

УДК 539.3 : 534.1

**ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
СВЯЗАННЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ**

Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А.

Рассматривается обобщенная задача Коши для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, которое встречается при изучении физических процессов, протекающих в сплошных средах с расширенными физико-механическими свойствами [1] (обобщенная связанная термоупругость [2], связанная термоупругость [3, 4], пористые среды, насыщенные вязкой жидкостью [5], массо- и теплоперенос [6], линеаризованная магнитоупругость [7] и др.). Изучаются характерные свойства ее решения при некоторых ограничениях на коэффициенты уравнения, накладываемых условием устойчивости. Для решения характерно наличие волн высшего и низшего порядка, причем с течением времени сохраняются, принимая характерную форму, волны низшего порядка. В общем случае дается представление решения в виде интегралов по отрезкам, соединяющим особые точки трансформант Фурье — Лапласа по времени исследуемого решения. Предлагаемая методика позволяет точно исследовать процессы, описываемые этим уравнением для любых моментов времени, произвольных постоянных, а также выделять сингулярности на фронтах распространения возмущений.

В качестве приложения рассматриваются динамические процессы, происходящие в термоупругом полупространстве [2] в результате приложения на границе механического и теплового воздействия. Показано, что в случае одиночных возмущений границы, волны напряжений и температуры с течением времени принимают колоколообразную форму и распространяются с адиабатической скоростью. Приводится численный анализ процессов при внезапном приложении силового воздействия и при тепловом ударе на границе.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} M(\partial_\xi, \partial_\tau) \Phi(\xi, \tau) &= \Psi(\xi, \tau), \quad \xi \in R^1, \quad \tau \in R^1 \\ M(\partial_\xi, \partial_\tau) &= \partial_\xi^4 + (a_{21}\partial_\tau + a_{22}\partial_\tau^2) \partial_\xi^2 + a_{03}\partial_\tau^3 + a_{04}\partial_\tau^4 \\ \partial_\xi &= \partial/\partial\xi, \quad \partial_\tau^l = \partial^l/\partial\tau^l \end{aligned}$$

где  $R^n$  —  $n$ -мерное вещественное пространство. Уравнение (1.1) является наиболее общим уравнением для всех перечисленных выше случаев задач.

Обобщенная задача Коши для уравнения (1.1) с источником  $\Psi(\xi, \tau)$ ,  $e^{-\omega_2\tau}\Psi(\xi, \tau) \in S'$ ,  $\Psi(\xi, \tau) = 0$  при  $\tau < 0$  определяется, согласно [8], как задача о нахождении обобщенной функции  $\Phi(\xi, \tau)$ ,  $e^{-\omega_2\tau}\Phi(\xi, \tau) \in S'$ , удовлетворяющей уравнению (1.1) и обращающейся в нуль при  $\tau < 0$ , для некоторого  $\omega_2 > 0$ . Это эквивалентно нахождению решения уравнения (1.1), удовлетворяющего принципу причинности, широко используемого в физической литературе [9]. Здесь  $S'$  — пространство обобщенных функций медленного роста, т. е. пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве  $S$  основных быстро убывающих функций.

Найдем решение  $\Phi_l(\xi, \tau)$  ( $l = 0, \dots, 4$ ) обобщенной задачи Коши (1.1) с источниками вида

$$(1.2) \quad \Psi(\xi, \tau) = \delta^{(l)}(\xi) f(\tau), \quad l = 0, \dots, 4$$

где  $f(\tau) \in D_+'(a_0)$  ( $f(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ ,  $e^{-\omega_2\tau}f(\tau) \in S'$  при всех  $\omega_2 > a_0$ ),  $\delta(\xi)$  — функция Дирака. Если  $f(\tau) = \delta(\tau)$ , то  $\Phi_0(\xi, \tau)$  — запаздывающая функция Грина.

Решение уравнения (1.1) с источником (1.2) будем строить, используя преобразование Фурье по координате  $\xi$ , которое определим соотношением [8]

$$(F[\Phi], \varphi) = (\Phi, F[\varphi]), \quad \Phi \in S', \quad \varphi \in S$$

где

$$F[\varphi](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{i\xi k} d\xi$$

— преобразование Фурье основных функций  $\varphi \in S$  и преобразование Фурье — Лапласа по времени, которое определим формулой [8]

$$L[f](\omega) = F[f(\tau) e^{-\omega_2 \tau}](\omega_1), \quad \omega_2 > a_0; \quad \omega = \omega_1 + i\omega_2, \\ f(\tau) \in D_+'(a_0)$$

Применяя эти преобразования, получим

$$(1.3) \quad L[F[\Phi_l]] = (-ik)^l L[f]/D(\omega, k), \quad D(\omega, k) \equiv \\ \equiv M(-ik, -i\omega) = (-ik)^4 + (-ik)^2 [a_{21}(-i\omega) + \\ + a_{22}(-i\omega)^2] + a_{03}(-i\omega)^3 + a_{04}(-i\omega)^4$$

Дисперсионное уравнение  $D(\omega, k) = 0$ , являясь функцией двух комплексных переменных  $\omega$  и  $k$ , определяет при  $a_{04} \neq 0$  четыре нуля  $\omega_j(k)$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) как функции  $k$  или четыре нуля  $k_j(\omega)$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) как функции  $\omega$ . Последние запишем в виде

$$(1.4) \quad k_{1,2}(\omega) = (\omega/2)^{1/2} [-a_{22}\omega - ia_{21} \pm \Omega(\omega)]^{1/2} \\ k_{3,4}(\omega) = -k_{1,2}(\omega) \\ \Omega(\omega) = [(a_{22}\omega + ia_{21})^2 - 4\omega(a_{04}\omega + ia_{03})]^{1/2} = \\ = p_1^{1/2}(\omega - \omega_+)^{1/2}(\omega - \omega_-)^{1/2}, \quad \omega_{\pm} = -i\omega_2^{\circ} \pm \omega_1^{\circ} \\ \omega_1^{\circ} = 2p_2^{1/2}/p_1, \quad \omega_2^{\circ} = p_3/p_1, \quad p_1 = a_{22}^2 - 4a_{04} \\ p_2 = a_{22}a_{21}a_{03} - a_{21}^2a_{04} - a_{03}^2, \quad p_3 = a_{22}a_{21} - 2a_{03}$$

Разрезы, соединяющие точки ветвления  $\omega_{\pm}$ ,  $\omega = 0$ ,  $\omega = -ia_{03}/a_{04}$  функций  $k_1(\omega)$  и  $k_2(\omega)$ , проводим согласно работе [10], где изучены аналитические свойства такого типа функций, ветви фиксируем условием  $\text{Im } k_{1,2}(\omega) \geq \text{const} > 0$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ .

Используя критерий Рауса — Гурвица, можно показать, что

$$(1.5) \quad \text{Im } \omega_j(k) < 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad k \in R^1, \quad k \neq 0$$

при следующих ограничениях на коэффициенты уравнения (1.1):

$$(1.6) \quad a_{21} < 0, \quad a_{22} < 0, \quad a_{03} > 0, \quad a_{04} > 0, \quad p_2 > 0$$

Видно, что условие (1.5) является условием абсолютной устойчивости системы, которая описывается уравнением (1.1), т. е. из того, что  $\Psi(\xi, \tau) \in D_+'(a_0)$  по  $\tau$ , следует, что  $\Phi(\xi, \tau) \in D_+'(a_0)$  по  $\tau$ , где  $a_0$  — произвольное положительное число.

Согласно [11], уравнение, для которого выполняется неравенство (1.5), называется корректным по Петровскому и при условии

$$(1.7) \quad a_{04} > 0, \quad a_{22} < 0, \quad p_1 > 0$$

уравнение (1.1) гиперболическое. Записав уравнение (1.1) в виде

$$(1.8) \quad [\eta(c_-^2 \partial_{\xi}^2 - \partial_{\tau}^2)(c_+^2 \partial_{\xi}^2 - \partial_{\tau}^2) - \partial_{\tau}(c_0^2 \partial_{\xi}^2 - \partial_{\tau}^2)] \Phi(\xi, \tau) = \\ = \Psi(\xi, \tau) \\ c_{\pm} = [2/(-a_{22} \pm \sqrt{p_1})]^{1/2}, \quad c_0 = [-a_{21}/a_{03}]^{1/2}, \quad \eta = a_{04}/a_{03}$$

получим, что устойчивость его решения следует из выполнения условий [12]

$$(1.9) \quad c_- > c_0 > c_+ > 0, \quad \eta > 0$$

которые, как можно показать, эквивалентны условиям (1.6), (1.7).

Кроме того, по аналогии с работой [13] можно показать, что при выполнении условий (1.6), (1.7)

$$(1.10) \quad \text{Im } k_{1,2}(\omega) > 0 \quad \text{при} \quad \text{Im } \omega > 0$$

т. е. имеет место пространственное затухание волн (внешний сигнал не возрастает по мере удаления от границы).

Выполняя обратное преобразование Фурье с учетом условия (1.10), решения  $\Phi_l(\xi, \tau) = \partial_\xi^l \Phi_0(\xi, \tau)$  ( $l = 0, \dots, 4$ ) уравнения (1.1) с источниками (1.2) можно представить через пять функций  $G_j(|\xi|, \tau, n)$  ( $j = 1, 2, 3, 5, 6$ ) в виде

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \Phi_0 &= -1/2 G_3(|\xi|, \tau, 2) * f(\tau), \quad \Phi_1 = 1/2 G_1(|\xi|, \tau, 1) * \\ &* f(\tau) \text{ sign } \xi \\ \Phi_2 &= -1/2 G_5(|\xi|, \tau, 0) * f(\tau), \quad \Phi_3 = 1/4 [-a_{22} G_1(|\xi|, \tau, -1) - \\ &- a_{21} G_1(|\xi|, \tau, 0) + G_2(|\xi|, \tau, -1)] * f(\tau) \text{ sign } \xi \\ \Phi_4 &= 1/4 [a_{22} G_5(|\xi|, \tau, -2) + a_{21} G_5(|\xi|, \tau, -1) - \\ &- G_6(|\xi|, \tau, -2)] * f(\tau) + \delta(\xi) f(\tau) \end{aligned}$$

где функции  $G_j(|\xi|, \tau, n)$  записываются по формуле обращения для преобразования Фурье — Лапласа [8]

$$(1.12) \quad \begin{aligned} G_j(|\xi|, \tau, n) &= G_{j1}(|\xi|, \tau, n) + G_{j2}(|\xi|, \tau, n) \\ G_{jp}(|\xi|, \tau, n) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{d}{d\tau} - a_0 \right)^{m+2} \int_{-\infty+i\omega_2}^{\infty+i\omega_2} \frac{G_{jp}^L(\xi, \omega, n)}{(-i\omega - ia_0)^{m+2}} \exp(-i\omega\tau) d\omega \\ G_{jp}^L(\xi, \omega, n) &\equiv L[G_{jp}] (\omega) = R_{jp}(\omega) \exp[ik_p(\omega)|\xi|] / (-i\omega)^{n+1} \\ \omega_2 > \omega_2' > a_0, \quad m &= m(\omega_2'), \quad p = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 5, 6 \\ R_{1p}(\omega) &= (-1)^{p+1} \omega / \Omega(\omega), \quad R_{2p}(\omega) = 1, \quad R_{3p}(\omega) = \\ &= R_{1p}(\omega) \omega / k_p(\omega) \\ R_{5p}(\omega) &= (-1)^{p+1} k_p(\omega) / \Omega(\omega), \quad R_{6p}(\omega) = k_p(\omega) / \omega, \quad p = 1, 2 \end{aligned}$$

(звездочка означает свертку функций по  $\tau$ ). Значение  $m$  выбирается из условия абсолютной интегрируемости по  $\omega_1 \in R^1$  подынтегральной функции.

Отметим, что для функций  $G_j(|\xi|, \tau, n)$  справедливы соотношения

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \partial_\tau^p G_j(|\xi|, \tau, n) &= G_j(|\xi|, \tau, n - p) \\ G_j(|\xi|, \tau, n) * f(\tau) &= G_j(|\xi|, \tau, n + p) * \partial_\tau^p f(\tau) \end{aligned}$$

2. Приведем свойства функций  $G_j(|\xi|, \tau, n)$ , через которые представляются решения обобщенной задачи Коши и ее производные.

Используя асимптотическое представление функций  $G_{jp}^L(|\xi|, \omega, n)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , функции  $G_{jp}(|\xi|, \tau, n)$  ( $p = 1, 2$ ) вблизи волновых фронтов  $\tau = |\xi|/c_\pm$  можно представить в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} G_{j1}(|\xi|, \tau, n) &= f_j^+ \exp(-\eta_+ |\xi|) D_{n+1}(\tau_+) E_+(\tau_+) \\ G_{j2}(|\xi|, \tau, n) &= (-1)^j f_j^- \exp(-\eta_- |\xi|) D_{n+1}(\tau_-) E_-(\tau_-) \\ \tau_\pm &= \tau - |\xi|/c_\pm, \quad \tau_\pm \rightarrow 0, \quad E_\pm(x) = [1 + O(\eta_\pm c_\pm x)], \quad x \rightarrow 0 \\ \eta_\pm &= \frac{\pm 1}{2\eta c_\pm} \frac{c_0^2 - c_\pm^2}{c_-^2 - c_+^2}, \quad f_1^\pm = \frac{c_+^2 c_-^2}{c_-^2 - c_+^2} \\ f_2^\pm &= 1, \quad f_3^\pm = c_\pm f_1^\pm, \quad f_5^\pm = f_1^\pm / c_\pm, \quad f_6^\pm = 1/c_\pm \end{aligned}$$

$D_\alpha(x)$  — обобщенная функция из пространства  $D_+'(0)$ , зависящая от вещественного параметра  $\alpha$ ,  $-\infty < \alpha < +\infty$  [8]

$$D_\alpha(x) = \begin{cases} H(x) x^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha), & \alpha > 0 \\ d^N D_{\alpha+N} / dx, & \alpha \leq 0, \alpha + N > 0, N — \text{целое число} \end{cases}$$

$H(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $H(x) = 1$  при  $x > 0$ ,  $D_0(x) = \delta(x)$ . Обращает на себя внимание в соотношениях (2.1) вид коэффициентов затухания  $\eta_\pm$  как функций скоростей, из которого следует, что для положительности  $\eta_\pm$  необходима «иерархия волн», т. е. удовлетворение условия (1.9).

При  $\tau \rightarrow \infty$  для функций  $G_j(|\xi|, \tau, n)$  можно получить представление

$$(2.2) \quad G_j(|\xi|, \tau, n) \sim \sum_{m=0}^6 q_{jm} \left[ \Gamma\left(n + \frac{3-m}{2}\right) \tau^{-n-(1-m)/2} \right]^{-1}, \quad \tau \rightarrow \infty$$

где  $[\Gamma(n + (3-m)/2)]^{-1} = 0$ , если  $n + (3-m)/2 = 0, -1, -2, \dots$ ;  $\Gamma(x)$  — гамма функция; отличные от нуля коэффициенты  $q_{jm}$  имеют вид

$$\begin{aligned} q_{14} &= -(-a_{21})^{-1/2} |\xi|, & q_{12} &= 2, & q_{22} &= -(-a_{21})^{1/2} |\xi| \\ q_{33} &= -(-a_{21} a_{03})^{-1/2}, & q_{34} &= (-a_{21})^{-3/2} \\ q_{36} &= (-a_{21})^{-1/2} |\xi|^2 / 2 \\ q_{52} &= (-a_{21})^{-1/2}, & q_{53} &= -[(-a_{03}/a_{21})^{1/2}/a_{21} + |\xi|] \\ q_{60} &= (-a_{21})^{1/2}, & q_{61} &= a_{21} [(-a_{03}/a_{21})^{1/2}/a_{21} + |\xi|] \end{aligned}$$

Отметим, что функция  $G_j(|\xi|, \tau, n) \in D_+'(0)$ , хотя ее составляющие  $G_{jp}(|\xi|, \tau, n) \in D_+'(a_0)$ ,  $p = 1, 2$ , где  $a_0 = \max(0, -\omega_2^\circ)$ . †

Поведение функций  $G_j(|\xi|, \tau, n)$  на произвольных расстояниях позади фронта волны для больших  $\xi$  и  $\tau$  может быть определено методом перевала [9]. Так, в окрестности  $\tau = |\xi|/c_0$  можно получить асимптотическую формулу

$$(2.3) \quad \begin{aligned} G_j(|\xi|, \tau, n) &\sim q_j E(\tau_0) * F_j(\tau, n), \quad \tau_0 \rightarrow 0, \quad \tau c_0 / \gamma \rightarrow \infty \\ E(\tau_0) &= \exp[-(\tau_0/\tau_1)^2] [\pi^{1/2} \tau_1]^{-1}, \quad \tau_0 = \tau - |\xi|/c_0 \\ \tau_1 &= (4|\xi|\gamma/c_0^3)^{1/2} \\ F_j(\tau, n) &= D_n(\tau), \quad j = 1, 3, 5; \quad F_j(\tau, n) = D_{n+1}(\tau) \\ & \quad j = 2, 6 \\ q_1 &= -\eta c_+^2 c_-^2 / c_0^2, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = -\eta c_+^2 c_-^2 / c_0 \\ q_5 &= -\eta c_+^2 c_-^2 / c_0^3, \quad q_6 = 1/c_0, \quad \gamma = \eta (c_0^2 - c_+^2) (c_-^2 - \\ & \quad - c_0^2) / (2c_0^2) \end{aligned}$$

Функции  $G_j(|\xi|, \tau, n)$  ( $j = 1, 2, 3, 5, 6$ ) могут быть представлены в виде интегралов по отрезкам, соединяющим точки ветвления  $\omega = \omega_\pm$ ,  $\omega = 0$ ,  $\omega = -i/\eta$  функций  $k_1(\omega)$  и  $k_2(\omega)$ .

Приведем представление функций  $G_1(|\xi|, \tau, 0)$ ,  $G_1(|\xi|, \tau, 1)$ ,  $G_2(|\xi|, \tau, 0)$ , которые будут далее использованы в конкретных задачах

$$(2.4) \quad \begin{aligned} G_j(|\xi|, \tau, n) &= I_j(|\xi|, \tau, n) [H(\tau_-) - H(\tau_+)] + \\ &+ I_{j1}(|\xi|, \tau, n) H(\tau_+) + (-1)^j I_{j2}(|\xi|, \tau, n) H(\tau_-) \\ &(j = 1, 2, n = 0, 1) \end{aligned}$$

$$I_j(|\xi|, \tau, n) = \frac{1}{\pi} \exp(-\omega_2^\circ \tau) \int_{\delta_2}^{\omega_1^\circ} [\Psi_{jn}^+ \exp(-\alpha_+ |\xi|) +$$

$$+ \Psi_{jn}^- \exp(-\alpha_- |\xi|)] dx$$

$$\Psi_{10}^\pm = -l_0^{-1} \cos \varphi_\pm, \quad \Psi_{11}^\pm = (\omega_2^\circ \cos \varphi_\pm + x \sin \varphi_\pm) l_0^{-1} k_0^{-2}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{20}^{\pm} &= \pm l_0 \Psi_{11}^{\pm}, \quad l_0 = [(\omega_1^{\circ})^2 - x^2]^{1/2}, \quad k_0 = [(\omega_2^{\circ})^2 + x^2]^{1/2} \\ \varphi_{\pm} &= |\xi| \gamma_{\pm} - \tau x, \quad \gamma_{\pm} = 2^{-3/2} [(Z^{\circ} + X_{\pm}^{\circ})^{1/2} K_+ + \\ &+ (Z^{\circ} - X_{\pm}^{\circ})^{1/2} K_-] \\ K_{\pm} &= (k_0 \pm \omega_2^{\circ})^{1/2}, \quad \alpha_{\pm} = 2^{-3/2} [(Z^{\circ} + X_{\pm}^{\circ})^{1/2} K_- - \\ &- (Z^{\circ} - X_{\pm}^{\circ})^{1/2} K_+] \\ Z^{\circ} &= [(X_{\pm}^{\circ})^2 + (Y^{\circ})^2]^{1/2}, \quad X_{\pm}^{\circ} = \omega_2^{\circ} a_{22} - a_{21} \pm p_1^{1/2} l_0 \\ Y^{\circ} &= -x a_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{jm}(|\xi|, \tau, n) &= \frac{1}{\pi} \left[ (-1)^j \delta_{m2} \int_{\delta_1}^{1/\eta} \frac{\exp(-\tau x)}{(-x)^{n+1}} \theta_{jm} \sin(|\xi| (Ax)^{1/2}) dx + \right. \\ &+ \delta_{m1} \int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{\exp(-\tau x)}{(-x)^{n+1}} \theta_{jm} \sin(|\xi| (Ax)^{1/2}) dx - (-1)^j d_{jm}, \quad m = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^{\circ} &= [(\omega_2^{\circ} - x)^2 + (\omega_1^{\circ})^2]^{1/2}, \quad \theta_{11} = \theta_{10} = -x/k^{\circ}, \quad \theta_{20} = 1 \\ A &= (k^{\circ} p_1^{1/2} - a_{21} + x a_{22})/2, \quad \delta_{mj} = 1, \quad j = m, \quad \delta_{mj} = 0 \\ &j \neq m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{10} &= 0, \quad d_{20} = -1, \quad d_{11} = \begin{cases} -\text{sign}(\omega_2^{\circ}) p_1^{1/2}/a_{21}, & |\omega_2^{\circ}| \geq \delta_0 \\ -2\pi p_1^{1/2} a_{21}^{-1} \arcsin(\omega_2^{\circ}/\delta_0), & |\omega_2^{\circ}| \leq \delta_0 \end{cases} \\ \delta_1 &= \begin{cases} \delta_0, & \omega_2^{\circ} \leq \delta_0 \\ \omega_2^{\circ}, & \delta_0 \leq \omega_2^{\circ} \leq \eta^{-1} \\ \eta^{-1}, & \eta^{-1} \leq \omega_2^{\circ} \end{cases}, \quad \delta_2 = \begin{cases} 0, & |\omega_2^{\circ}| \geq \delta_0 \\ [(\delta_0)^2 - (\omega_2^{\circ})^2]^{1/2}, & |\omega_2^{\circ}| \leq \delta_0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\delta_1, \delta_2$  — переменные границы интегрирования — зависят от коэффициентов уравнения (1.1), где  $\delta_0$  — произвольно малая величина).

Отметим, что представление (2.4) справедливо для произвольных значений коэффициентов уравнения (1.1), удовлетворяющих условиям (1.6), (1.7).

В случае  $a_{04} \rightarrow 0$  уравнение (1.1) перестает быть гиперболическим, но представления (2.2), (2.3), (2.4) для функций  $G_j(|\xi|, \tau, n)$  остаются в силе, при этом необходимо учитывать, что  $c_- \rightarrow \infty$ ,  $c_+ \rightarrow (-a_{22})^{-1/2}$ ,  $\eta c_-^2 \rightarrow -a_{22}/a_{03}$  при  $a_{04} \rightarrow 0$ . Асимптотическое выражение (2.1) при  $a_{04} = 0$  необходимо заменить на следующее:

$$\begin{aligned} (2.5) \quad G_{j2}(|\xi|, \tau, n) &\sim (-1)^j f_j^{\circ} D_n(\tau) * U_j(|\xi|, \tau), \quad \tau \rightarrow +0 \\ U_1(|\xi|, \tau) &= U_2(|\xi|, \tau) = \text{erfc}(v), \quad U_3(|\xi|, \tau) = \\ &= (\pi\tau)^{-1/2} \exp(-v^2) \\ U_5(|\xi|, \tau) &= U_6(|\xi|, \tau) = 2[\tau^{1/2} U_3(|\xi|, \tau) - \\ &- v U_1(|\xi|, \tau)] \tau^{1/2} \\ v &= (-a_{03}/a_{22})^{1/2} (|\xi|/2)/\tau^{1/2}, \quad f_1^{\circ} = -1/a_{22}, \quad f_6^{\circ} = \\ &= (-a_{03}/a_{22})^{1/2} \\ f_2^{\circ} &= 1, \quad f_3^{\circ} = f_1^{\circ}/f_6^{\circ}, \quad f_5^{\circ} = f_6^{\circ} f_1^{\circ} \end{aligned}$$

3. Рассмотрим динамические процессы в термоупругом полупространстве, описываемые следующей системой уравнений [2]:

$$\begin{aligned} (3.1) \quad \{L_1 u\} - \{L_3 \theta\} &= 0, \quad \{L_2 \theta\} - \{L_4 u\} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ L_1 &= \partial_x^2 - \rho(\lambda + 2\mu)^{-1} \partial_t^2, \quad L_2 = \partial_x^2 - \kappa^{-1} L_0 \partial_t, \quad L_3 = \\ &= \beta(\lambda + 2\mu)^{-1} \partial_x \\ L_4 &= \eta_0 L_0 \partial_{tx}^2, \quad L_0 = 1 + t_r \partial_t; \quad \beta = \alpha_{\theta} (3\lambda + 2\mu) \end{aligned}$$

Здесь  $u(x, t)$  — перемещение,  $\theta(x, t)$  — температура,  $\alpha_\theta$  — коэффициент линейного теплового расширения,  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  $t_r$  — время релаксации теплового потока,  $\eta_0$  — коэффициент связанности,  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности,  $\rho$  — плотность,  $\partial_{tx}^2 = \partial^2/\partial t \partial x$ . Производные, заключенные в фигурные скобки, следует понимать в классическом смысле, незаключенные — в обобщенном смысле.

Поверхность полупространства подвергается механическому и тепловому воздействию следующим образом:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma(x, t) &= (\lambda + 2\mu) \{\partial_x u\} - \beta\theta = P(t) \quad \text{при } x = +0, \quad t > 0 \\ \theta(x, t) &= T(t) \quad \text{при } x = +0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

где  $\sigma$  — нормальное напряжение. Начальные условия считаем нулевыми:

$$(3.3) \quad u = \theta = \{\partial_t u\} = \{\partial_t \theta\} = 0 \quad \text{при } t = +0, \quad x > 0$$

Продолжая функции  $u(x, t), \theta(x, t)$  по  $t$  нулем для  $t < 0$ , соответственно, четным и нечетным образом по  $x$  для  $x < 0$  и учитывая связь классических производных с обобщенными [8], приведем поставленную задачу (3.1), (3.2), (3.3) к эквивалентной ей при  $x > 0$  обобщенной задаче Коши для системы

$$(3.4) \quad \begin{aligned} L_1 u - L_3 \theta &= \psi_1, \quad L_2 \theta - L_4 u = \psi_2, \quad x \in R^1, \quad t \in R^1 \\ \psi_1 &= 2\delta(x) P(t)/(\lambda + 2\mu), \quad \psi_2 = 2\delta^{(1)}(x) T(t) \end{aligned}$$

Решение системы (3.4) можно представить через функции  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2$ )

$$u = L_2 \varphi_1 + L_3 \varphi_2, \quad \theta = L_4 \varphi_1 + L_1 \varphi_2$$

которые определяются как решения обобщенной задачи Коши для уравнений

$$(L_1 L_2 - L_3 L_4) \varphi_j = \psi_j \quad (j = 1, 2)$$

и свойства которых в безразмерных переменных исследованы выше.

С учетом соотношений

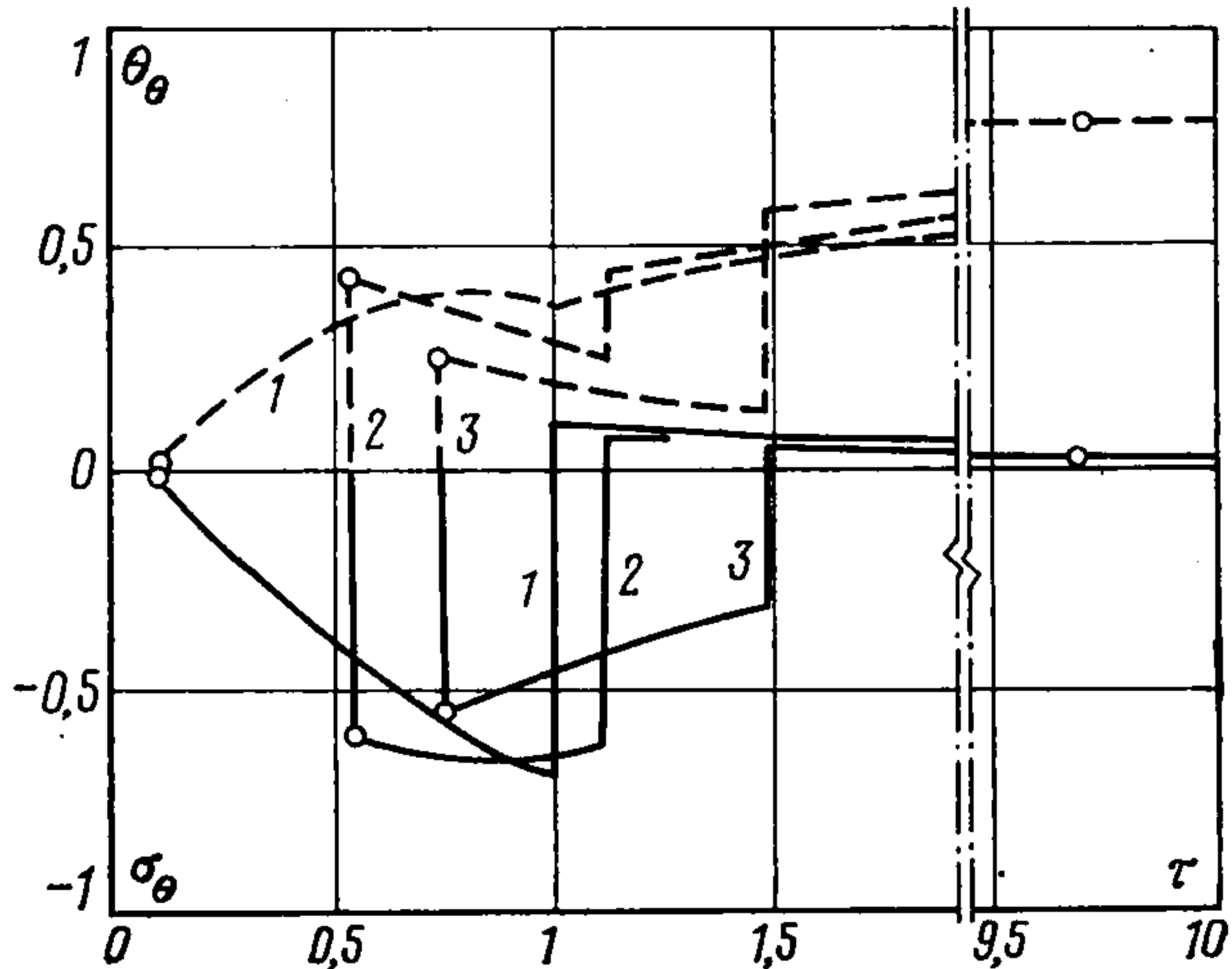
$$\begin{aligned} a_{21} &= -(1 + \varepsilon), \quad a_{22} = -1 - M^2(1 + \varepsilon), \quad a_{03} = 1, \\ a_{04} &= M^2 \\ \eta &= M^2, \quad \gamma = \varepsilon/(2c_0^2), \quad c_0 = (1 + \varepsilon)^{1/2}, \quad M = c_1/c_q \\ \varepsilon &= \beta\eta_0\kappa/(\lambda + 2\mu), \quad c_1 = (\lambda + 2\mu)^{1/2}/\rho^{1/2}, \quad c_q = (\kappa/t_r)^{1/2} \\ M_0 &= 1 - M^2(1 + \varepsilon), \quad P(t) = \sigma_* P_0(\tau), \quad T(t) = \theta_* T_0(\tau) \\ \sigma_* &= \beta\theta_*, \quad \tau = c_1^2 t/\kappa, \quad \xi = c_1 x/\kappa \end{aligned}$$

безразмерное напряжение  $\sigma/\sigma_*$  и температуру  $\theta/\theta_*$  представим в виде

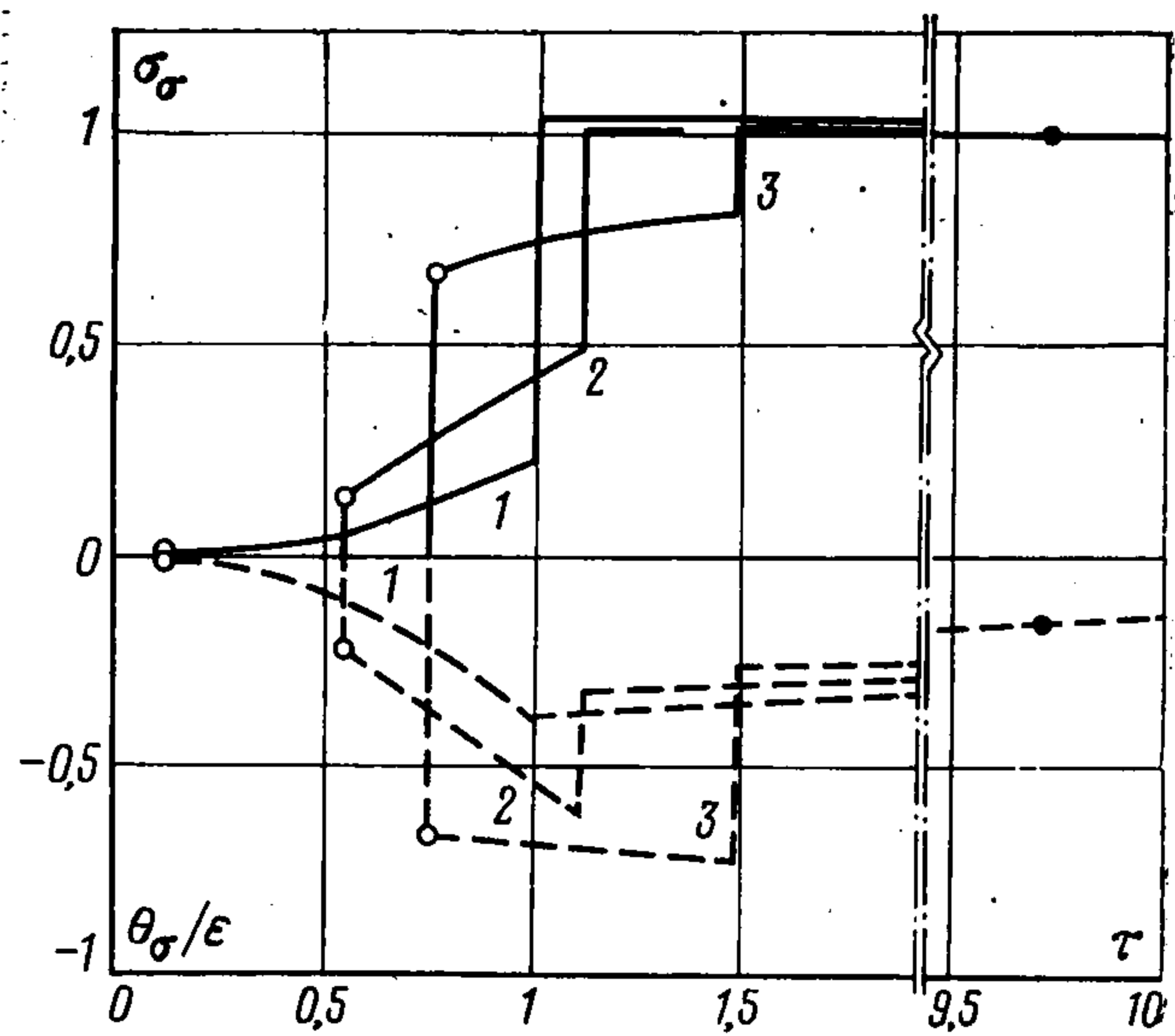
$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sigma(\xi, \tau)/\sigma_* &= [\sigma_\sigma(\xi, \tau) + \sigma_\theta(\xi, \tau)] \text{sign } \xi \\ \theta(\xi, \tau)/\theta_* &= [\theta_\sigma(\xi, \tau) + \theta_\theta(\xi, \tau)] \text{sign } \xi \end{aligned}$$

где безразмерное напряжение  $\sigma_\sigma$  и температура  $\theta_\sigma$  (напряжение  $\sigma_\theta$  и температура  $\theta_\theta$ ) от механического воздействия (от теплового воздействия) при задании нулевой температуры (нулевого напряжения) имеют вид

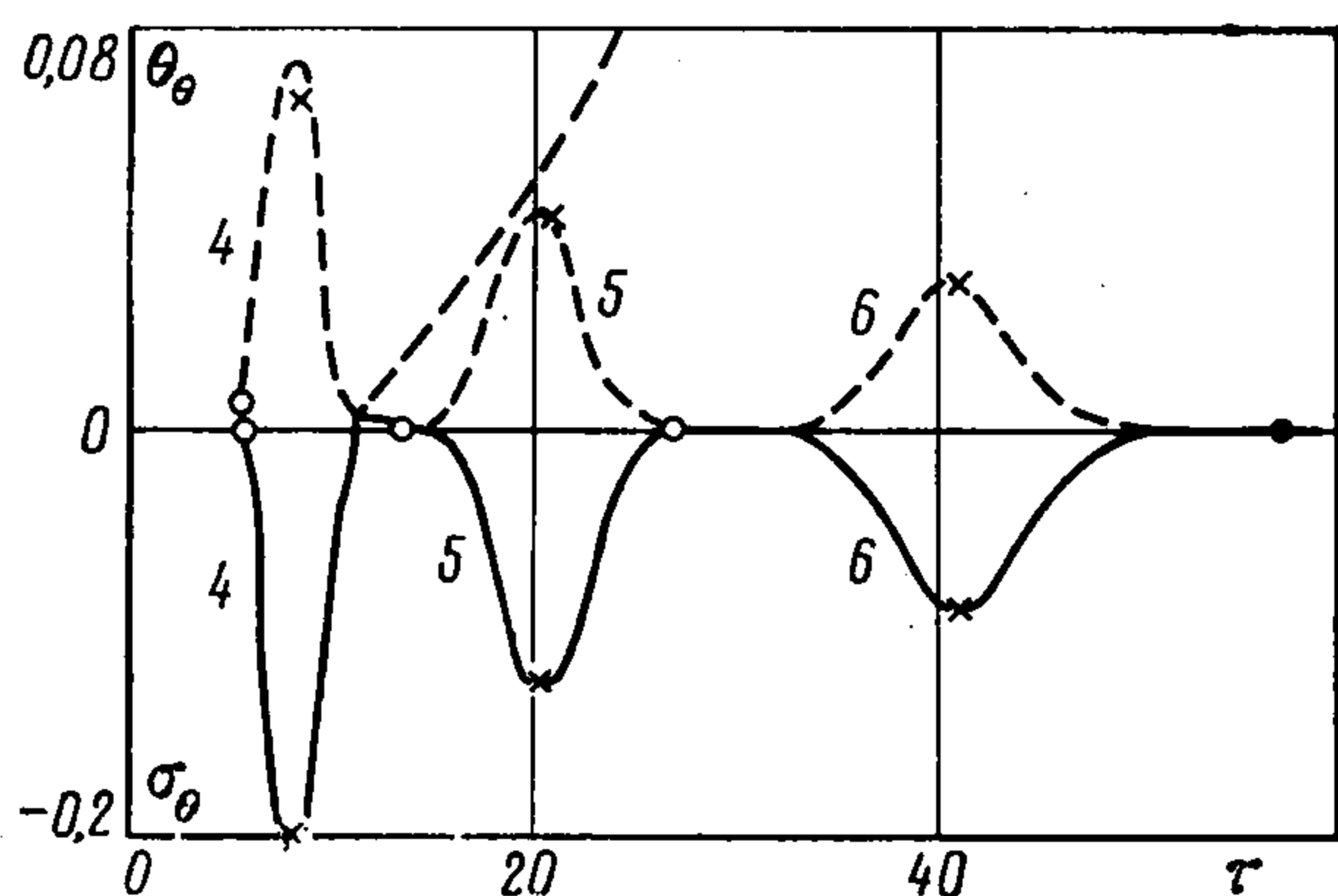
$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma_\sigma(\xi, \tau) &= 1/2 [M_0 G_1(|\xi|, \tau, -1) - c_0^2 G_1(|\xi|, \tau, 0) + \\ &+ G_2(|\xi|, \tau, -1)] * P_0(\tau) \\ \theta_\sigma(\xi, \tau) &= \varepsilon [G_1(|\xi|, \tau, 0) + M^2 G_1(|\xi|, \tau, -1)] * P_0(\tau) \\ \sigma_\theta(\xi, \tau) &= G_1(|\xi|, \tau, -1) * T_0(\tau) \\ \theta_\theta(\xi, \tau) &= 1/2 [-M_0 G_1(|\xi|, \tau, -1) + c_0^2 G_1(|\xi|, \tau, 0) + \\ &+ G_2(|\xi|, \tau, -1)] * T_0(\tau) \end{aligned}$$



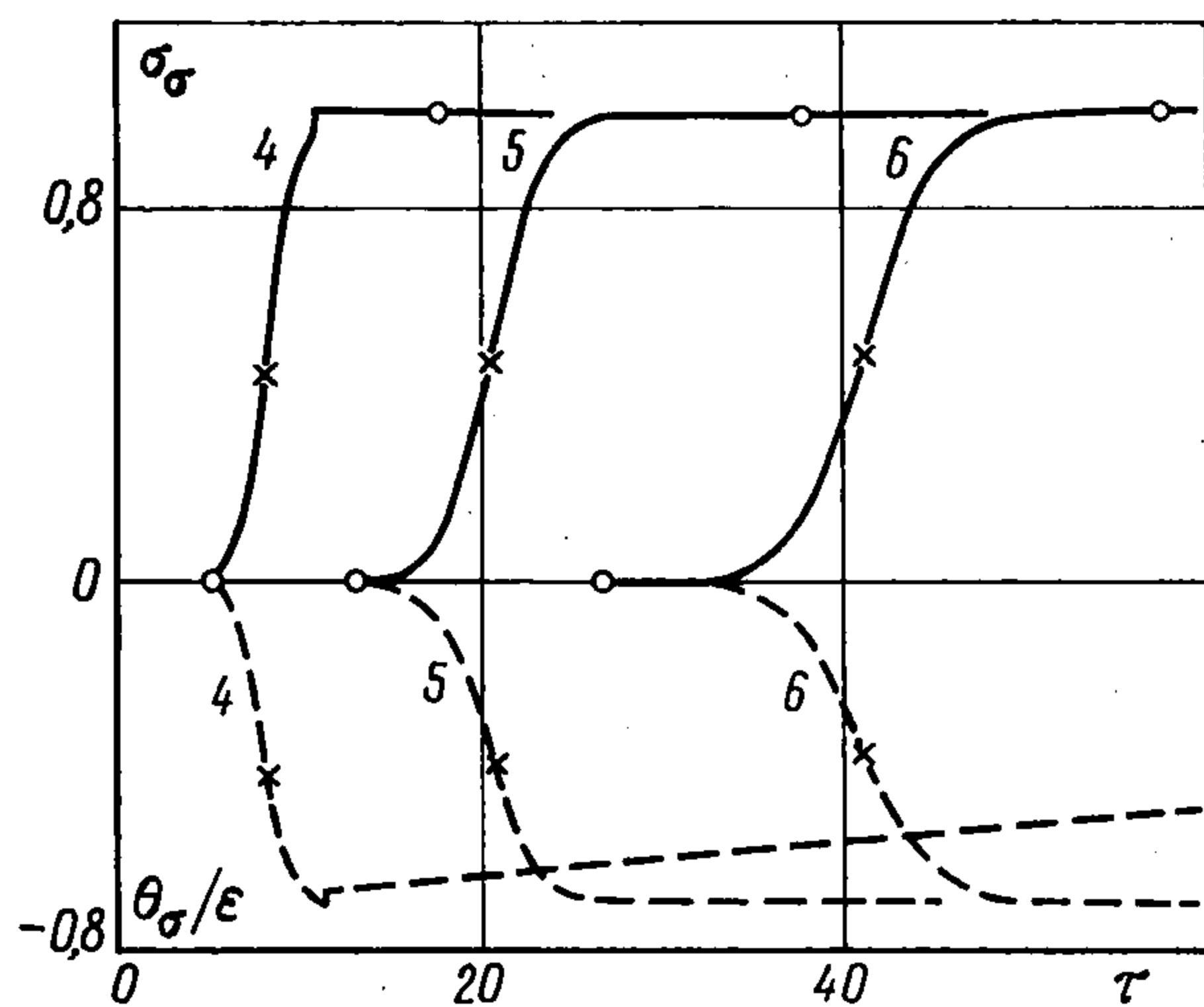
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Проанализируем поведение одиночного возмущения напряжения и температуры, заданного на границе  $\xi = 0$  термоупругого полупространства  $\xi > 0$ .

Первое (второе) возмущение напряжений  $\sigma_\sigma^-$  ( $\sigma_\sigma^+$ ) и  $\sigma_\theta^-$  ( $\sigma_\theta^+$ ) и температур  $\theta_\sigma^-$  ( $\theta_\sigma^+$ ) и  $\theta_\theta^-$  ( $\theta_\theta^+$ ) распространяется со скоростью  $c_-$  ( $c_+$ )

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sigma_\sigma^\mp(\xi, \tau) &= 1/2 (1 \mp M_0 p_1^{-1/2}) P_0(\tau_\mp) \exp(-\eta_\mp \xi) \\ \sigma_\theta^\mp(\xi, \tau) &= \mp p_1^{-1/2} T_0(\tau_\mp) \exp(-\eta_\mp \xi) \\ \theta_\sigma^\mp(\xi, \tau) &= \mp \varepsilon M^2 p_1^{-1/2} P_0(\tau_\mp) \exp(-\eta_\mp \xi) \\ \theta_\theta^\mp(\xi, \tau) &= 1/2 (1 \pm M_0 p_1^{-1/2}) T_0(\tau_\mp) \exp(-\eta_\mp \xi), \quad \tau_\mp \rightarrow 0 \end{aligned}$$

т. е. при фиксированном  $\xi$  вблизи фронта волны напряжение и температура сохраняют форму входного сигнала, но эти возмущения экспоненциально затухают и становятся пренебрежимо малыми на расстоянии  $1/\eta_\mp$ .

Если предположить, что для исходного возмущения  $P_0(\tau)$  характерен масштаб времени  $\tau_\sigma$ , а для  $dT_0(\tau)/d\tau - \tau_\theta$ , т. е.  $P_0(\tau)$ ,  $dT_0(\tau)/d\tau$  — уединенные импульсы с характерными длительностями  $\tau_\sigma$  и  $\tau_\theta$ , то на расстояниях  $\tau_1 \gg \tau_\sigma^-$ ,  $\tau_1 \gg \tau_\theta^-$ ,  $\tau_1^2 = 2\xi \varepsilon c_0^{-5}$  поведение возмущений напряжений и температур описывается асимптотическими выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_\sigma &\sim E(\tau_0) A_\sigma, \quad \sigma_\theta \sim -c_0^{-2} E(\tau_0) A_\theta \\ \theta_\sigma &\sim -\varepsilon c_0^{-2} E(\tau_0) A_\sigma, \quad \theta_\theta \sim \varepsilon c_0^{-4} E(\tau_0) A_\theta \\ \tau/\varepsilon &\rightarrow \infty, \quad \tau \sim \xi/c_0 \\ A_\sigma &= \int_0^\infty P_0(\tau) d\tau < \infty, \quad A_\theta = \int_0^\infty \frac{d}{d\tau} T_0(\tau) d\tau < \infty \end{aligned}$$

Таким образом, с течением времени основная часть возмущений приобретает колоколообразную форму и начинает распространяться с безразмер-

ной адиабатической скоростью  $c_0$  ( $c_s = c_1 c_0$  — адиабатическая скорость распространения волны расширения). Эти волны расплываются, их ширина растет  $\sim \tau_1$ , а амплитуда падает  $\sim \tau_1^{-1}$ . Этот эффект является следствием особенностей распространения импульсов в средах с дисперсией и поглощением и является общим для всех типов волн.

Численный анализ проведен для случая внезапного приложения механического воздействия ( $P_0(\tau) = H(\tau)$ ) и теплового удара [14] ( $T_0(\tau) = H(\tau)$ ) и для большого коэффициента связанности  $\varepsilon = 0,46$  [3, 15], т. е. для случаев, наиболее неблагоприятных для численных методов, которые применялись для решения подобных задач [16—19] и асимптотических методов разложения решения по малому параметру связанности. Для такой нагрузки согласно (3.6)

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \sigma_\sigma(\xi, \tau) &= 1/2 [M_0 G_1(\xi, \tau, 0) - c_0^2 G_1(\xi, \tau, 1) + G_2(\xi, \tau, 0)] \\ \theta_\sigma(\xi, \tau) &= \varepsilon [G_1(\xi, \tau, 1) + M^2 G_1(\xi, \tau, 0)] \\ \sigma_\theta(\xi, \tau) &= G_1(\xi, \tau, 0) \\ \theta_\theta(\xi, \tau) &= 1/2 [-M_0 G_1(\xi, \tau, 0) + c_0^2 G_1(\xi, \tau, 1) + G_2(\xi, \tau, 0)] \end{aligned}$$

где  $G_j(\xi, \tau, n)$  вычисляются согласно (2.4).

На фиг. 1, 2 приводятся согласно (3.8), (2.4) изменение динамических напряжений (сплошные кривые) и температур (штриховые кривые) в фиксированном сечении  $\xi = 1$  в зависимости от безразмерного времени  $\tau$  при разных значениях параметра  $M$ , равных 0,1; 0,6; 1,1 (кривые 1—3). На фиг. 3, 4 показано изменение тех же величин в зависимости от безразмерного времени  $\tau$  при  $M = 0,6$  и  $\xi = 10, 25, 50$  (кривые 4—6).

Светлыми, темными точками и крестиками нанесены результаты, полученные, соответственно, по асимптотическим формулам (3.7), (2.2), (2.3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А. Некоторые вопросы теории сопряженных полей в механике сплошных сред. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 3, с. 29—33.
2. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
3. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Николаевский В. Н., Васниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
6. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1963. 535 с.
7. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф. Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наук. думка, 1982. 293 с.
8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.
9. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 547 с.
10. Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А. Аналитические свойства характеристических параметров обобщенной термоупругости. — Математические методы и физико-механические поля: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1982, вып. 15, с. 48—52.
11. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958. 274 с.
12. Whitham G. B. Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics. — Commun Pure Appl. Math., 1959, v. 12, No. 1, p. 113—158.
13. Мокрик Р. И., Пырьев Ю. А. Свойства решений динамических задач обобщенной связанной термоупругости. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 912—918.
14. Попов Е. Б. Динамическая связанная задача термоупругости для полупространства с учетом конечной скорости распространения тепла. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 2, с. 328—334.
15. Dillon O. W. Thermoelasticity when the material coupling parameter equals unity. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1965, v. 32, No. 2, p. 378—382.
16. Грибанов В. Ф., Паничкин Н. Г. Исследование эффекта термомеханического взаимодействия методом конечных элементов. — Прикл. механика, 1979, т. 15, № 6, с. 20—25.
17. Шаталов А. Г. Влияние времени релаксации теплового потока на волны напряжения в полубесконечной среде. — Физика и химия конденсированных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж. политехн. ин-та, 1981, с. 94—97.
18. Nickel R. E., Sackman J. L. Approximate solutions in linear, coupled thermoelasticity. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 2, p. 255—266.
19. Ting E. C., Chen H. C. A unified numerical approach for thermal stress waves. — Comput. and Struct., 1982, v. 15, No. 2, p. 165—175.