Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 539.3

О ВАРИАЦИИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ВАРИАЦИИ ОБЛАСТИ

Захаревич И. С.

Исследуется поведение при вариации области решения краевой задачи для псевдодифференциального уравнения (ПДУ), функции Грина этой задачи, а также некоторых их локальных и глобальных характеристик. Предлагаются формулы, позволяющие выразить решения широкого класса ПДУ в области через решения в близкой области. Локальные характеристики решения выражаются через локальные характеристики решения в близкой области. В формулы вариации входит двойная асимптотика функции Грина при обоих аргументах, стремящихся к границе области. Вариация этой двойной асимптотики при вариации области выражается через эту же асимптотику. Полученная система формул вариации замкнута. Она позволяет свести решение ПДУ в области к решению обыкновенного дифференциального уравнения в функциональном пространстве. Этим способом можно также находить локальные характеристики решения, не вычисляя самого решения. Если у исходного оператора достаточно много симметрий, то для его функции Грина и ее асимптотик получаются законы сохранения в смысле Нетер. Изучается поведение исследуемых величин при инверсии.

Отметим, что исследование вариаций решений задач при вариации области восходит к Адамару [1], который изучал вариацию конформного отображения и получил формулу, сходную с (1.4). Формула вариации решений краевой задачи для эллиптического дифференциального уравнения получена в [2]. В работах [3, 4] получены формулы вариации для случая оператора задачи о трещине и круговой области. Из формул (1.4) и (1.21) подстановкой получается формула Ирвина [5].

1. Важным частным случаем, для которого будут получены формулы вариации, является задача о трещине с оператором

$$\mathbf{A}u(x_1, x_2) = \Delta \int\limits_S dy_1\, dy_2 \frac{u(y_1, y_2)}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} \tag{1.1}$$

где S — область, занимаемая плоской трещиной нормального отрыва в неограниченном теле. Известно [3], что раскрытие $u(x_1, x_2)$ трещины связано с плотностью $f(x_1, x_2)$ нормальных разрывающих сил ПДУ

$$f(x_1, x_2) = 2(1 - \nu^2) E^{-1} \mathbf{A}u(x_1, x_2) \tag{1.2}$$

с краевым условием $u|_{\partial S} = 0$.

Известно, что решение ПДУ (1.2) имеет при $(x_1, x_2) \to \xi \in \partial S$ асимптотику $u(x_1, x_2) \sim CN(\xi) s^{1/2}$, если $(x_1, x_2) \in S$, кроме того, $\mathbf{A}u(x_1, x_2) \sim N(\xi) s^{-1/2}$, где $(x_1, x_2) \notin S$. Здесь $s = \rho(x, \partial S)$, $N(\xi)$ — коэффициент интенсивности напряжения. При $(x_1, x_2) \notin S$ функция $\mathbf{A}u(x_1, x_2)$ описывает распределение нормальных напряжений на продолжении трещины. Аналогичные свойства имеют решения ПДУ задачи о штампе с остроконечной кромкой [6].

Пусть в общем случае $A(x, y)$ — обобщенная функция на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, S — область в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим оператор $\mathbf{A}$ в области S, ядро которого — функция $A(x, y)$, ограниченная на $S \times S$, т. е.

$$\mathbf{A}: f(x) \mapsto \mathbf{A}f(x) = \int\limits_S A(x, y) f(y)\, dy$$

Предположим, что для некоторого числа $\alpha \in \mathbf{R}$ при достаточно гладких ∂S и f существует единственное решение уравнения $\mathbf{A}u = f$, где $u(x)$ имеет при $x \to x_0 \in \partial S$ асимптотику $N'(x_0)\, s^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$ при некоторой функции N', а $s = \rho(x, \partial S)$.

Введем функцию Грина $G(x, y)$ и функцию влияния

$$E(x, y) = -\int_{\mathbf{R}^n} A(x, z)\, G(z, y)\, dz + \delta(x, y)$$

где $G(x, y)$ при $x \notin S$ или $y \notin S$ полагается равной нулю. Для задачи о трещине функция $E(x, y)$ дает нормальное напряжение в точке x, находящейся на продолжении трещины, при единичной сосредоточенной раскрывающей нагрузке, приложенной в точке y, функция $G(x, y)$ дает раскрытие трещины в точке x при той же нагрузке.

Здесь будут приведены формулы, выражающие вариацию функции Грина для операторов $\mathbf{A}$, обладающих следующими свойствами: $\mathbf{A}$ — самосопряженный псевдодифференциальный оператор; при достаточно гладкой ∂S

$$G(x, y) \sim \frac{g'(x_0, y)\, s^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad x \in S, \quad E(x, y) \sim \frac{e'(x_0, y)\, s^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)}, \tag{1.3}$$
$$x \notin S$$
$$g'(x_0, y) = C(x_0, S)\, e'(x_0, y), \quad y \in S, \quad x_0 \in \partial S, \quad x \to x_0$$
$$s = \rho(x, \partial S)$$

Вывод формул для оператора задачи о трещине дан в пп. 2—5. Там применяются обозначения без штрихов и коэффициенты в асимптотиках не нормируются на Г-функции. В общем случае доказательства проводятся без существенных изменений.

Изменение области будем задавать следующим образом: пусть задано семейство областей S_t, $S_0 = S$, где t — параметр, не обязательно являющийся реальным временем. Для точки $z \in \partial S$ пусть z_t — точка пересечения ∂S_t с перпендикуляром к ∂S_0 в точке z, $w(z)$ — скорость движения z_t по направлению вовне области. Функция $w(z)$, $z \in \partial S$ и будет характеризовать скорость изменения области. Пусть $G_t(x, y)$, $g_t'(z_t, y)$ и $e_t'(z_t', y)$, $x, y \in S_0$, $z \in \partial S_0$ обозначают исследуемые функции для области S_t.

В этом случае

$$\frac{\partial}{\partial t} G_t(x, y)\big|_{t=0} = \int_{\partial S} dz\, w(z)\, e'(z, y)\, g'(z, x) \tag{1.4}$$

и $e'(x, y) \sim \delta_{y_0}(x)\, s^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha+1)$ при $y \in S$, $y \to y_0 \in \partial S$, где $e'(x, y)$ и $\delta_{y_0}(x)$ рассматриваются как обобщенные функции на ∂S, $s = \rho(y, \partial S)$.

Если при $y \to y_0 \in \partial S$, $y \in S$ выполнено условие $E(x, y) \sim e^{\circ}(x, y_0)\, s^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$, то

$$\frac{\partial}{\partial t} E_t(x, y)\big|_{t=0} = \int_{\partial S} dz\, w(z)\, e^{\circ}(x, z)\, e'(z, y) \tag{1.5}$$

Предположим, что $A(x, y)$ зависит только от $x - y$. Рассмотрим следующий член в асимптотике для $e'(x - y)$:

$$e'(x, y) \sim \delta_{y_0}(x)\, s^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha) + \varepsilon'(x, y_0)\, s^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$$
$$y \to y_0 \in \partial S$$

В этом случае

$$(1.6)\qquad \frac{\partial}{\partial t} g_t'(x_t, y)|_{t=0} = \int\limits_{\partial S} dz\,(w(z) - (n_z, n_x)\,w(x))\,g'(z, y)\,\varepsilon'(z, x) - $$
$$- (n_x, \partial/\partial y)\,g'(x, y)\,w(x)$$

а если выполнено условие, сформулированное перед формулой (1.5), то

$$(1.7)\qquad \frac{\partial}{\partial t} e_t^\circ(x, y_t)|_{t=0} = \int\limits_{\partial S} dz\,(w(z) - (n_z, n_y)\,w(y))\,e^\circ(x, z)\,\varepsilon'(z, y) - $$
$$- (n_y, \partial/\partial x)\,e^\circ(x, y)\,w(y)$$

где n_q — внешняя нормаль к ∂S в точке $q \in \partial S$.

Кроме того, в терминах $g'(x, y)$ и $\varepsilon'(x, y)$ вычисляются все дальнейшие члены асимптотики $G(x, y)$ при $x \to x_0 \in \partial S$. Например, если

$$(1.8)\qquad G(x, y) \sim g'(x_0, y)\, s^\alpha/\Gamma(\alpha + 1) + g'_{(1)}(x_0, y)\, s^{\alpha+1}/\Gamma(\alpha + 2)$$
$$x \to x_0 \in \partial S$$

где $s = \rho(x, \partial S)$, то

$$(1.9)\qquad g_{(1)}'(x, y) = \int\limits_{\partial S} dz\,(n_z, n_x)\,g'(z, y)\,\varepsilon'(z, x) + (n_x, \partial/\partial y)\,g'(x, y)\,w(x)$$

и для вектора l, касательного к ∂S в x

$$(1.10)\qquad \left(l, \frac{\partial}{\partial x}\right) g'(x, y) + \left(l, \frac{\partial}{\partial y}\right) g'(x, y) +$$
$$+ \int\limits_{\partial S} dz\,(l, n_z)\,g'(z, y)\,\varepsilon'(z, x) = 0$$

Если $A(x, y)$ зависит только от расстояния от x до y, то кроме (1.10) выполнено еще несколько законов сохранения в смысле Нетер. Пусть $a \perp (x - y)$, а для $n \geqslant 3$ пусть $b \perp a, (x - y)$.

Тогда

$$(1.11)\qquad \int\limits_{\partial S} dz\,((z - x, x - y)(n_z, a) - (z - x, a)(n_z, x - y)) \times$$
$$\times g'(z, y)\,\varepsilon'(z, x) + |x - y|^2 (a, \partial/\partial y)\,g'(x, y) = 0$$

$$(1.12)\qquad \int\limits_{\partial S} dz\,((z - y, b)(n_z, a) - (z - y, a)(n_z, b))\,g'(z, y)\,\varepsilon'(z, x) = 0$$

Если же $A(x, y)$ — однородная функция от $x - y$ степени однородности β, то $\beta = -n - 2\alpha$ и

$$(1.13)\qquad (2n + \beta)\,g'(x, y) + \left(y - x, \frac{\partial}{\partial y}\right) g'(x, y) +$$
$$+ \int\limits_{\partial S} dz\,(z - x, n_z)\,g'(z, y)\,\varepsilon'(z, x) = 0$$

Для произвольной функции $A(x, y)$, удовлетворяющей предположениям (1.3), замкнутую формулу для вариации получить не удается, можно только написать соотношение

$$(1.14)\qquad \frac{\partial}{\partial t} g_t'(x_t, y)|_{t=0} + g_{(1)}'(x, y)\,w(x) = \int\limits_{\partial S} dz\,w(z)\,g'(z, y)\,\varepsilon'(z, x)$$

Если же $A(x, y)$ удовлетворяет соотношениям и однородности, и инвариантности относительно вращений, то она имеет вид $|x - y|^\beta$ и обладает еще некоторыми свойствами инвариантности относительно инверсий. Точнее, при инверсии относительно окружности с центром в нуле и радиусом R, если образ точки x обозначить x_i, области S — S_i, то

$$G_S(x, y) = R^{2n-4\alpha}|x|^{2\alpha-n}|y|^{2\alpha-n}G_{S_i}(x_i, y_i) \tag{1.15}$$

$$g_S'(x, y) = R^{2n-2\alpha}|x|^{-n}|y|^{2\alpha-n}g_{S_i}'(x_i, y_i) \tag{1.16}$$

где индексы у функций G и g' означают области, для которых они вычисляются. В этом случае справедливы следующие законы сохранения: для любого вектора a

$$\begin{aligned}(2(y-x, a)(y-x) - |y-x|^2a, \partial/\partial y)g'(x, y) + \\ + (2n+\beta)(y-x, a)g'(x, y) = \\ = \int_{\partial S} dz(2(z-x, a)(z-x, n_z) - |z-x|^2(a, n_z))g'(z, y)\varepsilon'(z, x)\end{aligned} \tag{1.17}$$

Всего для функции g получается $(n+1)(n+2)/2$ тождеств (включая (1.14)), что равно размерности конформной группы n-мерного пространства. Кроме того, при таком операторе A можно получить формулу вариации для ε', которую для удобства напишем при $n = 2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_t'(x_t, y_t)|_{t=0} = \int_{\partial S} dz[w(z) - w(x)(n_z, n_x) - (x-y, n_xw(x) - \\ - n_yw(y))(z-x, n_z)|x-y|^{-2} - (x-y, l_xw(x) - l_yw(y)) \times \\ \times (z-x, l_z)|x-y|^{-2}]\varepsilon'(z, x)\varepsilon'(z, y) - n(x-y, n_xw(x) - \\ - n_yw(y))|x-y|^{-2}\varepsilon'(x, y)\end{aligned} \tag{1.18}$$

(для $n > 2$ третье слагаемое в квадратных скобках будет иметь более сложный вид). Здесь l_q — единичный вектор касательной к ∂S в точке q. В этой формуле использованы только трансформационные свойства $\varepsilon'(x, y)$ при параллельных переносах, поворотах и растяжениях. При $w(z)$ вида (z, n_z), (z, l_z), (a, n_z), где $a \in R^2$, из формулы (1.18) получается четыре закона сохранения для ε', аналогичных (1.10)—(1.13) (из них два будут линейно независимы). Используя тождество

$$\varepsilon_S'(x, y) = R^{2n}|x|^{-n}|y|^{-n}\varepsilon_{S_i}'(x_i, y_i) - \alpha(n_y, y)|y|^{-2}\delta(x, y) \tag{1.19}$$

аналогичное (1.15), (1.16), можно написать законы сохранения для ε', аналогичные (1.17) для g'.

Для вариации решения уравнения $Au = f$ (A удовлетворяет (1.3)) справедливы формулы

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x)|_{t=0} = \int_{\partial S} dz N'(f, z)w(z)g(z, x) \tag{1.20}$$

$$N'(f, z) = \int_S dx\, e'(z, x)f(x) \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}N'(f, x)|_{t=0} = \int_{\partial S} dz(w(z) - (n_z, n_x)w(x))N'(f, z)\varepsilon'(z, x) + \\ + N'\left(\left(n_x, \frac{\partial}{\partial y}\right)f(y), x\right)w(x)\end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь N' — локальная характеристика решения u у ∂S, точнее, $u(x) \sim N'(f, x_0)s^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$, $s = \rho(x, \partial S)$, $x \to x_0 \in \partial S$. Формула (1.22) справедлива, если $A(x, y)$ зависит только от $x - y$.

Эти формулы можно применить для вычисления $N'(f, x)$ при полиномиальной или сосредоточенной нагрузке $f(x)$ или натрузке $f(x)$ в виде экспоненциального полинома, в произвольной области S, если известно решение этой задачи в какой-либо, например круговой, области S', а также функция $\varepsilon'(x, y)$ для этой области. Действительно, включим области S и S' в семейство областей S_t с $S_0 = S'$, $S_1 = S$. Формулы (1.18), (1.6) дают систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для $\varepsilon_t'(x, y)$ и $e'(x, y)$, а формулы (1.18), (1.22) дают то же самое для $\varepsilon_t'(x, y)$ и $N'(\exp(a, \cdot), x)$.

Для полиномиальной нагрузки $P(x)$ формулы (1.18) и (1.22) дают систему из $k+1$ обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка для $\varepsilon_t'(x, y)$ и $N'(P_i, x)$, $i = 1, \ldots, k$, где $P_1 = P$, а $P_2, \ldots, P_k$ — все ненулевые частные производные многочлена P. Заметим, что при $A(x, y) = |x - y|^\beta$ можно избавиться в (1.6) от производных $g'(x, y)$ по y при помощи (1.10), (1.11) и (1.13).

Аналогично можно при помощи (1.20) вычислять и решение u ПДУ $\mathbf{A}u = f$.

Предположим, что в условиях задачи о трещине для данного материала существует зависимость вида

$$w(x) = F(N(P, x)) \tag{1.23}$$

скорости роста трещины в точке x от коэффициента интенсивности напряжения в x. В таком случае можно понимать (1.23), (1.21), (1.6) и (1.18), а для полиномиальной нагрузки — (1.23), (1.22), (1.18) как уравнения эволюции трещины со временем.

Для областей вида «полуплоскость» и «круг» и оператора задачи о трещине формулы для $e'(x, y)$ и $\varepsilon'(x, y)$ получаются из формул п. 6 при учете соотношений

$$e' = \sqrt{\pi}e, \quad \varepsilon' = \varepsilon\pi/2$$

2. Докажем формулу (1.4) для вариации функции Грина. Для простоты изложения доказательство будет проведено для случая оператора (1.1) задачи о трещине.

Суть метода заключается в использовании переменной криволинейной системы координат, в которой ∂S описывается уравнением, не зависящим от t. В этой системе координат от t зависит оператор и возможно применение обычной теории возмущений в форме $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mathbf{X}_n(\mathbf{B} - \mathbf{X}_n^{-1})\mathbf{X}_n$, где $\mathbf{X}_k$ — очередные приближения к оператору $\mathbf{B}^{-1}$. Если $\mathbf{X}_n$ имеет первый порядок близости к $\mathbf{B}^{-1}$, то $\mathbf{X}_{n+1}$ будет иметь второй порядок близости. Так как во втором слагаемом есть малый множитель, то $\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}(\mathbf{B} - \mathbf{X}^{-1})\mathbf{X}$ имеет второй порядок близости к $\mathbf{B}^{-1}$ в том случае, если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ имеют первый порядок близости.

Пусть $v(x)$ — векторное поле на плоскости, $h_t(x)$ — решение уравнения $\partial h_t(x)/\partial t = v(h_t(x))$, $h_0(x) = x$. Пусть $q_t = h_t(q)$. Определим действие h_t на функции и на плотности по формулам $h_{t*}f(x) = f(h_{-t}(x))$, $h_{t*}(f(x)\,dx) = f(h_{-t}(x))\,d(h_{-t}(x))$. При действии на функцию двух переменных верхний индекс у h_{t*} будет обозначать переменную, на которую действует h_{t*}.

В качестве $\mathbf{X}$ возьмем $h_{t*}{}^x h_{t*}{}^y G(x, y)\,dy$ (для удобства заменим $G(x, y)$ плотностью $G(x, y)\,dy$). В качестве $\mathbf{Y}$ возьмем $G(x, y)\,dy$. Оператор $\mathbf{B}_t$ будет ограничением оператора $\mathbf{A}$ на область S_t. Тогда

$$h^y_{-t*}Z_t(x, y) = h^x_{t*}G(x, y) - \int G(x, z)\,dz\left(\int A(z, q)\,dq\,h^q_{t*}G(q, y) - \right.$$

$$\left. - \delta_{zy} + h^z_{t*}E(z, y)\right) = h^x_{t*}G(x, y) - \int dq\,\delta_{xq}h^q_{t*}G(q, y) +$$

$$+ \int dq\,E(q, x)\,h^q_{t*}G(q, y) + G(x, y) - \int dz\,G(x, z)\,h^z_{t*}E(z, y)$$

Можно считать, что $v(x) = v(y) = 0$. Тогда

$$G_t(x, y) = Z_t(x, y) + o(t) = G(x, y) + \int dq\,E(q, x)\,h^q_{t*}G(q, y) -$$

$$- \int dz\,h^z_{t*}E(z, y)\,G(x, z) + o(t)$$

Подынтегральные члены отличны от 0 только в малой окрестности ∂S. Введем в ней координаты l и n, где l — основание перпендикуляра, опущенного из точки на ∂S, а n — координата точки на этом перпендикуляре, отсчитываемая от ∂S вовне. Так как функция $w(x)$ из п. 1 совпадает с n-компонентой поля $v(x)$, $x \in \partial S$, первый интеграл есть

$$\int\limits_{l\in\partial S,\, w(l)\geqslant 0} dl \int\limits_0^{tw(l)+o(t)} dn\,(e(l,x)\,n^{-1/2}+o(n^{-1/2}))\,(g(l,x)\,(tw(l)-n)^{1/2})+$$
$$+\,o((tw(l)-n)^{1/2}) = t\frac{\pi}{2}\int\limits_{l\in\partial S,\, w(l)\geqslant 0} dle(l,x)\,g(l,y)+o(t),\quad t\geqslant 0$$

Вычислив аналогично второй интеграл, получим формулу (1.4). Формула (1.5) получается применением оператора A к обеим сторонам (1.4).

3. Дифференцируя асимптотику (1.8) функции $G(x,y)$ при $x \to x_t \in \partial S_t$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}G_t(x,y)\big|_{t=0} = \frac{1}{2}w(x)\,g(x,y)\,s^{-1/2}+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial t}g_t(x_t,y)\big|_{t=0}+\frac{3}{2}w(x_0)\,g_{(1)}(x_0,y)\right)s^{1/2}+ds^{1/2})$$

Сравнивая с (1.4), получим, что $e(z,x) = \pi^{-1}\delta_{x_0}(z)+O(s^{1/2})$ и

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t(x_t,y)\big|_{t=0} = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\partial S} dzw(z)\,g(z,y)\,\varepsilon(z,x)-\frac{3}{2}g_{(1)}(x,y)\,w(x) \tag{3.1}$$

где ε — коэффициент при $s^{1/2}$ в асимптотике функции e.

Если семейство областей S_t получается из S переносом на вектор n_x нормали ∂S в точке x, то $w(z) = (n_z, n_x)$. Если к тому же $A(z,y)$ зависит только от $z-y$, то $g_t(x_t,y) = g(x, y-tn_x)$. Сравнивая это выражение с (3.1), получим (1.14), т. е.

$$-\left(n_x, \frac{\partial}{\partial y}\right)g(x,y) = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\partial S} dz\,(n_z,n_x)\,g(z,y)\,\varepsilon(z,x)-\frac{3}{2}g_{(1)}(x,y)$$

Из последних двух формул выводится (1.6). Аналогично выводится и формула (1.7).

4. Если оператор инвариантен относительно преобразования плоскости Φ, то $G_{\Phi S}(\Phi(x), \Phi(y)) = G_S(x,y)$ и т. д. Поэтому если оператор A инвариантен относительно группы диффеоморфизмов h_t, порожденной векторным полем v, то $g_t(x_t,y) = g(h_{-t}(x_t), h_{-t}(y))$, где $S_t = h_t S$. Отсюда вычисляется $\partial g_t(x_t,y)/\partial t$ и, сравнивая это выражение с (1.6), получаем законы сохранения для g. Аналогичные рассуждения можно провести и в том случае, когда при преобразовании плоскости Φ оператор умножается на константу. Из инвариантности относительно поля $v(z) = a$, при $a \perp n_x$, получается (1.10) (поле v порождает параллельные переносы), относительно полей $v(z) = (z-x, x-y)\,a-(z-x, a)(x-y)$ и $v(z) = (z-x, a)\,b-(z-x, b)\,a$, где $b \perp a$, $x-y$ и $a \perp x-y$, получаются (1.11) и (1.12) (поля v порождают повороты относительно точки x), относительно поля $v(z) = z-x$ получается (1.13) (поле v порождает гомотетии относительно x).

Для доказательства соотношений (1.15), (1.16), (1.19) заметим, что из подобия треугольников OXY и OX_iY_i следует $dx_i = |x|^{-2n}R^{-2n}dx$, $|x_i-y_i| = |x-y|\,R^2\cdot|x|^{-1}|y|^{-1}$. Поэтому из (1.15) формулы (1.16) и (1.19) следуют без труда. Для доказательства (1.15) достаточно доказать, что если подействовать на правую часть оператором A, то в области получим δ-функцию в точке y. Но

$$\int dz\,dyA(x,y)\,G(y,z)\,\varphi(z) = \int dz\,dyA(x_i,y_i)\cdot R^{-2\beta}|x|^{\beta}|y|^{\beta}G_{S_i}(y_i,z_i)\times$$
$$\times R^{2n+2\beta}|y|^{-2n-\beta}|x|^{-2n-\beta}\varphi(z) = \int dz_i\,dy_i\,|x_i|^{-\beta}|z_i|^{\beta}A(x_i,y_i)\,G(y_i,z_i)\,\varphi(z_{ii})$$

и $\operatorname{Supp}\varphi(z_i)\,|z|^{\beta} \subset S_i$, если $\operatorname{Supp}\varphi \subset S$, поэтому последний интеграл есть $|x_i|^{-\beta}\varphi(x_{ii})\,|x_i|^{\beta} = \varphi(x)$.

Отметим, что слагаемое с δ-функцией в формуле (1.19) получается из первого члена в асимптотике функции e с учетом нелинейности замены $\rho(y, \partial S) \mapsto \rho(y_i, \partial S_i)$. Формула (1.17) получается из-за ковариантности (1.1) относительно векторного поля

$\vartheta(z) = 2(z - x, a)(z - x) - (z - x)^2 a$, которое порождает композицию инверсии с отражением.

5. Для доказательства формулы (1.18) заметим, что при $w(x) = w(y)$ она упрощается до

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_t(x_t, y_t) = \frac{\pi}{2}\int dz w(z)\,\varepsilon(z, x)\,\varepsilon(z, y)$$

В этом виде она непосредственно следует из (1.6), так как g и e пропорциональны.

В общем случае можно подобрать такую комбинацию сдвигов, поворотов и растяжений φ_t, что $\varphi_t(x) = x_t$, $\varphi_t(y) = y_t$.

Соответствующее φ векторное поле имеет вид

$$w(x)\,n_x + (w(y)\,n_y - w(x)\,n_x,\ y - x)\,|x - y|^{-2}(y - x) + \\ + (w(y)\,n_y - w(x)\,n_x,\ a)\,|a|^{-2}\,a$$

где $a \neq 0$, $a \perp x - y$. Так как A при преобразовании φ только умножается на постоянную, то

$$\varepsilon_{\varphi_t S}(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) = \exp(-2(w(y)\,n_y - w(x)\,n_x, \\ y - x)\,|x - y|^{-2}\,t + o(t))\,\varepsilon_S\ \ (x, y)$$

Для семейства областей $\varphi_{-t}S_t$ выполнено условие $w(x) = w(y) = 0$, поэтому формула (1.18) следует из выведенных формул преобразования для ε.

Формула (1.20) выводится аналогично формуле (1.4), а формула (1.22)— формуле (1.6).

6. Функция $E(x, y)$ известна для областей S в виде полуплоскости и круга. Для полуплоскости [7]

$$E(x, y) = \pi^{-2}\,|x - y|^{-2}\,\rho(x, \partial S)^{-1/2}\rho(y, \partial S)^{1/2}$$
$$e(x, y) = \pi^{-2}\,|x - y|^{-2}\,\rho(y, \partial S)^{1/2}$$

Легко проверяется асимптотическая формула для $e(x, y)$ при $y \to \partial S$. Кроме того, $\varepsilon(x, y) = \pi^{-2}\,|x - y|^{-2}$. Отсюда для круговой области радиуса R получаем формулу

(6.1) $$e(x, y) = \pi^{-2}\,|x - y|^{-2}\,[s(2R - s)]^{1/2}\,(2R)^{-1/2}$$

выведенную в [6] другим способом. Здесь $s = \rho(y, \partial S)$. Кроме того

(6.2) $$\varepsilon(x, y) = \pi^{-2}\,|x - y|^{-2} - (2\pi R)^{-1}\,\delta_y(x)$$

Вычислим в первом приближении коэффициент интенсивности напряжения для эллиптической трещины при постоянной нагрузке. В формуле (1.22) второе слагаемое в этом случае исчезает. Для круговой трещины из (1.21) и (6.1) получаем $N(1, x) = \sqrt{2R}/\pi$.

При $w(x) = -\sin^2\varphi$, где φ — угловая координата точки x на окружности, окружность будет деформироваться в эллипс с осями $a = R$, $b = R - t$. Введем на эллипсе стандартную угловую координату β по правилу $x_1 = a\cos\beta$, $x_2 = b\sin\beta$. В этом случае $\beta(x_t) = \varphi(x) + O(t)$. Так как $N(1, x)$ при $t = 0$ не зависит от x, производные N по t при $\beta = \mathrm{const}$ и $\varphi = \mathrm{const}$ совпадают. После вычислений получим

$$\left.\frac{\partial}{\partial(a - b)}\right|_{a=\mathrm{const}} N_{\mathrm{ell}}(1, x) = -\frac{\cos^2\varphi}{\pi\sqrt{2R}}$$

Выберем из выражений с такой производной и с нужным значением при $a = b$ выражение, симметричное относительно a и b (такой выбор, конечно, будет влиять на величину остаточного члена). Наиболее естественная формула следующая:

(6.3) $$N_{\mathrm{ell}}(1, \varphi) = \sqrt{2}\sqrt{b\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi}/\pi + O((a - b)^2 a^{-3/2})$$

Эта формула полностью согласуется с приведенной, например, в [8] точной формулой (β — стандартная координата на эллипсе, указанная выше)

$$N_{\text{ell}}(1, \beta) = (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cdot b^2/a^2)^{1/4} \sqrt{b}/\sqrt{2} \mathrm{E}(k), \; k^2 = 1 - b^2/a^2$$

Величину остаточного члена в (6.3) можно продемонстрировать следующим образом: если, как полагается в (1.22), под φ понимать угол между большой полуосью и направлением из центра в точку x, то формула (6.3) дает одинаковые относительные ошибки при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, т. е. в вершинах эллипса (таким образом, она дает правильное отношение величин коэффициентов интенсивности в этих точках), причем остаточный член составляет в вершинах при $b/a = 0{,}5$ менее 9%, при $b/a = 0{,}3$ около 27%, в точке с координатой $\varphi = \pi/4$ при $b/a = 0{,}5$ менее 2%, при $b/a = 0{,}3$ около 4,5%.

Отметим в заключение, что из формул (1.18) и (6.2) следует, что для любой области S при $x \to y$

$$\varepsilon(x, y) = \pi^{-2} |x - y|^{-2} - (2\pi)^{-1} k_x \delta_x (y) + O(1)$$

где k_x — кривизна ∂S в точке x.

Автор благодарит Р. В. Гольдштейна за постановку задачи, рукодство работой и помощь при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hadamard J.* Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques elastiques entrastrées.— Mém. Acad. Sci. Paris, Sav. etr., 1908, v. 3. No. 4, 128 p.
2. *Крейн С. Г.* Поведение решений эллиптических задач при вариации области.— Studia Math., 1968, v. 31, No. 4, p. 411—424.
3. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
4. *Моссаковский В. И.*, *Моссаковская Л. Р.* Прочность упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой и круговой.— В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости: Сб. статей. Днепропетровск: Изд-е Днепропетр. ун-та, 1977, вып. 22, с. 56—74.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
7. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.
8. *Shah R. C.*, *Kobayashi A. S.* Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading.— Engng. Fract. Mech., 1971, v. 3, No. 1, p. 71—96.

Москва

Поступила в редакцию
31.I.1984