

УДК 539.3

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГИХ КАРКАСОВ

Колпаков А. Г.

Предлагается метод приближенного вычисления усредненных упругих характеристик мелкоячеичных каркасных конструкций периодического строения. Метод основан на аппроксимации «ячеечной задачи» теории усреднения [1—4] задачами о деформировании соответствующих конструкций балочного, оболочечного и т.п. типов. Показано, что получаемые приближенные значения усредненных характеристик и решение соответствующей им задачи отличаются от точных на величину, определяемую только погрешностью используемой модели. Рассматриваются примеры: балочные и коробчатый каркасы, построение каркаса с отрицательными коэффициентами Пуассона.

Методы усредненного описания тел, содержащих большое количество мелких пустот [1, 2], позволяют заменять рассмотрение конструкций периодического строения рассмотрением близких по механическому поведению сплошных тел с так называемыми усредненными характеристиками. Задача о нахождении усредненных характеристик сведена в [2] к так называемой ячейке задачи теории упругости, решение которой достаточно затруднено. В то же время в каркасных конструкциях, периодический элемент которых представляет собой конструкцию балочного или оболочечного типа, решение ячейке задачи может быть получено приближенными методами с любой точностью, определяемой только выбором модели.

Рассматривается упругая конструкция периодического строения с ячейкой периодичности (ЯП) в виде прямоугольного параллелепипеда  $P_\varepsilon = \varepsilon P_1 = \{\varepsilon x : x \in P_1\}$ , где  $P_1 = \{x \in R^n : -\mu_i/2 \leq x_i \leq \mu_i/2, i = 1, \dots, n\}$  ( $n = 2, 3$ ) — прямоугольный параллелепипед с характерной длиной сторон, равной единице ( $\mu_i \sim 1$ ). Упругий материал занимает не всю ЯП  $P_\varepsilon$ , а только ее часть  $K_\varepsilon$ , которую можно представить в виде  $K_\varepsilon = \varepsilon K_1$ . При условии, что характерный (абсолютный или относительный) размер ЯП  $\varepsilon \rightarrow 0$ , возможно проведение усреднения [2]. Для определения усредненных упругих постоянных  $\{\bar{a}_{ijkl}\}$  среды, образованной на основании ЯП  $P_\varepsilon$ , часть  $K_\varepsilon$  которой занята материалом с упругими постоянными  $\{a_{ijkl}\}$ , следует минимизировать функционал [2]

$$(1) \quad F(u) = \frac{1}{\text{mes } P_1} \int_{K_1} a_{ijkl} (\text{def } u)_{ij} (\text{def } u)_{kl} dx$$

$$(\text{def } u)_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})$$

на множестве функций  $\{H_2^1(P_1)\}^n$  при дополнительных условиях:

$$(2) \quad \int_{P_1} u(x) dx = 0$$

$$(3) \quad u - 1/2 (x_\alpha e_\beta + x_\beta e_\alpha) \in \Pi_1$$

Здесь и далее  $\Pi_1$  — класс функций, периодичных на  $P_1$  ( $e_\alpha, e_\beta$  — базисные орты декартовой системы координат). После этого усредненные упругие постоянные выражаются через решения задачи (1) — (3), обозначаемые  $u^{\alpha\beta}$  (индексы  $\alpha, \beta$  — из условия (3)) [2]

$$(4) \quad \bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\text{mes } P_1} \int_{K_1} a_{ijkl} (\text{def } u^{\alpha\beta})_{ij} (\text{def } u^{\gamma\delta})_{kl} dx$$

Удобно перейти к дифференциальной форме записи задачи (1)—(3).  
Уравнение Эйлера для (1)—(3) имеет вид

$$(5) \quad \int_{K_1} [a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl}]_{,j} \varphi_i dx + \int_{\partial P_1 \cap \partial K_1} a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl} n_j \varphi_i dx + \\ + \int_{\partial P_1 \setminus (\partial P_1 \cap \partial K_1)} a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl} n_j \varphi_i dx = 0$$

для любой функции  $\varphi \in \{H_2^1(P_1)\}^n$ , удовлетворяющей условию (2) и следующему из (3) условию

$$(6) \quad \varphi(x) \in \Pi_1$$

Из (5) в силу произвольности значений функции  $\varphi(x)$  внутри области  $K_1$  следует, что в этой области функция  $u$  удовлетворяет уравнению равновесия с нулевыми массовыми силами:  $[a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl}]_{,j} = 0$ . В силу произвольности значений  $\varphi(x)$  в области  $P_1 \setminus K_1$  получаем, что

$$(7) \quad \int_{K_1} u(x) dx = 0$$

Рассмотрим в (5) интеграл по  $\partial P_1 \cap \partial K_1$  (т. е. по общей части границ ЯП  $P_1$  и области  $K_1$ , занятой упругим материалом). Поскольку функция  $\varphi(x)$  периодична на  $P_1$ , указанный интеграл можно переписать в виде

$$(8) \quad \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j \cap \partial K_1} [a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl} n_j(x) + a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl} n_j(x - \mu_j e_j)] \varphi_i(x) dx$$

где  $\Gamma_j$  — грань ЯП  $P_1$ , перпендикулярная оси  $Ox_j$  и пересекающая ее при  $x_j = \mu_j/2$ . Координаты вектора нормали к грани  $\Gamma_j$ :  $\{n_i(x)\} = \{0, \dots, \delta_{ij}, \dots, 0\}$  и вектора нормали к противоположной грани:  $\{0, \dots, -\delta_{ij}, \dots, 0\}$ . На каждой из граней  $\Gamma_j$  множество следов функций из пространства  $\{H_2^1(P_1)\}^n$ , удовлетворяющих (2), (3), плотно в пространстве  $\{L_2(\Gamma_j)\}^n$  [5], поэтому из (8) следует, что

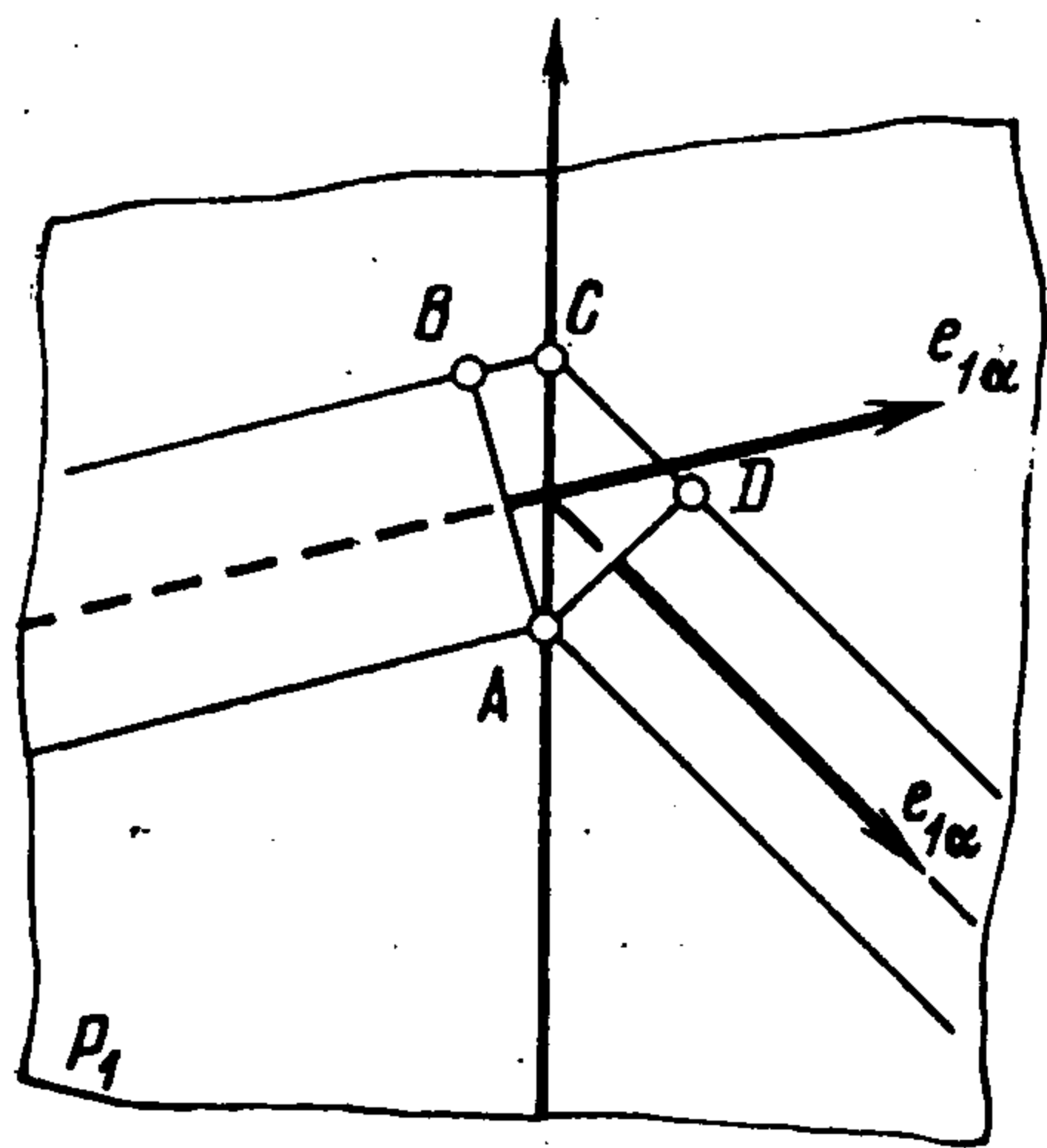
$$a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl} n_j(x) + a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl} n_j(x - \mu_j e_j) = 0$$

для  $x \in \Gamma_j \cap \partial K_1$ . Величины  $\sigma_n = \{a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl} n_j\}$  определяют вектор напряжений. Отсюда

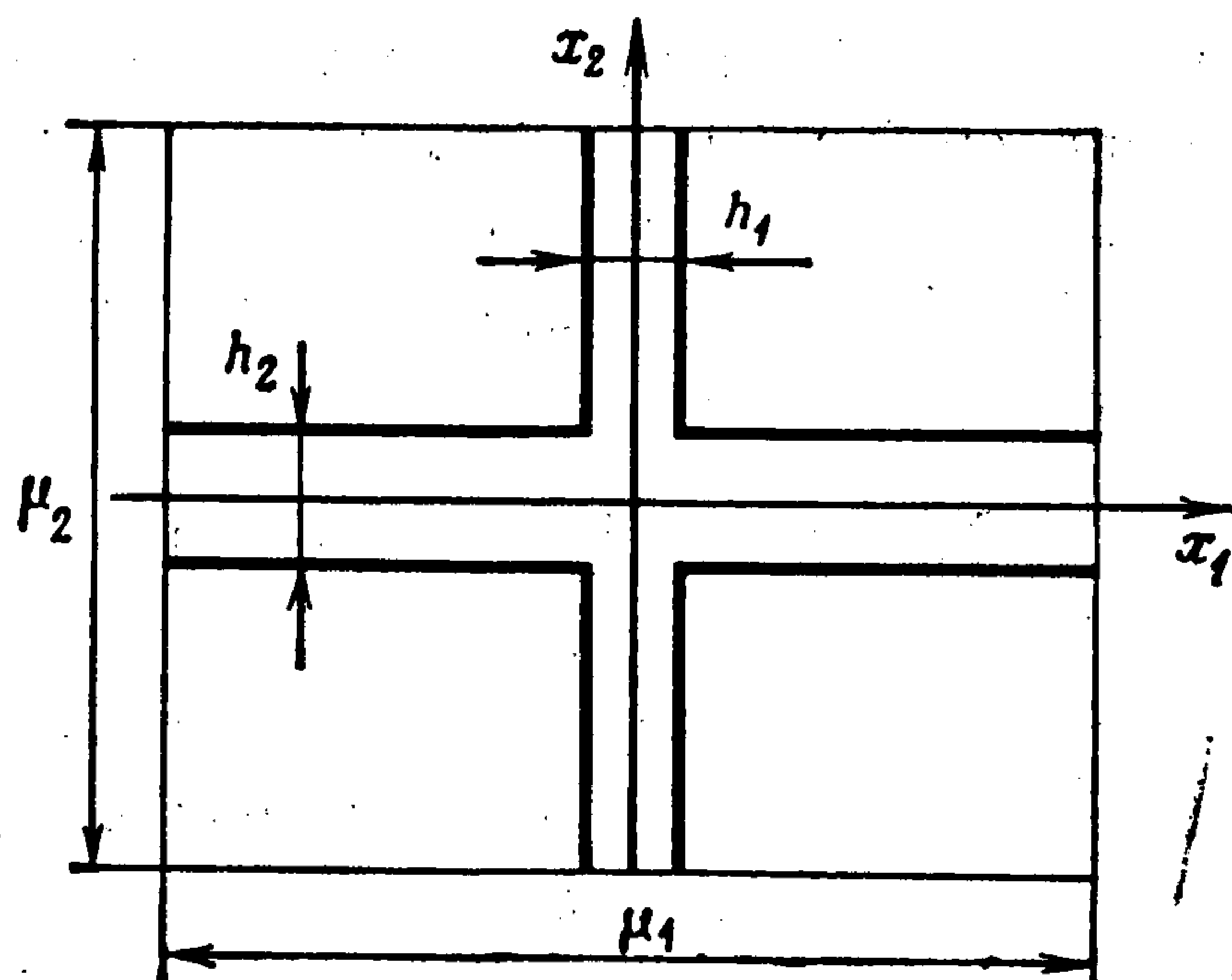
$$(9) \quad \sigma_n(x) + \sigma_n(x - \mu_j e_j) = 0, \quad x \in \partial \Gamma_j \cap \partial K_1$$

Третье слагаемое в (5) дает условие: на  $\partial P_1 \setminus (\partial P_1 \cap \partial K_1)$  (т. е. на части границы области  $K_1$ , не пересекающейся с гранями ЯП  $P_1$ ) нормальные напряжения  $\sigma_n = \{a_{ijkl} (\text{def } u)_{kl} n_j\} = 0$ . Формулировка задачи получена.

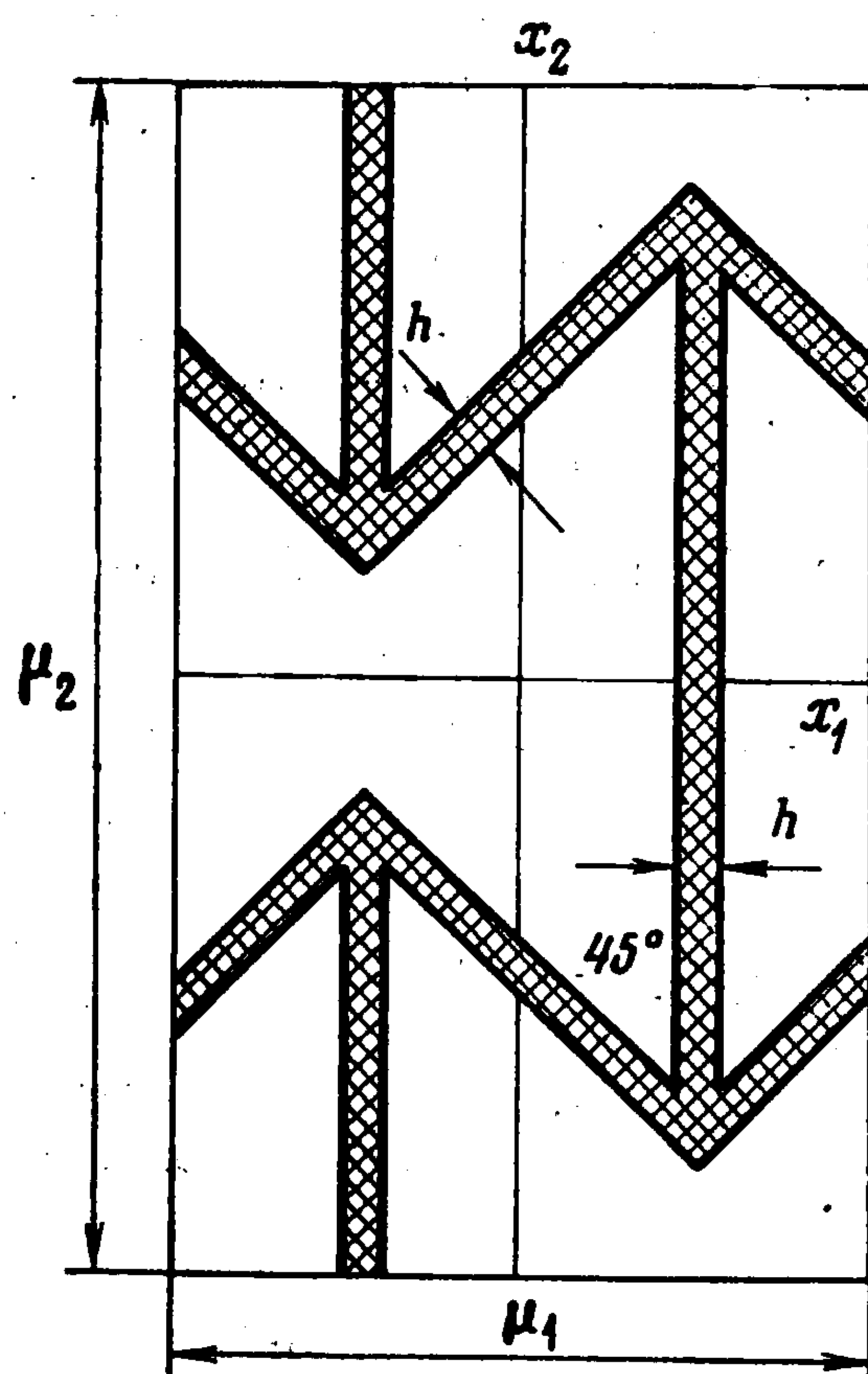
Пусть ячеечная конструкция (т. е. конструкция, занимающая область  $K_1$  ЯП  $P_1$ ) образована элементами, имеющими в направлениях осей координат характерные толщины порядка  $h_1, \dots, h_n$  ( $n = 2, 3$ ). В зависимости от того, одна или две из величин  $h_i$  являются малыми:  $0 < h_i \ll \ll \mu_i \sim 1$ , имеем балку или пластинку (оболочку). При этом существенно требование, чтобы  $h_i$  были, хотя и малыми, но фиксированными и отличными от нуля числами. Без наложения этого условия не выполнено условие (4) работы [2] — достаточное условие усреднения. Практически можно ограничиться случаем  $10^{-3} \ll h_i/\mu_i \ll 10^{-1}$  [6—8]. Возникающие далее задачи теории балок, пластинок и т. д. понимаются как аппроксимирующие решение исходной задачи теории упругости с некоторой точностью  $\alpha$  (в нормах, указываемых далее).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Усредненные характеристики плоского балочного каркаса. Рассмотрим плоский каркас с ЯП  $P_1$  типа изображенных на фиг. 1—3. Пусть ширина элементов, образующих область  $K_1$ , удовлетворяет условию  $0 < h_i \ll \mu_i \sim 1$  и указанная область занята упругим материалом с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Решение задачи теории упругости о деформировании такой конструкции аппроксимируется решением задачи о деформировании системы жестко скрепленных (в точках их пересечений) балок [7], работающих, вообще говоря, на растяжение и изгиб. Деформирование балок будем описывать в рамках гипотезы недеформируемой нормали [6—8].

Построим задачу, соответствующую исходной. В силу равенства нулю массовых сил и напряжений на гранях балок, не пересекающихся с ЯП  $P_1$ , перемещения каждой из балок удовлетворяют известным уравнениям равновесия с нулевыми массовыми силами [6—8]. Следствия условий (2), (3), (9) требуют более подробного рассмотрения. Обозначим через  $v_\alpha$ ,  $w_\alpha$  перемещения точек, лежащих на срединной оси балки, занумерованной индексом  $\alpha$ , в направлении орта  $e_{1\alpha}$  касательной к недеформированной оси балки и орта  $e_{2\alpha}$  — нормали к той же оси. Перемещения  $u$  точек балки,

рассматриваемой как упругое тело, связаны с  $\{v_\alpha, w_\alpha\}$  гипотезой о недеформируемой нормали [6]:  $u \approx U \equiv v_\alpha e_{1\alpha} + w_\alpha e_{2\alpha} + \xi (N_\alpha - e_{2\alpha})$ , где  $N_\alpha$  — нормальный орт к деформированной оси балки ( $N_\alpha = e_{2\alpha} + w'_\alpha e_{1\alpha}$  [6, 7]),  $\xi \in [-h_\alpha/2, h_\alpha/2]$  — координата поперек оси балки.

Условие (2) в рассматриваемом случае приводит к условию

$$(10) \quad \sum_{\alpha=1}^m \int_{L_\alpha} (v_\alpha e_{1\alpha} + w_\alpha e_{2\alpha}) ds = 0$$

( $m$  — число балок, образующих ячеистую конструкцию). Интегрирование проводится по осям балок, обозначенных  $L_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ .

Рассмотрим стык балок, принадлежащих соседним ЯП, или в силу периодичности рассматриваемой задачи концы балки, лежащие на противоположных гранях ЯП (фиг. 1). Условие (9) при учете противоположности нормалей к противоположным граням ЯП  $P_1$  приводит к выводу о противоположности усилий с обеих сторон линии  $AC$ . Далее, элементы  $ABC$  и  $ACD$  находятся в равновесии под действием нулевых внешних сил и усилий в сечениях  $AB$ ,  $AC$  и  $AC$ ,  $AD$ . Отсюда получаем, что усилия в сечениях  $AB$  и  $AD$ , имеющие вид  $N_\alpha e_{1\alpha} + Q_\alpha e_{2\alpha}$ , где  $N_\alpha$ ,  $Q_\alpha$  — растягивающее усилие и перерезывающая сила [7, 9], противоположны. Поскольку моменты с обеих сторон линии  $AC$  в силу (9) противоположны, то в силу условия равновесия элементов  $ABC$  и  $ACD$  противоположны моменты в сечениях  $AB$  и  $AD$ .

Далее, заметив, что сечения  $AB$  и  $AD$  противоположно ориентированы (орт  $e_{1\alpha}$  входит в элемент  $ABC$  и выходит из элемента  $ACD$ , см. фиг. 1), получаем условие

$$(11) \quad N_\alpha e_{1\alpha} + Q_\alpha e_{2\alpha}, \quad M_\alpha \in \Pi_1$$

Указанные величины  $N_\alpha$ ,  $Q_\alpha$ ,  $M_\alpha$  — растягивающее усилие, перерезывающая сила, момент — отнесены к одинаково ориентированным сечениям балки.

Кинематические условия, вытекающие из (3), имеют вид

$$(12) \quad v_\alpha e_{1\alpha} + w_\alpha e_{2\alpha} - 1/2 h_\alpha w'_\alpha e_{1\alpha} - 1/2 (x_\gamma e_\delta + x_\delta e_\gamma), \quad w'_\alpha e_{1\alpha} \in \Pi_1$$

Периодичность первой функции получается как следствие условия (2) применительно к точке  $A$  (фиг. 1). Периодичность второй функции получается путем наложения требования о сохранении величины угла между осями балок при их деформировании (в общем случае это условие не может быть выведено из гипотезы недеформируемой нормали, поскольку в области  $ABCD$  эта гипотеза неприменима).

Условия (11), (12) значительно упрощаются в частном случае, когда орт касательной к недеформированной оси балки  $e_{1\alpha} \in \Pi_1$ . В указанном случае из (11), (12) следует условие

$$(13) \quad N_\alpha, Q_\alpha, M_\alpha, v_\alpha e_{1\alpha} + w_\alpha e_{2\alpha} - 1/2 (x_\gamma e_\delta + x_\delta e_\gamma) \\ w'_\alpha \in \Pi_1, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

(так как в этом случае сечения  $AB$ ,  $AD$  и  $AC$  совпадают). Отметим, что если, кроме того, касательный к оси балки орт  $e_{1\alpha}$  на гранях ЯП  $P_1$  нормален этим граням, то условие  $w'_\alpha \in \Pi_1$  является уже непосредственным следствием (3) и гипотезы недеформируемой нормали.

*Приближенные значения упругих постоянных.* Выше рассматривалась задача теории балок как задача, по решению которой на основании принятой кинематической гипотезы можно восстановить некоторое поле переме-

щений  $U$ , аппроксимирующее истинное поле перемещений  $u$ , определяемое из решения задачи (1)–(3). Обозначим точность этой аппроксимации (погрешности модели) через  $\alpha$ , т. е.

$$(14) \quad \|u - U\| \equiv \|\text{def } u - \text{def } U\|_{L_2(P_1)} \leq \alpha$$

Введем величины

$$(15) \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\text{mes } P_1} \int_{K_1} a_{ijkl} (\text{def } U^{\alpha\beta})_{ij} (\text{def } U^{\gamma\delta})_{kl} dx$$

которые естественно назвать приближенными (в смысле использования для их вычисления функций  $U^{\alpha\beta}$ ) значениями усредненных упругих постоянных. Величины  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  аппроксимируют точные значения усредненных упругих постоянных  $\{\bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ , даваемых формулой (4), поскольку в силу (4), (15)

$$(16) \quad \begin{aligned} |\bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta\gamma\delta}| &= \frac{1}{\text{mes } P_1} \left| \int_{K_1} a_{ijkl} [(\text{def } u^{\alpha\beta})_{ij} (\text{def } u^{\gamma\delta})_{kl} - \right. \\ &\quad - (\text{def } u^{\alpha\beta})_{ij} (\text{def } U^{\gamma\delta})_{kl} + (\text{def } u^{\alpha\beta})_{ij} (\text{def } U^{\gamma\delta})_{kl} - \\ &\quad \left. - (\text{def } U^{\alpha\beta})_{ij} (\text{def } U^{\gamma\delta})_{kl}] dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\text{mes } P_1} |a_{ijkl}| (\|U^{\alpha\beta}\| + \alpha) \alpha \equiv C (\|U^{\alpha\beta}\| + \alpha) \alpha \\ &(|\cdot| = \max_{ijkl} |\cdot|, \max_{\alpha, \beta} |\cdot|) \end{aligned}$$

*Замечания.* 1°. Как видно из полученной формулы, для оценки близости точных и приближенных значений усредненных упругих постоянных надо иметь оценки величин  $\|U^{\alpha\beta}\|$ . Такие оценки могут быть получены в конкретных случаях, что делается ниже.

2°. При  $\alpha = \gamma$ ,  $\beta = \delta$  выражения (4), (14) совпадают с удвоенной энергией упругой деформации, соответствующей полям перемещений  $u^{\alpha\beta}$  и  $U^{\alpha\beta}$ .

*Оценка близости решений усредненной задачи и задачи с коэффициентами  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ .* Согласно [2], перемещения  $v_\varepsilon$  в исходной каркасной конструкции при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сходятся к решению  $v$  задачи теории упругости о деформировании сплошной среды с упругими постоянными  $\{\bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ , даваемыми (4). Последняя задача имеет известный вид

$$(17) \quad [\bar{a}_{ijkl} v_{k,l}],_j = f_i, \quad v|_{\partial Q} = v^0$$

Сходимость имеет место в следующем смысле [2]: пусть  $Q$  — область, занятая каркасной конструкцией (объединение ячеек вида  $P_\varepsilon$ ),  $Q_\varepsilon$  — область, занятая собственно упругим материалом (объединение областей  $K_\varepsilon$ ). Тогда [2]

$$(18) \quad \|v_\varepsilon - v\|_{L_2(Q_\varepsilon)} = \delta(h_1, \dots, h_n, \varepsilon)$$

где для любых фиксированных  $h_i > 0$  величина  $\delta(h_1, \dots, h_n, \varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Рассмотрим задачу о деформировании среды с определенными выше упругими постоянными  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  (аппроксимирующими  $\{\bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  с точностью (16))

$$(19) \quad [A_{ijkl} V_{k,l}],_j = f_i, \quad V|_{\partial Q} = v^0$$

Как следует из [2], оператор в (19) положительно определен. Обозначим его коэффициент эллиптичности через  $\beta(h_1, \dots, h_n)$  (поскольку  $\beta$  может зависеть и, как будет видно из дальнейшего, действительно зависит от  $h_1, \dots, h_n$ ). Оценим разность решений задач (17), (19). Составив задачу

для разности решений (17), (19) и умножив входящее в нее уравнение на  $v - V$ , получим с учетом (16) оценку

$$(20) \quad \|v - V\|_{L_2(Q)} \leq \Lambda, \quad \Lambda = \frac{C(\|U^{\alpha\beta}\| + \alpha)\|V\| \alpha}{\beta(h_1, \dots, h_n)}$$

Из (8), (20) следует

$$(21) \quad \|v_\varepsilon - V\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \leq \|v_\varepsilon - v\|_{L_2(Q_\varepsilon)} + \|v - V\|_{L_2(Q)} \leq \\ \leq \delta(h_1, \dots, h_n, \varepsilon) + \Lambda$$

Поскольку  $h_i > 0$  — фиксированные числа, из (21) в силу упоминавшихся результатов [2] получаем

$$(22) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon - V\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \leq \Lambda$$

Оценки (16), (20)—(22) показывают, что предложенным способом можно вычислить приближенные значения упругих постоянных  $\{\bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ , вообще говоря, с любой точностью, определяемой только погрешностью модели (оценка (16)), причем так, что решение задачи (19) аппроксимирует решение исходной и усредненной задач также с точностью, определяемой только выбором модели (оценки (20)—(22)).

Построение величин  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ , гарантирующих заданную точность аппроксимации упругих постоянных и решений, не является тривиальным в силу зависимости коэффициентов  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  и величин  $\beta(h_1, \dots, h_n)$ ,  $\|U^{\alpha\beta}\|$ ,  $\|V\|$  от  $h_1, \dots, h_n$ . В конкретных случаях, установив зависимость перечисленных величин от  $h_1, \dots, h_n$ , можно получить условия на погрешность модели  $\alpha$ , требующуюся для вычисления  $\{\bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  с заданной точностью.

*Плоский прямоугольный балочный каркас.* Рассмотрим каркас, ЯП  $P_1$  которого изображена на фиг. 2. Применим для приближенного вычисления усредненных характеристик каркаса изложенные выше методы. Заметим, что в рассматриваемом случае орты  $e_{1\alpha}$  периодичны на  $P_1$  и условия (11), (12), могут быть взяты в виде (13).

1°.  $\alpha = \beta$ . Условия (13), как можно заметить, соответствуют случаю растяжения балочной конструкции, изображенной на фиг. 2, в направлении одной из координатных осей. В случае  $\alpha = \beta = 1$  поле перемещений  $U^{11} = x_1 e_1$  — в горизонтальной балке,  $U^{11} = 0$  — в вертикальной балке. Согласно (15), получаем

$$A_{iiii} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h_i}{\mu_i}, \quad i = 1, 2$$

Величины  $h_i$ ,  $\mu_i$  указаны на фиг. 2.

2°.  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  ( $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ). Условия (13) в рассматриваемом случае сводятся к следующим:

$$(23) \quad [v_1 e_1 + w_1 e_2]_1 = \mu_1 e_2, \quad [v_2 e_2 + w_2 e_1]_2 = \mu_2 e_1$$

$w_i'$ ,  $w_i''$ ,  $w_i'''$  периодичны на  $[-\mu_i/2, \mu_i/2]$ ,  $i = 1, 2$  ( $[f]_i = f(\mu_i/2) - f(-\mu_i/2)$ ).

Условиям (23) для симметричной конструкции (фиг. 2) соответствует задача об изгибе (без растяжения) изображенной на фиг. 2 системы балок. При этом дополнительно к условиям равновесия

$$(24) \quad w_1^{IV} = 0, \quad w_2^{IV} = 0$$

следует рассмотреть условие равновесия элемента, лежащего в пересечении балок. Поскольку на него действуют только моменты (растяжение

балок отсутствует)  $M_i = Eh_i^3 [12(1 - \nu^2)]^{-1} w_i''$ , то

$$(25) \quad h_1^3 (w_1''(+0) - w_1''(-0)) - h_2^3 (w_2''(+0) - w_2''(-0)) = 0$$

В силу симметрии точка пересечения осей балок не испытывает смещений, т. е.

$$(26) \quad w_i(+0) = w_i(-0) = 0, \quad i = 1, 2$$

Кроме того, углы между осями балок в процессе деформации не изменяются

$$(27) \quad w_i'(+0) = w_i'(-0), \quad i = 1, 2; \quad w_1'(+0) = -w_2'(-0)$$

Решив задачу (23)–(27), что не представляет труда, пользуясь замечанием 2, получаем

$$(28) \quad A_{1212} = \frac{4E}{1 - \nu^2} \frac{h_1^3 h_2^3}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 h_2^3 + \mu_2 h_1^3)^2} \left[ \frac{h_2^3}{\mu_1^2} + \frac{h_1^3}{\mu_2^2} \right]$$

Оставшиеся упругие постоянные равны нулю.

В итоге получаем определяющие соотношения для усредненной среды (в которых постоянные  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  совпадают с точными значениями усредненных упругих постоянных  $\{\bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  с точностью, определяемой оценкой (16))

$$(29) \quad \sigma_{ii} = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{h_i}{\mu_i} \varepsilon_{ii}, \quad i = 1, 2$$

$$\sigma_{ij} = \frac{4E}{1 - \nu^2} \frac{h_1^3 h_2^3}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 h_2^3 + \mu_2 h_1^3)^2} \left[ \frac{h_2^3}{\mu_1^2} + \frac{h_1^3}{\mu_2^2} \right] \varepsilon_{ij}, \quad i \neq j$$

В рассмотренном случае можно провести более детальную оценку близости приближенных значений упругих постоянных  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  и решения соответствующей задачи (19) к точным. Как видно из (29), коэффициенты  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  и постоянная эллиптичности  $\beta(h_1, h_2)$  имеют порядок  $1/Eh_i^3$ . В силу чего величины  $\|U^{\alpha\beta}\|$  и  $\|V\|$  в (16), (20) — (22) имеют порядок  $Eh_i^3$ . Отсюда получаем, что правая часть оценки (16) имеет порядок  $\alpha/(Eh_i^3)$ , а правая часть оценки (22) — порядок  $\alpha/(Eh_i^3)^2$ . Возможность получения в силу приведенных оценок приближенных значений усредненных упругих постоянных и решения соответствующей задачи следуют из того, что погрешность  $\alpha$  выбором соответствующей модели может быть сделана меньше любой заданной величины (в частности, величины вида  $h_i^m$ ,  $m \in N$ ), в то время как порядок величин  $\beta(h_1, h_2)$ ,  $\|U^{\alpha\beta}\|$ ,  $\|V\|$  при уменьшении погрешности модели  $\alpha$  сохраняется.

Как следует из сказанного, применявшаяся выше гипотеза недеформированной нормали может быть использована для расчета характеристик плоского балочного каркаса при  $Eh_i^3 \geq 1$  (ЯП  $K_1$  конструкции образована достаточно жесткими элементами) с точностью порядка  $\alpha$ . Для получения  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  с требуемой точностью в общем случае требуется применение более точных моделей (как видно из предыдущего, модель, обладающая точностью  $\alpha \sim h_i^9$ , решала бы задачу в общем случае).

Если под  $\alpha$  понимать невязку энергий упругих деформаций при моделировании ячеистой конструкции, то порядок правых частей в (16), (22) — соответственно  $\alpha$  и  $\alpha/(Eh_i^3)^2$ .

Оценки (16), (20)–(22) позволяют сделать вывод о том, что рассматриваемый прямоугольный каркас при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ведет себя с точностью, определенной выше, как сплошная упругая среда с определяющими уравнениями (29). В силу (29) для каркаса характерна ортотропия упругих постоянных. Даже для ЯП с одинаковыми размерами в направлениях осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$  ортотропия сохраняется. Наличие аналогичного эффекта отмечено [4] в задаче об изгибе перфорированной пластины. Для тензора упругих постоянных  $\{A_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  оси координат являются главными, и в этих осях каркас обладает нулевым коэффициентом Пуассона (с точностью, определяемой (16)). Кроме того, поскольку величины  $h_i \ll 1$ , то, как видно из

(29), каркас в тех же осях обладает модулем сдвига, значительно меньшим его модулей на растяжение.

*Пространственный прямоугольный балочный каркас.* Пусть ЯП  $P_1$  образована прямоугольными в сечении брусками, лежащими на осях координат и имеющими ширину  $h_i$ , высоту  $H_i$ , координаты концов  $\mu_i/2, -\mu_i/2, i = 1, 2, 3$ . Если  $0 < h_i, H_i \ll \mu_i \sim 1$ , но при этом фиксированы, ячеечная задача аппроксимируется задачей о деформировании системы балок, подобной рассмотренной выше. Приближенные определяющие соотношения имеют вид

$$(30) \quad \sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h_i H_i \mu_i}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \varepsilon_{ii}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sigma_{12} = \frac{4E}{1-\nu^2} \frac{h_1^3 h_2^3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 (\mu_1 h_2^3 + \mu_2 h_1^3)^2} \left[ \frac{H_2 h_2^3}{\mu_1^2} + \frac{H_1 h_1^3}{\mu_2^2} \right] \varepsilon_{12}$$

Уравнения, связывающие  $\sigma_{13}, \varepsilon_{13}$  и  $\sigma_{23}, \varepsilon_{23}$ , получаются из уравнения для  $\sigma_{12}, \varepsilon_{12}$  перестановкой индексов. Как видно из (30), пространственный каркас сохраняет отмеченные выше свойства плоского.

Каркасы рассмотренных типов широко используются в качестве арматуры в композиционных материалах. В случае заполнителей, обладающих малой жесткостью, упругие характеристики композита определяются характеристиками каркаса. В силу этого отмеченная выше малая сдвиговая жесткость каркасов приводит к малости сдвиговой жесткости армированных ими композитов, что существенно при рассмотрении композиционных пластинок и оболочек [10, 11].

*Коробчатый каркас.* Пусть ЯП  $P_1$  трехмерного каркаса в сечениях плоскостями, параллельными координатной плоскости  $Ox_1x_2$ , имеет вид, приведенный на фиг. 2, а третья координата  $x_3 \in [-\mu_3/2, \mu_3/2]$ . Если  $0 < h_i \ll \mu_i \sim 1$ , ячеечная задача моделируется задачей о деформировании двух пластинок, жестко скрепленных по линии их пересечения. Усредненные определяющие уравнения (с точностью, даваемой (17)) имеют вид

$$(31) \quad \sigma_{ii} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{h_i}{\mu_i} \left( \varepsilon_{ii} - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{33} \right)$$

$$\sigma_{i3} = \frac{E}{1+\nu} \frac{h_i}{\mu_i} \varepsilon_{i3}, \quad i = 1, 2$$

$$\sigma_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \left( \frac{h_1}{\mu_1} + \frac{h_2}{\mu_2} \right) \varepsilon_{33} - \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{h_1}{\mu_1} \varepsilon_{11} + \frac{h_2}{\mu_2} \varepsilon_{22} \right) \right\}$$

Уравнения, связывающие  $\sigma_{12}, \varepsilon_{12}$ , совпадают с приведенными в (29). Как следует из (31), в плоскости  $Ox_1x_2$  коробчатый каркас в основном сохраняет свойства, присущие плоскому каркасу. В направлении, перпендикулярном этой плоскости, каркас ведет себя как обычный упругий материал: коэффициент Пуассона положителен, модули сдвига и растяжения одного порядка.

*Каркасная конструкция с отрицательными коэффициентами Пуассона.* Для плоской ортотропной сплошной среды (при совпадении главных осей с координатными) связь между упругими постоянными  $\{\bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$  и модулями Юнга  $E_i$  и коэффициентами Пуассона  $\nu_i$  имеет известный вид [9], в частности

$$E_1 \nu_2 / (1 - \nu_1 \nu_2) = \bar{a}_{1122} / \bar{a}_{2222}$$

Поскольку  $\bar{a}_{2222}, E_1, 1 - \nu_1 \nu_2$  — положительные величины [9], знак коэффициента Пуассона  $\nu_2$  совпадает со знаком  $\bar{a}_{1122}$ . То же справедливо и для коэффициента Пуассона  $\nu_1$  [9].

Рассмотрим задачу о деформировании плоской каркасной конструкции, ЯП  $P_1$  которой изображена на фиг. 3. Решение этой задачи при  $h_i \ll \mu_i \sim 1$  аппроксимируется решением задачи о деформировании системы жестко скрепленных балок. Используя гипотезу недеформируемой нормали, вычислим коэффициент  $A_{1122}$ . Решение упрощается, если воспользоваться наличием у ячеечной конструкции определенной симметрии. Именно, можно рассмотреть четверть ЯП  $P_1$  (фиг. 3). Рассмотрим задачу о равновесии указанного элемента при нулевых массовых силах с условиями

$$(32) \quad \begin{aligned} v = w &= \pm \frac{\mu_1}{4\sqrt{2}} \text{ в точках } \left(0, \frac{\mu_2}{4}\right), \left(\frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_2}{4}\right) \\ v = w &= 0 \text{ в точке } \left(\frac{\mu_1}{4}, 0\right), \quad (\alpha = \beta = 1) \\ v = w &= 0 \text{ в точках } \left(0, \frac{\mu_2}{4}\right), \left(\frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_2}{4}\right) \\ v &= -\frac{\mu_2}{4}, \quad w = 0 \text{ в точке } \left(\frac{\mu_1}{4}, 0\right) \quad (\alpha = \beta = 2) \\ w'' &= 0 \text{ в точках } \left(0, \frac{\mu_2}{4}\right), \left(\frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_2}{4}\right) \text{ при всех указанных } \alpha, \beta \end{aligned}$$

и, кроме того, решение задачи симметрично относительно линии  $x_1 = \mu_1/4$ .

Можно проверить, что склеивание решений задачи указанного вида для каждой четверти ячеечной конструкции дает решение задачи о равновесии изображенной на фиг. 3 конструкции с условиями (13) (вектор  $e_{1\alpha}$  периодичен). Решение задачи о равновесии четверти элемента ячеечной конструкции с условиями (32) строится аналитически. Это легко воспроизводимое решение не приводится ввиду его громоздкости. Проведенные вычисления показали, что при  $\mu_1 = 2\sqrt{2}$ ,  $\mu_2 = 4 - \sqrt{2}$  коэффициент

$$A_{1122} = \frac{4Eh}{(1-\nu^2)\mu_1\mu_2} \int v^{11'}v^{22'} ds + \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)\mu_1\mu_2} \int w^{11''}w^{22''} ds$$

(интегрирование производится по осям четверти ячеечной конструкции) принимает отрицательное значение. Таким образом, каркас с ЯП  $P_1$ , изображенной на фиг. 3 в указанных здесь же осях, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с точностью, даваемой оценками (16), (20)—(22), ведет себя как сплошная упругая среда с отрицательными коэффициентами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Берлянд Л. В. О колебаниях упругого тела с большим числом мелких пустот.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 2, с. 3—5.
3. Колпаков А. Г. К определению некоторых эффективных характеристик композиционных материалов.— В кн.: Пятый Всесоюзный съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докладов. Алма-Ата: Наука, 1981. 202 с.
4. Берлянд Л. В. Асимптотическое описание пластины с большим числом мелких отверстий.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 10, с. 5—8.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
6. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 379 с.
7. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1964. 635 с.
8. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
10. Колпаков А. Г. Эффективные жесткости композиционных пластинок.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 666—673.
11. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1977. 266 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
30.X.1984