Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 539.3:534.1

СВЕДЕНИЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ДИНАМИЧЕСКИХ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ПЛОСКИМИ РАЗРЕЗАМИ

Мыхаськив В. В., Хай М. В.

Путем обобщения описанного ранее [1] метода сведения трехмерных динамических задач теории упругости для тела с разрезом к интегральным уравнениям получены интегральные уравнения для бесконечного тела с произвольно расположенными плоскими разрезами. Исследуется взаимодействие дискообразных разрезов, расположенных в одной плоскости, когда на их поверхностях заданы нормальные внешние усилия, изменяющиеся во времени по гармоническому закону (установившиеся колебания).

Задачи о сведении к интегральным уравнениям динамических трехмерных задач теории упругости для бесконечного тела, ослабленного плоским разрезом, рассматривались в [1, 2]. В [1] решение исходной задачи получено путем применения к соответствующим уравнениям интегрального преобразования Лапласа по времени и построения решения в виде потенциалов Гельмгольца с плотностями, характеризующими раскрытие разреза в процессе деформации тела. В [2] рассматриваемая задача решена путем использования фундаментального решения Стокса [3] с последующим построением решения в виде аналога упругого потенциала двойного слоя.

1. Рассмотрим упругое бесконечное тело, ослабленное плоскими произвольно расположенными разрезами, противоположные поверхности S_n^+ и S_n^- $(n = 1, 2, \ldots, N)$ которых находятся под действием самоуравновешенных, изменяющихся во времени t внешних усилий. Начальные условия задачи считаем нулевыми.

Выберем декартовые базисную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом O в произвольной точке тела и локальные системы координат $O_nx_{1n}x_{2n}x_{3n}$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ таким образом, чтобы область S_n, которую занимает n-й разрез, содержалась в координатной плоскости $x_{1n}O_nx_{2n}$, а поверхностям $S_n^\pm$ соответствовали значения $x_{3n} = \pm 0$ (фиг. 1). Обозначим через x точку с координатами (x_1, x_2, x_3).

Для сведения исходной задачи к интегральным уравнениям воспользуемся тем, что под действием внешних нагрузок противоположные поверхности разрезов смещаются один относительно другого. Если обозначить через $\beta_{jn}(t, x)$ функции, которые характеризуют смещение противоположных точек поверхностей n-го разреза вдоль координатных осей O_nx_{jn}, то в n-й локальной системе координат напряжения σ_{ljn} определяются соотношениями

$$\sigma_{ljn}(t, x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sigma_{ljn}^*(p, x_n)\exp(pt)\,dp \quad (l, j = 1, 2, 3)$$

где компоненты σ_{ljn}^* напряжений в изображениях по Лапласу можно записать в следующем виде [1]:

$$\frac{\sigma_{33n}^*}{2G} = \frac{2}{\omega_2^2}\left[\Delta_n(\Delta_n - \omega_2^2)(F_{3n} - P_{3n}) + \frac{\omega_2^4}{4}F_{3n} + \left(\Delta_n - \frac{\omega_2^2}{2}\right)\frac{\partial W_n}{\partial x_{3n}}\right] \tag{1.1}$$

$$\frac{\sigma_{j3n}^*}{2G} = \frac{2}{\omega_2^2}\left\{(-1)^j\left[\left(\Delta_n - \frac{\omega_2^2}{2}\right)^2 P_{(3-j)n} - \Delta_n(\Delta_n - \omega_1^2)F_{(3-j)n} -\right.\right.$$

$$-\left(\Delta_n-\frac{3\omega_2^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}}\left(\frac{\partial P_{2n}}{\partial x_{2n}}+\frac{\partial P_{1n}}{\partial x_{1n}}\right)+$$

$$+(\Delta_n-\omega_1^2)\frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}}\left(\frac{\partial F_{2n}}{\partial x_{2n}}+\frac{\partial F_{1n}}{\partial x_{1n}}\right)-$$

$$-\left(\Delta_n-\frac{\omega_2^2}{2}\right)\frac{\partial^2(F_{3n}-P_{3n})}{\partial x_{jn}\partial x_{3n}}\Bigg\}$$

$$\frac{\sigma_{12n}^*}{2G}=\frac{2}{\omega_2^2}\Bigg\{-(\Delta_n-\omega_2^2)\frac{\partial^2(F_{3n}-P_{3n})}{\partial x_{1n}\partial x_{2n}}-\frac{\omega_2^2}{2}\Bigg[\frac{\partial^2 F_{3n}}{\partial x_{1n}\partial x_{2n}}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_{3n}}\left(\frac{\partial P_{1n}}{\partial x_{1n}}-\frac{\partial P_{2n}}{\partial x_{2n}}\right)\Bigg]-\frac{\partial^3 W_n}{\partial x_{1n}\partial x_{2n}\partial x_{3n}}\Bigg\}$$

$$\frac{\sigma_{jjn}^*}{2G}=\frac{2}{\omega_2^2}\Bigg\{-\left(\Delta_n-\frac{\omega_2^2}{2}\right)\left(\frac{\nu\omega_1^2}{1-2\nu}-\frac{\partial^2}{\partial x_{jn}^2}\right)F_{3n}+$$

$$+(\Delta_n-\omega_2^2)\frac{\partial^2 P_{3n}}{\partial x_{jn}^2}+\frac{\partial}{\partial x_{3n}}\Bigg[(-1)^j\frac{\omega_2^2}{2}\frac{\partial P_{(3-j)n}}{\partial x_{jn}}-$$

$$-\frac{\nu\omega_1^2}{1-2\nu}\left(\frac{\partial F_{2n}}{\partial x_{1n}}-\frac{\partial F_{1n}}{\partial x_{2n}}\right)-\frac{\partial^2 W_n}{\partial x_{jn}^2}\Bigg]\Bigg\}$$

$$W_n=\frac{\partial(F_{2n}-P_{2n})}{\partial x_{1n}}-\frac{\partial(F_{1n}-P_{1n})}{\partial x_{2n}},\quad \Delta_n=\frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_{2n}^2}$$

$$F_{jn}=\iint\limits_{S_n}\beta_{jn}^*(p,\xi)\,\Phi_1(x_n,\xi)\,d_\xi S,\quad P_{jn}=\iint\limits_{S_n}\beta_{jn}^*(p,\xi)\,\Phi_2(x_n,\xi)\,d_\xi S$$

$$\Phi_j(x_n,\xi)=\frac{\exp(-\omega_j|x_n-\xi|)}{|x_n-\xi|},\quad \omega_j=\frac{p}{c_j}$$

Здесь x_n — точка с координатами (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) в n-й системе координат, p — параметр преобразования Лапласа, причем $\operatorname{Re} p>0$, c_1, c_2 — скорости распространения продольных и поперечных волн, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Звездочка означает, что рассматривается изображение по Лапласу по t от соответствующих функций.

Так как в рассматриваемом теле имеется N плоских произвольно расположенных разрезов, то напряжения в любой точке тела равны сумме напряжений, обусловленных раскрытием всех разрезов в процессе деформации тела.

Обозначим через l_{jkn}, m_{jkn}, n_{jkn} направляющие косинусы осей $O_n x_{jn}$ в координатной системе $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$, которые задаются следующим образом:

	$O_n x_{1n}$	$O_n x_{2n}$	$O_n x_{3n}$
$O_k x_{1k}$	l_{1kn}	l_{2kn}	l_{3kn}
$O_k x_{2k}$	m_{1kn}	m_{2kn}	m_{3kn}
$O_k x_{3k}$	n_{1kn}	n_{2kn}	n_{3kn}

Тогда обусловленные смещением поверхностей k-го разреза напряжения на месте расположения n-го разреза определяются формулами

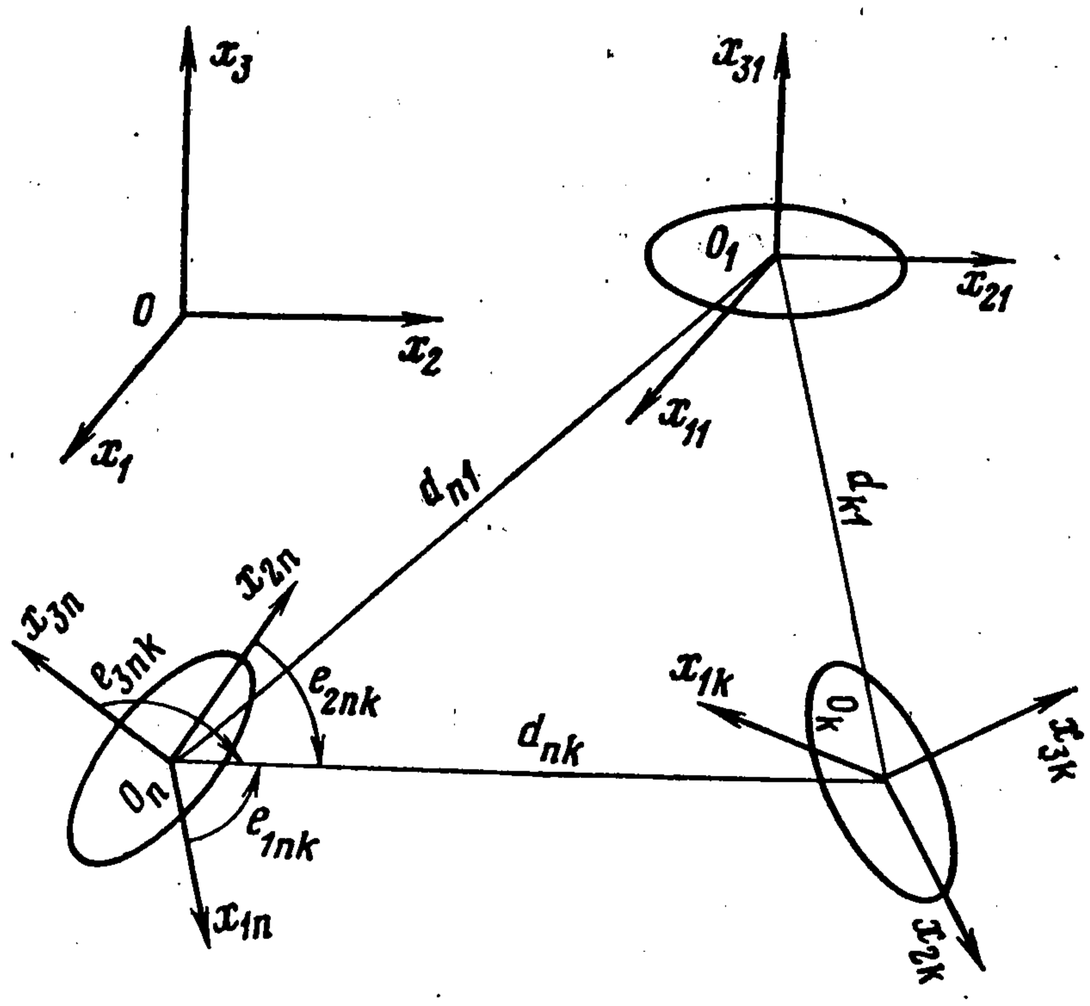
$$N_{jkn}^*=\sigma_{11k}^* l_{j3kn}+\sigma_{22k}^* m_{j3kn}+\sigma_{33k}^* n_{j3kn}+\sigma_{12k}^* l_{j3kn}^{(1)}+$$

$$+\sigma_{23k}^* m_{j3kn}^{(1)}+\sigma_{13k}^* n_{j3kn}^{(1)}\quad (j=1,2,3)$$

$$l_{j3kn}=l_{jkn}l_{3kn},\quad m_{j3kn}=m_{jkn}m_{3kn}$$

$$n_{j3kn}=n_{jkn}n_{3kn},\quad l_{j3kn}^{(1)}=l_{jkn}m_{3kn}+l_{3kn}m_{jkn}$$

$$m_{j3kn}^{(1)}=m_{jkn}n_{3kn}+m_{3kn}n_{jkn},\quad n_{j3kn}^{(1)}=n_{jkn}l_{3kn}+n_{3kn}l_{jkn}$$



Фиг. 1

Суммируя все напряжения на месте расположения n-го разреза, обусловленные смещением противоположных поверхностей разрезов, и приравнивая их к заданным внешним $N_{jn}(t, x)$ (N_{3n} — нормальные, N_{1n}, N_{2n} — касательные) усилиям, получим систему $3N$ интегральных уравнений для определения функций $\beta_{jn}(t, x)$. В изображениях по Лапласу эта система принимает вид

$$
\begin{aligned}
(1.2)\qquad & \Delta_n(\Delta_n-\omega_2^2)\iint\limits_{S_n}\beta_{3n}^*(p,\xi)\,[\Phi_1(x_n,\xi)-\Phi_2(x_n,\xi)]\,d_\xi S+\\
&+\frac{\omega_2^4}{4}\iint\limits_{S_n}\beta_{3n}^*(p,\xi)\,\Phi_1(x_n,\xi)\,d_\xi S+\sum_{k=1}^{N}{}'\iint\limits_{S_k}\sum_{s=1}^{3}\beta_{sk}^*(p,\xi)\times\\
&\times\chi_{3skn}(p,\xi,x_n)\,d_\xi S=-\frac{\omega_2^2}{4G}N_{3n}^*(p,x_n)\\
&\Delta_n(\Delta_n-\omega_2^2)\iint\limits_{S_n}\beta_{(3-j)n}^*(p,\xi)\,[\Phi_1(x_n,\xi)-\Phi_2(x_n,\xi)]\,d_\xi S+\\
&+(\omega_2^2-\omega_1^2)\Delta_n\iint\limits_{S_n}\beta_{(3-j)n}^*(p,\xi)\,\Phi_1(x_n,\xi)\,d_\xi S-\\
&-\frac{\omega_2^4}{4}\iint\limits_{S_n}\beta_{(3-j)n}^*(p,\xi)\,\Phi_2(x_n,\xi)\,d_\xi S-\\
&-(\Delta_n-\omega_1^2)\frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}}\iint\limits_{S_n}\Big[\beta_{1n}^*(p,\xi)\frac{\partial\Phi_1(x_n,\xi)}{\partial x_{1n}}+\\
&+\beta_{2n}^*(p,\xi)\frac{\partial\Phi_1(x_n,\xi)}{\partial x_{2n}}\Big]d_\xi S+\Big(\Delta_n-\frac{3\omega_2^2}{4}\Big)\times\\
&\times\frac{\partial}{\partial x_{(3-j)n}}\iint\limits_{S_n}\Big[\beta_{1n}^*(p,\xi)\frac{\partial\Phi_2(x_n,\xi)}{\partial x_{1n}}+\beta_{2n}^*(p,\xi)\frac{\partial\Phi_2(x_n,\xi)}{\partial x_{2n}}\Big]d_\xi S-\\
&-\sum_{k=1}^{N}{}'\iint\limits_{S_k}\sum_{s=1}^{3}\beta_{sk}^*(p,\xi)\,\chi_{jskn}(p,\xi,x_n)\,d_\xi S=\frac{(-1)^j\omega_2^2}{4G}N_{jn}^*(p,x_n)\\
&(j=1,2),\quad n=1,2,\ldots,N,\quad x_n\in S_n\\
&\chi_{jskn}(p,\xi,x_n)=\mathbf{L}_{jskn}^{(1)}[\Phi_1(x_{kn},\xi)]+\mathbf{L}_{jskn}^{(2)}[\Phi_2(x_{kn},\xi)]\quad(j=1,2,3)
\end{aligned}
$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что в ней опущен член с номером $k = n$, x_{kn} — точка x_n с координатами x_{1kn}, x_{2kn}, x_{3kn} в k-й локальной системе координат $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$, $\mathbf{L}_{jskn}$ — дифференциальные операторы, коэффициенты которых зависят от упругих постоянных материала и геометрических параметров, характеризующих расположение разрезов, определяемые по формулам (δ_{js} — символ Кронекера)

$$\mathbf{L}^{(1)}_{jskn} = \left[\delta_{1s}\frac{\partial^2}{\partial x_{2kn}\partial x_{3kn}} - \delta_{2s}\frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}\partial x_{3kn}} - \delta_{3s}\left(\Delta_{kn} - \frac{\omega_2^2}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\nu\omega_1^2}{1-2\nu}\delta_{3j} + l_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x^2_{1kn}} + m_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x^2_{2kn}} + n_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x^2_{3kn}} + \right.$$

$$\left. + l^{(1)}_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}\partial x_{2kn}} + m^{(1)}_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x_{2kn}\partial x_{3kn}} + n^{(1)}_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}\partial x_{3kn}}\right]$$

$$\mathbf{L}^{(2)}_{jskn} = \delta_{3s}\left\{(\Delta_{kn} - \omega_2^2)\left[l_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x^2_{1kn}} + m_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x^2_{2kn}} + n_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x^2_{3kn}} + \right.\right.$$

$$\left. + l^{(1)}_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}\partial x_{2kn}} + m^{(1)}_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x_{2kn}\partial x_{3kn}} + n^{(1)}_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}\partial x_{3kn}}\right] +$$

$$\left. + \omega_2^2\left[\frac{1}{2}l^{(1)}_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}\partial x_{2kn}} + \frac{1}{2}m^{(1)}_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x_{2kn}\partial x_{3kn}} + n_{j3kn}\frac{\partial^2}{\partial x^2_{3kn}}\right]\right\} +$$

$$+ (-1)^{s+1}(1-\delta_{3s})\left\{\left[\left(\Delta_{kn} - \frac{\omega_2^2}{2}\right)^2 - \left(\Delta_{kn} - \frac{3\omega_2^2}{4}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2_{skn}}\right] \times\right.$$

$$\times (\delta_{1s}m^{(1)}_{j3kn} + \delta_{2s}n^{(1)}_{j3kn}) + \left(\Delta_{kn} - \frac{3\omega_2^2}{4}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_{1kn}\partial x_{2kn}} \times$$

$$\times (\delta_{2s}m^{(1)}_{j3kn} + \delta_{1s}n^{(1)}_{j3kn}) + l^{(1)}_{j3kn}\left(\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2_{(3-s)kn}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_{3kn}\partial x_{skn}} +$$

$$+ \left[l_{j3kn}\left(\delta_{2s}\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2_{1kn}}\right) + m_{j3kn}\left(\delta_{1s}\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2_{2kn}}\right) + \right.$$

$$\left. + n_{j3kn}\left(\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2_{3kn}}\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial x_{3kn}\partial x_{(3-s)kn}}, \quad \Delta_{kn} = \frac{\partial^2}{\partial x^2_{1kn}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2_{2kn}}$$

Применяя к уравнениям (1.2) обратное преобразование Лапласа, получим интегральные уравнения в оригиналах для определения функций $\beta_{jn}(t, x)$. Они получаются из (1.2), если воспользоваться теоремой о свертках, однако имеют более громоздкую структуру, чем (1.2).

Из (1.2), как частный случай, следуют интегральные уравнения статической задачи теории упругости для бесконечного тела с плоскими произвольно расположенными трещинами [4], если в (1.2) считать $\beta_{jn}^*(p, x)$ не зависящими от параметра p и устремить ω_1 и ω_2 к нулю. Для получения из (1.6) интегральных уравнений задачи в случае установившихся колебаний, т. е. когда внешняя нагрузка имеет вид $N_{jn}(t, x) = N_{jn}^*(x)\exp(-ikt)$, необходимо в (1.2) заменить ω_j на $-ik_j$, где $k_j = k/c_j$, k — частота колебаний.

2. Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях бесконечного тела, ослабленного N плоскими разрезами, размещенными в одной плоскости. Считаем, что поверхности разрезов находятся под действием лишь только самоуравновешенных нормальных внешних усилий ($N_{3n}(t, x) = N_{3n}^*(x)\exp(-ikt)$, $N_{1n}(t, x) = N_{2n}(t, x) = 0$). Задача об определении функций β_{3n}, характеризующих раскрытие разрезов, сводится к системе N интегральных уравнений (функции $\beta_{1n}(t, x)$ и $\beta_{2n}(t, x)$ в рассматриваемом случае равны нулю). Эту систему уравнений, исходя из (1.2),

можно представить в виде (k — частота колебаний)

$$(2.1)\qquad \sum_{m=1}^{N}\iint_{S_m}\beta_{3m}(\xi)\left[K_{1mn}(x_n,\xi)\frac{\exp(ik_1|x_{mn}-\xi|)}{|x_{mn}-\xi|^5}-\right.$$

$$\left.-K_{2mn}(x_n,\xi)\frac{\exp(ik_2|x_{mn}-\xi|)}{|x_{mn}-\xi|^5}\right]d_\xi S=\frac{k_2^2}{4G}N_{3n}^*(x_n)$$

$$x_n\in S_n,\quad n=1,2,\ldots,N,\quad K_{1mn}(x_n,\xi)=9-9ik_1|x_{mn}-\xi|-$$

$$-(5k_1^2-k_2^2)|x_{mn}-\xi|^2+ik_1(2k_1^2-k_2^2)|x_{mn}-\xi|^3+$$

$$+{}^1/_4(2k_1^2-k_2^2)^2|x_{mn}-\xi|^4$$

$$K_{2mn}(x_n,\xi)=9-9ik_2|x_{mn}-\xi|-4k_2^2|x_{mn}-\xi|^2+ik_2^3|x_{mn}-\xi|^3$$

$$k_j=k/c_j$$

Если начала локальных систем координат разместить соответственно в областях S_n ($n=1,2,\ldots,N$), а оси O_nx_{jn} и O_mx_{jm} направить параллельно, то

$$x_{jmn}=d_{mn}e_{jmn}+x_{jn}\quad(j=1,2)$$

где d_{mn} — расстояние между началами m-й и n-й систем координат, e_{jmn} — направляющие косинусы вектора d_{mn} в m-й системе координат.

Для решения уравнений (2.1) преобразуем их к виду

$$(2.2)\qquad \iint_{S_n}\beta_{3n}(\xi)\left[\frac{1}{|x_n-\xi|^3}+\frac{Ak_2^2}{|x_n-\xi|}+K(x_n,\xi)\right]d_\xi S+$$

$$+\frac{4(1-\nu)}{k_2^2}\sum_{m=1}^{N}{}'\iint_{S_m}\beta_{3m}(\xi)\left[K_{1mn}(x_n,\xi)\frac{\exp(ik_1|x_{mn}-\xi|)}{|x_{mn}-\xi|^5}-\right.$$

$$\left.-K_{2mn}(x_n,\xi)\frac{\exp(ik_2|x_{mn}-\xi|)}{|x_{mn}-\xi|^5}\right]d_\xi S=\frac{1-\nu}{G}N_{3n}^*(x_n)$$

$$x_n\in S_n,\quad n=1,2,\ldots,N$$

$$A=\frac{[12(1-\nu)^2-8(1-\nu)(1-2\nu)+3(1-2\nu)^2]}{8(1-\nu)}$$

$$K(x_n,\xi)=\frac{2}{k_2^2-k_1^2}\left[K_{1nn}(x_n,\xi)\frac{\exp(ik_1|x_n-\xi|)}{|x_n-\xi|^5}-\right.$$

$$\left.-K_{2nn}(x_n,\xi)\frac{\exp(ik_2|x_n-\xi|)}{|x_n-\xi|^5}\right]-\frac{1}{|x_n-\xi|^3}-\frac{Ak_2^2}{|x_n-\xi|}$$

Можно убедиться в том, что $K(\xi,\xi)=0$. Для вычисления $K(x_n,\xi)$ для значений x_n, близких к ξ, можно пользоваться разложением

$$(2.3)\qquad K(x_n,\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m|x_n-\xi|^m,$$

$$A_m=4(1-\nu)\frac{i^{m+1}k_2^{m+3}}{(m+1)!}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1+m}+\frac{m+2}{m+3}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{3+m}+\right.$$

$$\left.+\frac{m^2+6m+8}{(m+3)(m+5)}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{5+m}+\frac{m+2}{(m+3)(m+5)}\right]$$

Построение приближенного аналитического решения системы уравнений (2.2) с использованием разложения (2.3) возможно лишь для малых частот колебаний и связано со значительными математическими трудностями.

3. В качестве примера рассмотрим случай круговых дискообразных разрезов. Будем искать решение уравнений (2.2) в виде

$$(3.1)\qquad \beta_{3n}(x_n)=\sqrt{a_n^2-x_{1n}^2-x_{2n}^2}\,\alpha_n(x_n)$$

где a_n—радиус n-го дискообразного разреза, $\alpha_n(x_n)$ — неизвестные дважды дифференцируемые функции, подлежащие определению. Воспользовавшись методикой работы [5], интегральные уравнения (2.2) для определения функций $\alpha_n(x_n)$ преобразуем к виду

$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad & \alpha_n(x_n)\left[I_{00n}(x_n)+Ak_2^2J_n(x_n)\right]+I_{10n}(x_n)\frac{\partial\alpha_n(x_n)}{\partial x_{1n}}+I_{01n}(x_n)\frac{\partial\alpha_n(x_n)}{\partial x_{2n}}+\\
&+\frac{1}{2}I_{20n}(x_n)\frac{\partial^2\alpha_n(x_n)}{\partial x_{1n}^2}+\frac{1}{2}I_{02n}(x_n)\frac{\partial^2\alpha_n(x_n)}{\partial x_{2n}^2}+I_{11n}(x_n)\frac{\partial^2\alpha_n(x_n)}{\partial x_{1n}\partial x_{2n}}+\\
&+\iint\limits_{S_n}\frac{\sqrt{a_n^2-\xi_1^2-\xi_2^2}}{|x_n-\xi|^3}\left\{\alpha_n(\xi)-\alpha_n(x_n)-(\xi_1-x_{1n})\frac{\partial\alpha_n(x_n)}{\partial x_{1n}}-\right.\\
&-(\xi_2-x_{2n})\frac{\partial\alpha_n(x_n)}{\partial x_{2n}}-\frac{(\xi_1-x_{1n})^2}{2}\frac{\partial^2\alpha_n(x_n)}{\partial x_{1n}^2}-\frac{(\xi_2-x_{2n})^2}{2}\frac{\partial^2\alpha_n(x_n)}{\partial x_{2n}^2}-\\
&-(\xi_1-x_{1n})(\xi_2-x_{2n})\frac{\partial^2\alpha_n(x_n)}{\partial x_{1n}\partial x_{2n}}+Ak_2^2|x_n-\xi|^2\left[\alpha_n(\xi)-\alpha_n(x_n)\right]+\\
&\left.+|x_n-\xi|^3K(x_n,\xi)\,\alpha_n(\xi)\right\}d_\xi S+\frac{4(1-\nu)}{k_2^2}\sum_{m=1}^{N}{}'\iint\limits_{S_m}\sqrt{a_m^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,\alpha_m(\xi)\times\\
&\times\left[K_{1mn}(x_n,\xi)\frac{\exp(ik_1|x_{mn}-\xi|)}{|x_{mn}-\xi|^5}-\right.\\
&\left.-K_{2mn}(x_n,\xi)\frac{\exp(ik_2|x_{mn}-\xi|)}{|x_{mn}-\xi|^5}\right]d_\xi S=\frac{1-\nu}{G}N_{3n}^*(x_n),\quad x_n\in S_n\\
&n=1,2,\ldots,N\\
&J_n(x_n)=\iint\limits_{S_n}\frac{\sqrt{a_n^2-\xi_1^2-\xi_2^2}}{|x_n-\xi|}d_\xi S\\
&I_{jmn}(x_n)=\iint\limits_{S_n}\frac{\sqrt{a_n^2-\xi_1^2-\xi_2^2}\,(\xi_1-x_{1n})^j(\xi_2-x_{2n})^m}{|x_n-\xi|^3}d_\xi S
\end{aligned}
$$

Интегралы J_n, J_{jmn} вычисляются путем использования замены переменных $\xi_1=x_{1n}+\rho\cos\varphi$, $\xi_2=x_{2n}+\rho\sin\varphi$.

При численном решении интегральных уравнений (3.2) используется тот факт, что подынтегральные функции обращаются в нуль при $x_n=\xi$.

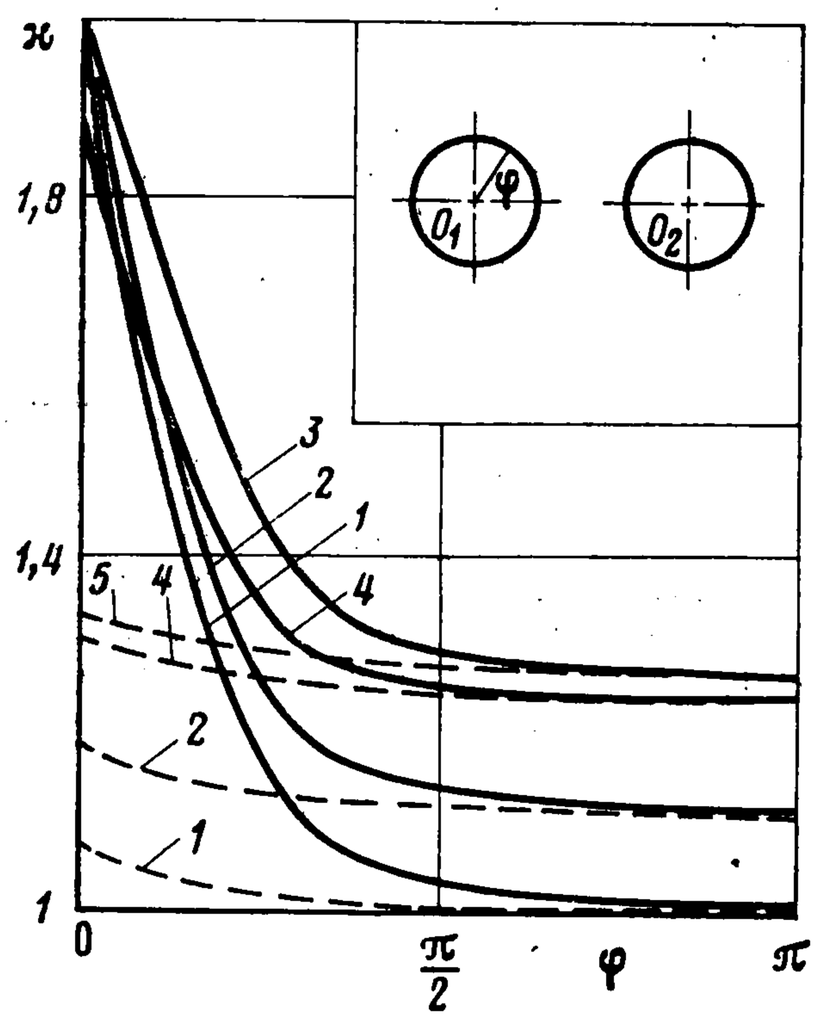
Определив функции $\alpha_n(x_n)$, по соответствующим формулам найдем распределение напряжений в теле с разрезами. Непосредственно через функции $\alpha_n(x_n)$ определяются коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности разрезов. Для рассматриваемой задачи $K_{2n}(\varphi_n,t)=K_{3n}(\varphi_n,t)=0$ (φ_n — угловая координата точки контура разреза в n-й системе координат)

$$
(3.3)\qquad K_{1n}(\varphi_n,t)=\frac{2G\pi\sqrt{\pi a_n}}{1-\nu}\alpha_n(a_n,\varphi_n)\exp(-ikt)
$$

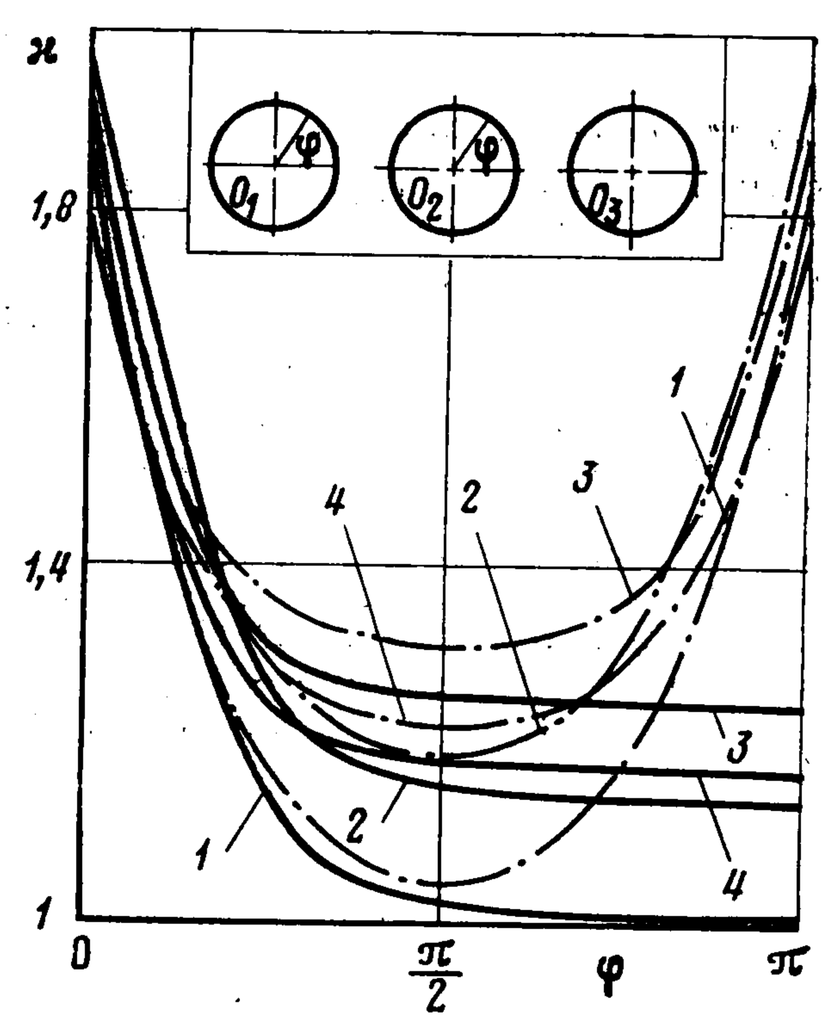
На фиг. 2—4 показана зависимость $\varkappa=|K_{1n}|/K_1$ (K_1 — статический коэффициент интенсивности напряжений для одного разреза при действии на его поверхности нагрузки $N_{3n}^*(x_n)$) от угловой координаты φ_n при разных значениях частоты колебаний, когда имеется система двух и трех дискообразных трещин единичного радиуса, расположенных в одной плоскости. Схема расположения трещин и отсчет угла φ_n указаны на фигурах в верхней части. Предполагалось, что все разрезы нагружены одинаковыми нормальными усилиями $N_{3n}(t,x_n)=\exp(-ikt)$. Функции $\alpha_n(a_n,\varphi_n)$ определялись путем численного решения системы уравнений (2.2). Кривые *1—4* соответствуют значениям $k/c_2=0{,}2;\ 0{,}6;\ 1{,}0;\ 1{,}2$.

На фиг. 2 сплошные линии соответствуют расстоянию между центрами двух дискообразных разрезов, равному $2{,}5a$ (a — радиус разреза). Штриховые — когда это расстояние равно $3a$.

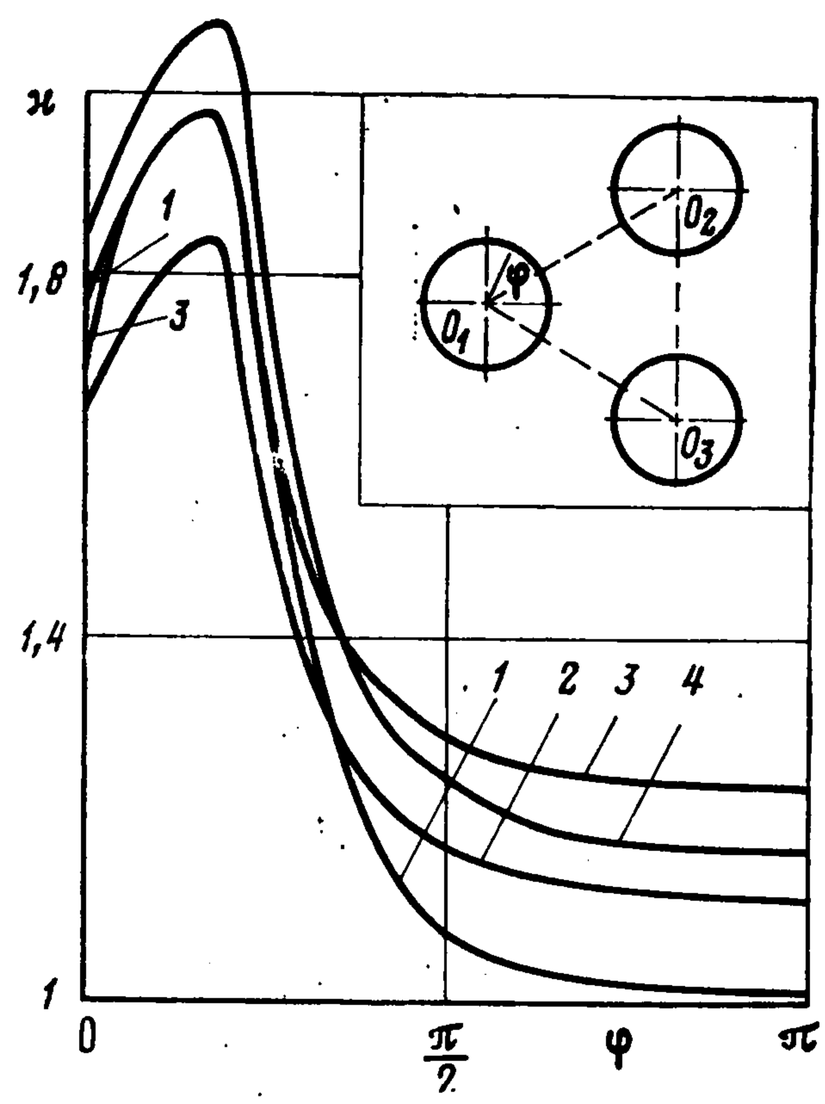
На фиг. 3 сплошными линиями показаны зависимости для левого разреза, штрихпунктирными — для центрального. Расстояние между центрами соседних разрезов равно $2{,}5a$.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Кривые на фиг. 4 соответствуют случаю трех трещин, центры которых расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 2,5a.

Из графиков и формулы (3.3) следует, что коэффициенты интенсивности напряжений K_{1n} в отдельные моменты времени превышают аналогичные значения, определенные в рамках статической постановки задачи при таких же внешних усилиях. Из графиков следует, что наиболее вероятное направление разрушения рассматриваемого тела с разрезами при таких внешних нагрузках находится на прямой, соединяющей центры трещин.

При увеличении частот колебаний величина $|K_{1n}|$ сначала увеличивается, а по достижении некоторых значений k уменьшается. Это значение зависит от количества трещин и их расположения в плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хай М. В.* О сведении трехмерных динамических задач теории упругости для тела с трещиной к интегральным уравнениям.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1980, вып. 12, с. 63—69.
2. *Гольдштейн Р. В., Капцов А. В.* Интегродифференциальные уравнения нестационарной динамической пространственной задачи о трещине в упругой среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 74—80.
3. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 663 с.
4. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
5. *Хай М. В., Калыняк И. В.* Об одном подходе к численному решению задач математической теории трещин.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Киев.: Наук. думка, 1984, вып. 20, с. 38—42.

Львов

Поступила в реакцию
31.I.1984