Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 539.3

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА—ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

Симонов И. В.

Обобщается метод решения краевой задачи Римана—Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами [1]. Показано, что допускают точные решения следующие статические задачи о составной упругой плоскости с тремя типами условий сопряжения: 1) линия склейки ослаблена системой нагруженных щелей и трещиной поперечного сдвига или берега одной из щелей частично соприкасаются, или одна из щелей расклинивается жесткой вставкой; 2) линия склейки усилена системой тонких жестких включений и имеется одна произвольно расположенная зона расслоения; 3) упругие полуплоскости соприкасаются (с проскальзыванием) на некотором участке их границ, на остальных частях границ заданы смешанные условия в смещениях и в напряжениях.

В общем случае краевая задача Римана — Гильберта для многих функций приводится к задаче линейного сопряжения, затем — к интегральным уравнениям Фредгольма [2]. Замкнутые решения получены в некоторых частных случаях [3—5]. Из приложений укажем на работы [6, 7], где рассмотрены задачи о разрезах на границе раздела двух упругих сред при одновременном учете двух типов физических условий сопряжения.

1. Рассмотрим следующую граничную задачу теории функций комплексного переменного. Найти аналитическую в верхней полуплоскости $z = x + iy$ вектор-функцию $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z))$, исчезающую на бесконечности, непрерывно продолжимую на действительную ось $y = +0$, кроме, быть может, точек a_k, b_k, ± 1 ($|a_k|$, $|b_k| \geqslant 1$, $k = 1, \ldots, N$, $2 \leqslant N < \infty$), в окрестности которых имеют место оценки

$$|\Phi| < C/|z - a|^\rho, \quad C > 0, \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{1.1}$$

где a — любая из точек a_k, b_k, ± 1, по следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}(D\Phi)(x) = f(x) \quad \text{на} \quad l = \{z = x + i0,\ x \neq a\} \\ D = D_m, \quad x \in l_m \quad (m = 0, 1, 2); \quad f(x) \in H_\varepsilon \quad (f(x) \to 0, \\ |x| \to \infty) \\ l_0 =]-1, 1[, \quad l_1 = \{a_k b_k\}, \quad l_2 = l - l_0 - l_1\end{gathered} \tag{1.2}$$

где D — неособенная кусочно-постоянная матрица.

Таким образом, разыскивается решение задачи Римана — Гильберта (1.2) в классе функций h_0 [2], фиксированном оценками (1.1) и условием на бесконечности. Граница области разбита на систему интервалов l_1, l_2 и выделенный интервал l_0. Не умаляя общности, полагаем $f(x) = 0$, $x \in l_0$; $D_0 = E$, где E — единичная матрица.

В тривиальном случае треугольных матриц D_1 и D_2 векторная задача (1.2) сразу расщепляется на цепочку последовательно решаемых скалярных задач. Если одна из матриц D_1, D_2 содержит только действительные или только мнимые элементы, то линейными преобразованиями искомой функции сначала можно добиться равенства двух (из трех) матриц D, а затем прийти к задаче сопряжения, допускающей расщепление путем приведения матричного коэффициента задачи к диагональному или к треугольному виду.

Ниже рассматривается случай, когда верхние строки матриц D_1 и D_2 — действительные, а нижние — мнимые числа. Линейная подстановка $\Phi^\circ = D_2^\circ\Phi$, где D_2° — действительная матрица, образованная из элементов матрицы D_2 (верхние строки этих матриц совпадают, а нижние различаются лишь множителем i), приводит к задаче (1.2), в которой

$$D_0 = E, D_1 = \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ id_{21} & id_{22} \end{Vmatrix}, \quad D_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

$$d_{mj} = \bar{d}_{mj} \neq 0, \quad m, j = 1, 2$$

Черта означает комплексное сопряжение, индекс $^\circ$ у вектор-функции снимем.

Задача остается существенно связанной — матрица D_1 не содержит нулевых элементов и все три матрицы различны.

Аналитически продолжим функцию Φ через интервал l_0. Плоскость z с разрезами $y = \pm 0$, $|x| \geqslant 1$ конформным преобразованием $\omega = \xi + i\eta = z + \sqrt{z^2 - 1}$ переведем в верхнюю полуплоскость ω ($z = {}^1/_2 (\omega + \omega^{-1})$ — преобразование Жуковского). Соответствие границ и точек таково. Верхние берега разрезов $l_1^+ + l_2^+$ перейдут в лучи $L_1' + L_2' = \{|\xi| < 1, \xi \neq A_k, B_k\}$ на действительной оси ω-плоскости с выколотыми точками $A_k, B_k \Leftrightarrow a_k, b_k$; нижним берегам разрезов $l_1^- + l_2^-$ соответствуют интервалы $L_1'' + L_2'' = \{|\xi| < 1, \ \xi \neq A_k^{-1}, B_k^{-1}\}$. Отрезок $[-1, 1]$ перейдет в единичную полуокружность, расположенную в верхней полуплоскости ω (точки $z = \pm 1$ остаются неподвижными), так что верхняя (нижняя) полуплоскость z переходит во внешность (внутренность) этой полуокружности. Будем также иметь в виду следующие асимптотики:

$$\omega(z) \sim 2z, \quad y > 0; \quad \omega(z) \sim (2z)^{-1}, \quad y < 0 \quad (z \to \infty) \tag{1.4}$$

При $\eta = 0$ из (1.2) следует (не меняем обозначения функций)

$$\operatorname{Im}(D\Phi) = f(\xi), \quad |\xi| > 1; \quad \operatorname{Im}(\bar{D}\Phi) = -f(\xi), \quad |\xi| < 1$$

$$D = D_m, \quad \xi \in L_m = L_m' + L_m'', \quad m = 1, 2$$

Случай (1.3) является нетривиальным вариантом задачи, когда знак сопряжения в краевом условии при $|\xi| < 1$ можно снять и привести задачу к виду

$$\operatorname{Im}(D\Phi) = g(\xi), \quad |\xi| < \infty \tag{1.5}$$

$$g = (g_1, g_2) = f(\xi), \quad |\xi| > 1; \quad g_m(\xi) = (-1)^m g_m(1/\xi)$$

$$|\xi| < 1$$

$$\Phi(\omega) = \overline{\Phi(1/\bar{\omega})}, \quad \eta \geqslant 0 \tag{1.6}$$

Примечательно, что в (1.5) матричный коэффициент D принимает только два значения на действительной оси — краевое условие на l_0 перешло в (1.6), т. е. в разряд дополнительных условий задачи Римана — Гильберта (1.5).

Кусочно-голоморфный вектор

$$Y(\omega) = D_2\Phi(\omega), \quad \eta \geqslant 0; \quad Y(\omega) = \overline{Y(\bar{\omega})}, \quad \eta \leqslant 0 \tag{1.7}$$

на линии скачков $\eta=0$ должен удовлетворять условиям сопряжения, вытекающим из (1.5), (1.7)

$$(1.8)\qquad Y^+=D'Y^-+2iBg\,(L_1),\ Y^+=Y^-+2ig\,(L_2)$$

$$D'=\begin{Vmatrix} d_0 & id_1 \\ id_2 & d_0 \end{Vmatrix},\quad d_0=\frac{1+\alpha}{1-\alpha},\quad d_1=\frac{2d_{12}}{d_{11}(1-\alpha)}$$

$$d_2=\frac{-2d_{21}}{d_{22}(1-\alpha)},\quad \alpha=\frac{d_{12}d_{21}}{d_{11}d_{22}},\quad B=D_2D_1^{-1}$$

где индексы плюс (минус) означают сужение на ось $\eta=0$ сверху (снизу). В силу невырожденности матрицы D_1 и условия $d_{mj}\neq 0$ имеем $\alpha\neq 0$, 1, ∞. Линейная подстановка $Y=TW$, где T — диагонализирующая матрица, приводит к расщепленной задаче сопряжения для кусочно-голоморфного вектора $W=(W_1,W_2)$

$$(1.9)\qquad W^+=\Lambda W^-+2iW^\circ\,(L_1),\ W^+=W^-+2iW^\circ\,(L_2)$$

$$\Lambda=T^{-1}D'T=\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix},\quad T=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ t & -t \end{Vmatrix},\quad t=\begin{cases} ib, & \alpha>0 \\ b, & \alpha<0 \end{cases}$$

$$b=\sqrt{\left|\frac{d_2}{d_1}\right|},\quad \lambda_1=\lambda_2^{-1}=\frac{1-s\sqrt{\alpha}}{1+s\sqrt{\alpha}},\quad \alpha>0,\quad s=\operatorname{sgn}\left(\frac{d_{21}}{d_{22}}\right)$$

$$\lambda_1=\overline{\lambda}_2=\frac{1-is\sqrt{-\alpha}}{1+is\sqrt{-\alpha}},\quad \alpha<0$$

$$W^\circ(\xi)=T^{-1}Bg(\xi)\,(L_1),\ W^\circ(\xi)=T^{-1}g(\xi)\ (L_2)$$

$$(1.10)\qquad D_2^{-1}TW(\omega)=\overline{D_2^{-1}TW(1/\overline{\omega})},\quad TW(\omega)=\overline{TW(\overline{\omega})}$$

Полной эквивалентности задачи (1.9), (1.10) исходной постановке (1.1), (1.2) добьемся подчиняя поведение функции $W(\omega)$ в особых точках оценкам, следующим из (1.1) и определений этого пункта, и требуя исчезновения на бесконечности согласно (1.4). Из равенств (1.3) следует, что показатели особенностей канонических решений [2, 8] вблизи точек $z=\pm1$ равны $(0, -^1/_2)$. Другими словами, матрицы D выбраны такими, что разрывы краевых условий в точках ±1 порождают только корневые особенности у функции $\Phi(z)$. Тогда функции $\Phi(\omega)$, $Y(\omega)$, $W(\omega)$ имеют простые полюса в точках $\omega=\pm1$. Оценки поведения этих функций вблизи особых точек $A_k^{\pm1}$, $B_k^{\pm1}\neq\pm1$ аналогичны (1.1); в нуле поведение $W(\omega)$ регулируется первым равенством (1.10). Класс аналитических функций с указанным поведением вблизи точек $\omega=0$, ∞, ±1, $A_k^{\pm1}$, $B_k^{\pm1}$ и разрывом на $\eta=0$ обозначим H_W.

Равенства (1.9) представляют собой условия двух независимых скалярных задач линейного сопряжения — матрица Λ диагональна. Общее решение задачи (1.9) в классе H_W ищем в виде суммы частного решения неоднородной задачи и общего решения соответствующей однородной задачи сопряжения [8]

$$(1.11)\qquad W_m(\omega)=F_m(\omega)G_m(\omega)I_m(\omega)+F_m^\circ(\omega)G_m^\circ(\omega)R_m(\omega)$$

$$I_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W_m^\circ(t)\,dt}{F_m^+(t)G_m^+(t)(t-\omega)},\quad R_m=\sum_{n_1}^{n_2}r_n^{(m)}\omega^n\quad (m=1,2)$$

$$(1.12)\qquad \frac{G_m^+(\xi)}{G_m^-(\xi)}=\frac{G_m^{\circ+}(\xi)}{G_m^{\circ-}(\xi)}=\begin{cases} \lambda_m, & \xi\in L_1 \\ 1, & \xi\in L_2 \end{cases}$$

Здесь вспомогательные функции G ликвидируют разрывы коэффициентов задачи в точках $A_k^{\pm1}$, $B_k^{\pm1}$; назначение функций F — обеспечивать наличие полюсов у решения в точках ± 1; R — рациональные функции вместо полиномов [8], поскольку величины $G_m{}^\circ$ будут определены как канонические решения класса h_0 [8], умноженные на полиномы; $n_1 \leqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$; $r_n^{(m)}$ — произвольные комплексные постоянные.

Для дальнейшего понадобятся следующие свойства свободного члена $W^\circ(\xi)$:

(1.13) $$\begin{aligned}&W_m{}^\circ(\xi) = -\overline{W_m{}^\circ(1/\overline{\xi})}, \quad |\xi| < \infty; \quad W_m{}^\circ(\xi) = \lambda_m \overline{W_j{}^\circ(\xi)} \quad (L_1)\\ &W_m{}^\circ(\xi) = W_j{}^\circ(\xi) \quad (L_2), \quad \alpha > 0\\ &W_m{}^\circ(\xi) = -\overline{W_j{}^\circ(1/\overline{\xi})}, \quad |\xi| < \infty; \quad W_m{}^\circ(\xi) = \lambda_m \overline{W_m{}^\circ(\xi)} \quad (L_1)\\ &W_m{}^\circ(\xi) = \overline{W_m{}^\circ(\xi)} \quad (L_2), \quad \alpha < 0 \quad (m, j = 1, 2; m \neq j)\end{aligned}$$

В отличие от изученных случаев [2] необходимо удовлетворить двум (а не одному) дополнительным требования (1.10). Первое является следом краевого условия на l_0 из (1.2), второе — условием продолжения $Y(\omega)$ через действительную ось. В этих соотношениях компоненты вектора W остаются связанными, однако общие принципы построения решения задачи линейного сопряжения при наличии дополнительного условия типа условия продолжения [2] переносятся на рассматриваемый случай.

Пусть $W \in H_W$ и $Y = TW$ — некоторые решения (1.9) и (1.8). Вектор $Y_*(\omega) = {}^1/_2 (Y(\omega) + Y(\overline{\omega}))$ также является решением (1.8), и, кроме того, подчиняется правилу доопределения из (1.7). Образуем функцию $\Phi_*(\omega) = D_2 Y_*(\omega)$. Можно доказать, что линейная комбинация $\Phi(\omega) = {}^1/_2 (\Phi_*(\omega) + \overline{\Phi_*(1/\overline{\omega})})$ удовлетворяет (1.5), (1.6), т. е. всем требованиям задачи. Таким образом, действуя по этим общим правилам, можно получить решение исходной краевой задачи, но оно будет громоздким. Существенного упрощения формул достигнем специальным выбором функций F, G, R, таким, чтобы решение (1.11) сразу подчинялось условиям (1.14), эквивалентным (1.10)

(1.14) $$\begin{aligned}&W_1(\omega) = \overline{W_2(\overline{\omega})}, \ W_1(\omega) = \overline{W_1(1/\overline{\omega})}, \ \alpha > 0\\ &W_1(\omega) = \overline{W_2(1/\overline{\omega})}, \ W_1(\omega) = \overline{W_1(\overline{\omega})}, \ \alpha < 0\end{aligned}$$

Тогда искомое решение будет выражено через одну компоненту $W_1(\omega)$ посредством формул

(1.15) $$\begin{aligned}&\Phi(\omega) = \left\| \begin{matrix} W_1(\omega) + \overline{W_1(\overline{\omega})} \\ [W_1(\omega) - \overline{W_1(\overline{\omega})}]\, b \end{matrix} \right\|, \quad \alpha > 0\\ &\Phi(\omega) = \left\| \begin{matrix} W_1(\omega) + \overline{W_1(1/\overline{\omega})} \\ ib\, [\overline{W_1(1/\overline{\omega})} - W_1(\omega)] \end{matrix} \right\|, \quad \alpha < 0\end{aligned}$$

Подставим (1.11) в (1.14). Учитывая свойства собственных чисел матрицы D', указанные в (1.9) и (1.13), установим, что (1.14) и (1.15) имеют силу, если функции G, F и R выбраны с учетом условий (1.16)—(1.18)

(1.16) $$\begin{aligned}&G_1(\omega) = \overline{G_2(\overline{\omega})}, \ G_1(\omega) = \overline{G_1(1/\overline{\omega})}, \ \alpha > 0\\ &G_1(\omega) = \overline{G_2(1/\overline{\omega})}, \ G_1(\omega) = \overline{G_1(\overline{\omega})}, \ \alpha < 0\end{aligned}$$

(аналогичные равенства имеют место для функций $G_m{}^\circ(\omega)$)

(1.17) $$\begin{aligned}&F_1(\omega) = \overline{F_2(\overline{\omega})}, \ F_1{}^\circ(\omega) = \overline{F_2{}^\circ(\overline{\omega})} = \pm \omega^n \overline{F_1(1/\overline{\omega})}\\ &\frac{F_1(\omega)}{\omega \overline{F_1(1/\overline{\omega})}} = \frac{F_1(\xi)}{\xi \overline{F_1(1/\overline{\xi})}} = \frac{\xi F_1(1/\xi)}{\overline{F_1(\xi)}}, \quad \alpha > 0\\ &F_1(\omega) = \overline{F_1(\overline{\omega})} = \omega \overline{F_2(1/\overline{\omega})}, \quad F_1{}^\circ(\omega) = \overline{F_1{}^\circ(\overline{\omega})} = \pm \omega^n F_2{}^\circ(1/\overline{\omega})\\ &\alpha < 0\end{aligned}$$

$$(1.18)\qquad \begin{aligned} &R_1(\omega)=\overline{R_2(\overline{\omega})}=\pm\omega^{-n}\overline{R_1(1/\overline{\omega})}, \quad \alpha>0\\ &R_1(\omega)=\overline{R_1(\overline{\omega})}=\pm\omega^{-n}\overline{R_2(1/\overline{\omega})}, \quad \alpha<0\end{aligned}$$

Здесь n — любое целое число, а знаки согласованы.

Вспомогательные функции $G_m{}^\circ$ будем конструировать из сомножителей вида

$$[(A_k-\omega^{-1})(\omega-B_k)]^{\gamma_m-1}[(A_k-\omega)(\omega^{-1}-B_k)]^{-\gamma_m}, \quad \alpha\overline{\in}[0,1]$$

(вместо γ_m-1 при $0<\alpha<1$ следует подставить γ_m)

$$(1.19)\qquad \gamma_m=\frac{\ln\lambda_m}{2\pi}=\begin{cases}\delta_m+{}^1/{}_2, & \alpha\overline{\in}[0,1]\\ \delta_m, & \alpha\in]0,1[\end{cases}$$

$$\delta_m=\frac{\ln|\lambda_m|}{2\pi i}, \quad \alpha>0 \quad (m=1,2)$$

$$\delta_m=(-1)^m\left(\frac{\arg\lambda_1}{2\pi}-\frac{1}{2}\right), \quad 0<\arg\lambda_1<2\pi, \quad |\delta_m|<\frac{1}{2}$$

$$\alpha<0$$

Произведения N таких сомножителей удовлетворяют условиям факторизации (1.12) и симметрии (1.16). Разрезы для выделения однозначных ветвей функций $G_m{}^\circ(\omega)$ (и $G_m(\omega)$) проведем вдоль $L_1=\{A_kB_k\}+\{B_k{}^{-1}A_k{}^{-1}\}$; условием $1^{\gamma_m}=1$ фиксируем выбор ветвей сомножителей вида $(A_k-\omega^{\pm1})^{\gamma_m}$ и $(\omega^{\pm1}-B_k)^{\gamma_m}$. Приращения $\arg(A_k-\omega^{\pm1})$ и $\arg(\omega^{\pm1}-B)$ при обходе точек $A_k{}^{\pm1}$, $B_k{}^{\pm1}$ с верхнего берега разреза на нижний равны соответственно $\pm2\pi$ и $\mp2\pi$.

Аналогично строятся функции $G_m(\omega)$. При выборе функций $G_m(\omega)$, $F_m(\omega)$ учитываются дополнительно условия существования интегралов $I_m(\omega)$ (1.11) и исчезновения решения на бесконечности. Поэтому они иногда отличаются от функций $G_m{}^\circ(\omega)$, $F_m{}^\circ(\omega)$.

Вблизи особых точек $a\neq\pm1,\infty$ будем иметь такое поведение решения: $\Phi(z)\sim(z-a)^{-\gamma_m}$, где показатели γ_m, определенные в (1.19), в зависимости от α принимают комплексные ($\operatorname{Re}\gamma_m=1/2$), мнимые или действительные ($0<\gamma_m<1$) значения.

Приведем формулы для вспомогательных функций, конкретизируя расположение интервала l_0 и точки $z=\infty$ относительно подмножеств l_1 и l_2.

1) *Участок* l_0 *окружен интервалами* $\in l_2$ ($a_k\neq-\infty$, 1; $b_k\neq-1$, ∞; $k=1,\ldots,N$).

Условия (1.12), (1.16)—(1.18) реализуют функции

$$(1.20)\qquad G_1{}^\circ(\omega)=\Pi_1(\omega)\Pi(\omega), \quad G_1(\omega)=\Pi_2(\omega)\Pi(\omega)$$

$$\Pi=\prod_1^N\left[\frac{(A_k-\omega^{-1})(\omega-B_k)}{(A_k-\omega)(\omega^{-1}-B_k)}\right]^{\delta_1}$$

$$\Pi_m=\prod_1^N\frac{(\omega+\omega^{-1}-B_k-B_k^{-1})^{(-1)^m/2}}{(A_k+A_k^{-1}-\omega-\omega^{-1})^{1/2}}=$$

$$=2^{N(m-2)}\prod_1^N(z-b_k)^{(-1)^m/2}(a_k-z)^{-1/2}, \quad \alpha\overline{\in}[0,1]; \quad \Pi_m\equiv1$$

$$\alpha\in]0,1[$$

$$(1.21)\qquad F_1=\frac{\omega}{\omega+1}, \quad F_1{}^\circ=\frac{\omega}{\omega^2-1}, \quad |\alpha|<\infty; \quad R_1=ir_0=i\bar r_0$$

$$0<\alpha<1;$$

$$R_1=\sum_{-N}^N r_k\omega^k; \quad r_k=-\bar r_{-k} \quad \alpha>1; \quad r_k=\bar r_k, \quad \alpha<0$$

Считая, для простоты, что величины $f(x)$ убывают на бесконечности не медленнее, чем $1/x$, можно установить существование интеграла в (1.15) и убывание решения как $1/z$ при $z \to \infty$.

Суммарный индекс исходной задачи $\varkappa$ в данном случае равен сумме порядков особенностей канонических решений во всех особых точках $z = a_k, b_k, \pm 1$ [2]

$$\varkappa = 2N + 1, \ \alpha \bar{\in} [0, 1]; \ \varkappa = 1, \ \alpha \in]0, 1[$$

и равен числу свободных действительных постоянных в решении (1.15). Это согласуется с общими утверждениями о числе линейно-независимых решений задачи Римана — Гильберта [2].

2) *Интервал* l_0 *граничит как с* l_1, *так и с* l_2. Пусть одна из точек ± 1 — общая граничная точка l_0 и l_1, а другая точка ∓ 1 является общей граничной точкой l_0 и l_2, т. е. либо $a_q = +1$, либо $b_p = -1$, где p, q принимают одно из значений $1, 2, \ldots, N$ (везде берутся верхние или нижние знаки). В формулах (1.20), (1.21) изменению подлежат

$$(1.22) \qquad \Pi_2 = \prod_1^N \left(\frac{A_k + A_k^{-1} - \omega - \omega^{-1}}{\omega + \omega^{-1} - B_k - B_k^{-1}} \right)^{\mp 1/2}, \quad F_1 = F_1^\circ = \frac{\omega}{\omega \pm 1}$$

$$R_1 = \sum_{-N}^{N-1} r_k \omega^k, \quad \alpha \bar{\in} [0, 1]; \quad r_k = \pm \bar{r}_{-1-k}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

$$\alpha > 1;$$

$$r_k = \bar{r}_k, \quad k = -N, \ldots, N-1, \quad \alpha < 0$$

Так как функции $\Pi_m(\omega)$ приобрели полюс в одной из точек ± 1, то функции $F_m(\omega)$ должны были утратить его.

Индекс задачи уменьшился на единицу в случае $\alpha \bar{\in} [0, 1]$ по сравнению с вариантом 1), а поведение на бесконечности остается прежним.

3) *Разрыв краевых условий в бесконечности*; l_0 *граничит только с* l_2. Пусть $a_1 = A_1 = -\infty$, $a_k \neq 1$, $b_k \neq -1$ — поведение решения на бесконечности нерегулярное. Конструируя заново вспомогательные функции (результат можно получить и специальным предельным переходом $A_1 \to -\infty$ в формулах (1.20)), убеждаемся в том, что выражения для функций $\Pi(\omega)$, $\Pi_m(\omega)$ отличаются от (1.20) отсутствием тех сомножителей, в которые входила величина A_1, а формулы (1.21) сохраняют силу. На бесконечности

$$W_m(\omega) \sim \omega^{-(1/2 + \delta_m)}, \quad \alpha \bar{\in} [0, 1]; \quad W_m(\omega) \sim \omega^{-(1 + \delta_m)}, \quad \alpha \in]0, 1[$$

Если потребовать исчезновения решения не медленнее, чем $|z|^{-1}$, то число линейно-независимых решений сокращается на два ($\alpha \bar{\in} [0, 1]$): суммирование в (1.21) следует проводить от $-N + 1$ до $N - 1$.

Аналогично рассматриваются случаи $|a_1| < \infty$, $b_N = \infty$ и $|a_1| = b_N = \infty$. При этом соответствующие сомножители выбрасываются из произведений (1.20), а пределы суммирования в (1.21), как обычно, выбираются в зависимости от поведения решения на бесконечности.

4) *Разрыв краевых условий в бесконечности*; l_0 *граничит как с* l_1, *так и с* l_2. Переход 3) $\to$ 4) аналогичен переходу 1) $\to$ 2).

Этим же методом можно построить решения задачи (1.2) в других классах функций, например ограниченные вблизи некоторых точек a_k, b_k (вопрос разрешимости рассматривается аналогично [2, 8]). Результат можно непосредственно извлечь из полученного решения класса h_0, обращая в нуль коэффициенты в соответствующих асимптотиках.

2. Рассмотрим некоторые задачи о деформировании составной упругой плоскости, сводящиеся к задаче (1.1), (1.2). Прямая линия раздела упругих свойств $y = 0$ делится на системы интервалов l_n (см. п. 1), на которых ставятся условия трех типов: на l_1 и l_2 — любое сочетание из условий 1°—3°, на l_0 — одно из условий 4°, 5°.

1°. К берегам щелей приложены нормальные и касательные напряжения

$$(\sigma_y + i\tau_{xy})(x, \pm 0) = g^\pm(x) \equiv (-p + i\tau)^\pm(x)$$

2°. Задан вектор смещения

$$(u + iv)(x, \pm 0) = h^\pm(x)$$

3°. Выполнены условия полного контакта

$$[\sigma_y] = [\tau_{xy}] = [u] = [v] = 0$$

4°. Задано касательное напряжение и выполнены условия непрерывности нормальных компонент смещения и напряжения $\tau_{xy}(x, \pm 0) = \tau^\pm(x)$, $[\sigma_y] = [v] = 0$.

5°. Заданы касательное напряжение и нормальное смещение

$$\tau_{xy}(x, \pm 0) = \tau^\pm(x), \quad v(x, \pm 0) = v^\pm{}_0(x)$$

Здесь квадратные скобки означают скачок величины при переходе с верхнего берега на нижний.

Считаем, что напряжения исчезают на бесконечности (однородное поле напряжений на бесконечности можно снять).

Используем комплексные представления решений, близкие к рассмотренным в [9]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\operatorname{Re}\{X_2(z) - X_1(z)\} \tag{2.1}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \operatorname{Re}\{X_2(z) - X_1(z)\} + \overline{X_1(z)} + iy\{\overline{X_2'(z)} - \overline{X_1'(z)}\}$$

$$4\mu_j(u_{,x} + iv_{,x}) = \varkappa_j\{X_2(z) - X_1(z)\} - \overline{X_1(z)} - \overline{X_2(z)} + 2iy\{\overline{X_1'(z)} - \overline{X_2'(z)}\}$$

$$4\mu_j(u_{,y} - iv_{,y}) = \varkappa_j\{X_2(z) - X_1(z)\} + 3\overline{X_1(z)} - \overline{X_2(z)} - 2iy\{\overline{X_1'(z)} - \overline{X_2'(z)}\}$$

почти всюду $\lim\limits_{y\to 0} yX_m'(z) = 0$, $m = 1, 2$; $X' = dX/dz$

$$\tau_{xy}(x, \pm 0) = \operatorname{Im} X_1^\pm(x), \quad \sigma_y(x, \pm 0) = \operatorname{Re} X_2^\pm(x)$$

$$u_{,x}(x, \pm 0) = -\operatorname{Re}\{b^{(j)}X_1(x) + a^{(j)}X_2(x)\}^\pm,$$

$$v_{,x}(x, \pm 0) = \operatorname{Im}\{a^{(j)}X_1(x) + b^{(j)}X_2(x)\}^\pm; \quad 4\mu_j a^{(j)} = 1 - \varkappa_j, \quad 4\mu_j b^{(j)} = 1 + \varkappa_j$$

Функции $X_m(z)$ регулярны в плоскости z, кроме точек действительной оси, почти всюду имеют предел при $y \to \pm 0$, около особых точек ($z \neq \infty$) подчиняются оценкам (1.1) и исчезают при $z \to \infty$; индекс $j = 1$ ($j = 2$) фиксирует параметры среды, занимающей полуплоскость $y > 0$ ($y < 0$); μ_j — модули сдвига, $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ (плоская деформация), $\varkappa_j = (3 - \nu_j)(1 + \nu_j)^{-1}$ (обобщенное плоское напряженное состояние), ν_j — коэффициенты Пуассона.

3. Покажем подробнее переход к (1.1), (1.2) от задачи с сочетанием краевых условий 1°, 3°, 4° — линия склейки ослаблена системой щелей l_2 и трещиной поперечного сдвига l_0 (l_0 граничит только с l_1) или одна из щелей переходит в трещину сдвига (l_0 граничит и с l_1, и с l_2) или берега одной из щелей контактируют на участке l_0 (l_0 граничит только с l_2).

Пусть сначала нагрузки приложены симметрично: $g^+(x) = g^-(x)$. Тогда в силу 1°, 3°, 4° и (2.1) имеют место условия продолжения

$$\text{(3.1)} \qquad X_1(z) = -X_1(\bar{z}),\ X_2(z) = X_2(\bar{z})$$

позволяющие рассмотреть задачу только в верхней полуплоскости. Краевые условия принимают вид (1.2), если предварительно снять нагрузку на l_0 вычитанием решения вспомогательной задачи. Считая, для простоты, $\tau^{\pm}(x) = 0$, $x \in l_0$, придем к задаче (1.1)—(1.3), где

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{gathered} d_{11} = d_{22} = d,\ d_{12} = d_{21} = q,\ d = a^{(1)} - a^{(2)} \\ q = b^{(1)} + b^{(2)};\ f(x) = g^+(x),\ x \in l_2;\ f(x) = 0,\ x \in l_1 \\ \alpha = q^2 d^{-2} > 1,\ \lambda_1 = (d-q)/(d+q) < 0\ \ (s = -1) \end{gathered}$$

Если трещина сдвига изолирована, то линейной заменой функций задача сводится к вариантам, рассмотренным в п. 1. Проще, однако, прямо воспользоваться результатами (1.20), (1.21), учитывая, что в этом случае вспомогательная функция $\Pi_1(\omega)$ имеет полюса в точках $\omega = \pm 1$, а функция $\Pi_2(\omega)$ — в точке $\omega = 1$. Изменится выражение для $F^\circ(\omega)$: $F^\circ(\omega) = 1$. Главный вектор сил, приложенных к границам, равен нулю и $X_m(z) = O(1/z^2)$ при $z \to \infty$ [10]. При $a_1^2 + b_N^2 < \infty$ (участки склейки имеют конечный периметр) суммирование в (1.21) следует проводить от $1 - N$ до $N - 1$. Если $a_1 = -\infty$, $b_N = \infty$ (все щели имеют конечную длину), то сомножители, содержащие a_1 и b_N, выбрасываются из произведений в формулах (1.20), а пределы суммирования в (1.21) равны $2 - N$ и $N - 2$. Другие варианты аналогичны случаю 3) из п. 1.

Пусть l_0 граничит только с l_2 (или и с l_2 и с l_1). Физически осмысленной является в этом случае постановка задачи с неизвестными заранее границами контакта (концами l_0^*, где l_n^* — соответствующие участки в лабораторной системе координат). Это дополнительное усложнение задачи преодолевается обычным путем. Фиксируя некоторым образом l_0^*, совершим преобразование системы координат, при котором $l_0^* \to l_0$. Неизвестные координаты границ l_0^* войдут в последующие формулы в качестве параметров. В задаче, кроме того, возникнут дополнительные условия в форме неравенств

$$\sigma_y - \sigma_y^\circ \leqslant 0,\ x \in l_0;\ [v] + \delta^\circ \geqslant 0,\ x \in l_2$$

где σ_y° — снятое нормальное напряжение, δ° — начальный зазор щели. Из этих неравенств следует непрерывность напряжений в неизвестных точках. Приравнивая нулю соответствующие коэффициенты интенсивности напряжений, получим уравнения для определения координат этих точек. Отбор единственных корней производится при проверке указанных неравенств [7].

Комплексные постоянные r_k определяются из условия однозначности смещений при учете связей, указанных в (1.21), аналогично [6, 10]. Так, в случае изолированной трещины сдвига и щелей, имеющих конечный периметр, получаем по два условия однозначности компонент u и v при обходе каждой щели, а при обходе трещины сдвига — одно условие однозначности компоненты u. Всего имеем $2N - 3$ независимых уравнений для определения $2N - 3$ свободной действительной постоянной. Тем самым исчерпан вопрос единственности решений. Заметим, что единственность решений некоторых задач теории упругости с нефиксированными точками раздела граничных условий установлена в [11].

При отсутствии симметрии ($g^+(x) \neq g^-(x)$) рассмотрим предварительно следующие вспомогательные задачи для компонент вектора $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ с целью снятия неоднородностей в краевых условиях на l_0 и l_2 ($\vartheta(z) \to 0$; $z \to \infty$)

$$\operatorname{Im} \vartheta_1^{\pm}|_{l_0+l_2} = \tau^{\pm}(x), \quad \operatorname{Im} \vartheta_1^{\pm}|_{l_1} = 0, \quad \operatorname{Re} \vartheta_2^{\pm}|_{l_2} = -p^{\pm}(x)$$
$$\operatorname{Re} \vartheta_2^{\pm}|_{l_0+l_1} = 0$$

Решения этих задач просто выражаются через интегралы типа Коши [10].

Для кусочно-голоморфного вектора $\Psi(z) = X(z) - \vartheta(z)$ условия непрерывности $\operatorname{Im} \Psi_1^+ = \operatorname{Im} \Psi_1^-$ и $\operatorname{Re} \Psi_2^+ = \operatorname{Re} \Psi_2^-$ будут выполнены на всей действительной оси, и следовательно, имеют место условия продолжения, аналогичные (3.1). В результате для определения аналитического в верхней полуплоскости вектора $\Psi(z)$ получаем задачу

$$\operatorname{Im} \Psi_1^+ = 0, \ \operatorname{Im} \Psi_2^+ = f_0(x) \quad (l_0) \tag{3.3}$$
$$\operatorname{Im}(D_1\Psi^+) = f(x) \quad (l_1), \ \operatorname{Im} \Psi_1^+ = \operatorname{Re} \Psi_2^+ = 0 \quad (l_2)$$

где матрица D_1 определена в (1.3), (3.2), а $f_0(x)$, $f(x)$ выражаются через краевые значения функций $\vartheta_m(z)$.

Для окончательного приведения задачи к виду (1.2) необходимо снять неоднородность в краевом условии на l_0 из (3.3). Это можно сделать образуя вектор $\Phi = (\Psi_1, \Psi_2 - \Psi_0)$, где

$$\Psi_0 = \frac{i}{\pi\sqrt{z^2-1}} \int_{-1}^{1} \frac{f_0(t)\sqrt{1-t^2}}{t-z} dt, \quad \operatorname{Im} \Psi_0^+|_{l_0} = f_0(x)$$
$$\operatorname{Re} \Psi_0^+|_{l_1+l_2} = 0$$

Главный вектор внешних сил (X, Y) может быть отличен от нуля. Асимптотика решения на бесконечности определяется формулами [5]

$$X_k(z) = \frac{\gamma_{kj}X - i\gamma_{mj}Y}{\pi z S} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (j,\ k,\ m = 1,\ 2;\ k \neq m) \tag{3.4}$$
$$\Phi_1 \sim \frac{\gamma_{1j}X - i\gamma_{2j}Y \pm ST^{\pm}}{\pi z S}, \quad \Phi_2 \sim \frac{\gamma_{2j}X - i(\gamma_{1j}Y \mp SP^{\pm})}{\pi z S}$$
$$y \to \pm\infty$$
$$X = T^- - T^+, \quad Y = P^+ - P^-, \quad S = d^2 - q^2$$
$$T^{\pm} = \int_{l_0+l_2} \tau^{\pm}(x)\,dx, \quad P^{\pm} = \int_{l_2} p^{\pm}(x)\,dx$$
$$\gamma_{11} = -a^{(2)}d - b^{(2)}q, \quad \gamma_{12} = a^{(1)}d - b^{(1)}q$$
$$\gamma_{22} = \gamma_{21} = a^{(1)}b^{(2)} + a^{(2)}b^{(1)}$$

Берутся верхние знаки и $j = 1$ при $y > 0$, нижние знаки и $j = 2$ — при $y < 0$. Можно проверить, что условия (3.1) выполнены для асимптотик $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$.

По сравнению с предыдущим случаем решение имеет более слабое убывание на бесконечности — число действительных постоянных, подлежащих определению, увеличилось на два. Но и число независимых условий, включающих прежние условия однозначности смещений при обходе контуров l_0, l_2 и оценки (3.4), возросло на столько же (напомним, что условия (3.4) включают в себя условие однозначности вектора смещения при обходе по контуру, охватывающему все интервалы $l_0 + l_2$ [5, 10]).

Замечание. Если на участке l_0 касательное напряжение явно не задано, а выражается через другую неизвестную функцию (например, ставится условие сухого трения), то полученные представления можно использовать для вывода интегрального уравнения задачи относительно одной неизвестной функции.

Аналогично рассматриваются другие задачи. При этом сочетанию условий 1°,3°,5° отвечает случай расклинивания (без трения) одной из щелей жесткой вставкой с заданной зоной контакта. Задаче о системе впаянных тонких жестких включений и одном участке расслоения соответствует набор условий 2°, 3°, 4° (или 5°). При решении этой задачи удобнее перейти к другим комплексным представлениям

$$\Psi = A^{(j)} X(z), \quad A^{(j)} = \{a_{km}^{(j)}\}, \quad a_{11}^{(j)} = -a_{22}^{(j)} = a^{(j)}, \quad a_{12}^{(j)} = -a_{21}^{(j)} = b^{(j)}$$

$$u_{,x}(x, \pm 0) = \operatorname{Re} \Psi_2^{\pm}(x), \quad v_{,x}(x, \pm 0) = \operatorname{Im} \Psi_1^{\pm}(x)$$

Решение в замкнутой форме также можно получить при изучении вопроса соприкасания (с проскальзыванием) двух полуплоскостей, загруженных на l_1 напряжениями, на l_2 — смещениями (1°, 2°, 4°), и в задаче о действии на полуплоскость системы сцепленных с ней штампов и одного штампа с проскальзыванием (1°, 2°, 5°).

Ограничимся замечанием по поводу решения указанных задач с дефектами на границе раздела при действии лишь однородного поля напряжений на бесконечности. Целесообразно в этом случае искать решение при условии на бесконечности ($\beta = -d/q$)

$$X_1 = \beta\sigma_y^\circ + i\tau_{xy}^\circ + O(z^{-2}), \quad X_2 = \sigma_y^\circ + i\beta\tau_{xy}^\circ + O(z^{-2}), \quad y > 0 \tag{3.5}$$

Главная часть асимптотики (3.5) представляет собой однородное решение для составной упругой плоскости без дефектов (учитываем условия (3.1))

$$\sigma_y = \sigma_y^\circ, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^\circ, \quad |y| \leqslant \infty$$

$$\sigma_x = (1 - 2\beta)\sigma_y^\circ, \quad y > 0, \quad \sigma_x = (1 + 2\beta)\sigma_y^\circ, \quad y < 0$$

Решение (1.11), (1.15) не будет содержать интегралов, а в пределах суммирования (формулы (1.21), (1.22)) следует заменить N на $N + 1$. Условие (3.5) используется для определения лишних постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Симонов И. В.* Об установившемся движении трещины с участками проскальзывания и отрыва по границе раздела двух упругих материалов.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 482—489.
2. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для систем n пар функций.— Успехи матем. наук, 1952, т. 7, вып. 4, с. 3—54.
4. *Чеботарев Г. Н.* К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для систем n пар функций.— Уч. зап. Казан. ун-та, 1956, т. 116, кн. 4, с. 31—58.
5. *Черепанов Г. П.* Задача Римана — Гильберта для внешности разрезов вдоль прямой или вдоль окружности.— Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 2, с. 275—277.
6. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 1, с. 131—137.
7. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М., Рывкин М. Б.* Деформация составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой произвольно нагруженных щелей.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1088—1094.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука 1968. 511 с.
9. *Галин Л. А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления.— ПММ, 1945, т. 9, № 5, с. 413—424.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
11. *Shield R. T.* Uniqueness for elastic crack and punch problems.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1982, v. 49, No. 3, p. 516—518.

Москва

Поступила в редакцию 13.VI.1984