,((\lambda + 2\mu)\,De + \lambda e^\gamma_{\gamma,}) + \mu\,(s_\alpha + e_{\alpha\beta}\xi^\beta j) - \\
& - (\lambda + 2\mu)\,\omega e_{\sigma\alpha}\xi^\sigma (\rho + \xi^\gamma q_\gamma)]\,\nu^\alpha = 0 \\
(10.14)\qquad & [\lambda\,(Dr + r^\gamma_{\gamma,})\,\delta_{\alpha\beta} + \mu\,(2r_{(\alpha,\beta)} - \omega e_{\nu\beta}\xi^\nu (r_{,\alpha} + Dr_\alpha)) + \\
& + \lambda\,(t + p_\nu \xi^\nu)\,\delta_{\alpha\beta} - \mu\omega e_{\nu\beta}\xi^\nu (h_\alpha + e_{\alpha\gamma}\xi^\gamma i)]\,\nu^\beta = 0 \\
& [\mu\,(r_{,\alpha} + Dr_\alpha) - \omega e_{\nu\alpha}\xi^\nu\,((\lambda + 2\mu)\,Dr + \lambda r^\gamma_{\gamma,}) + \mu\,(h_\alpha + e_{\alpha\beta}\xi^\beta i) - \\
& - (\lambda + 2\mu)\,\omega e_{\sigma\alpha}\xi^\sigma (t + \xi^\gamma p_\gamma)]\,\nu^\alpha = 0
\end{aligned}
$$

Задача (10.7)—(10.14) состоит из шести уравнений (10.8) с краевыми условиями (10.12) относительно шести функций g^τ, $g_\gamma{}^\tau$, шести уравнений (10.7) с краевыми условиями (10.11) относительно 12 искомых функций g^τ, $g_\gamma{}^\tau$, f^τ, $f_\gamma{}^\tau$ и двух систем одинаковой структуры (10.9), (10.10) с граничными условиями (10.13), (10.14) относительно трех искомых функций e, e_γ и r, r_γ, соответственно, в каждой. При ограничениях (10.2)—(10.4) задача (10.7)—(10.14) с добавлением уравнений состояния (3.1) однозначно разрешима.

Функции $f_\gamma{}^\tau$, $g_\gamma{}^\tau$, f^τ, g^τ и e_α, e, r_α, r характеризуют, соответственно, изгиб и растяжение — кручение стержня. В общем случае решение задачи об изгибе зацепляется с задачей о продольно крутильной деформации через коэффициенты матрицы податливости. Если же ось естественной закрутки x^3 совпадает с осью центров тяжести поперечных сечений, а сечение центрально симметрично относительно этой оси, то можно проверить, что задача о деформации стержня распадается на две независимые, одна из которых описывает изгибную, а другая — продольно крутильную деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. Сер. «Классика естествознания». М.: Физматгиз, 1961. 518 с.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. *Марченко В. М.* Растяжение и кручение естественно закрученных стержней.— Тр. ЦАГИ, 1958, вып. 720, с. 3—62.
5. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
6. *Николаи Е. Л.* Труды по механике. М.: ГИТТЛ, 1955. 583 с.
7. *Воробьев Ю. С., Шорр Б. Ф.* Теория закрученных стержней. Киев: Наук. думка, 1983. 186 с.
8. *Бердичевский В. Л., Квашнина С. С.* Об уравнениях, описывающих поперечные колебания упругих стержней.— ПММ, т. 40, вып. 1, 1976, с. 120—135.

Москва

Поступила в редакцию
22.X.1984