Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 531.36+62—50

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Шайхет Л. Е.

Исследуется задача оптимального управления стохастическим интегрально-функциональным уравнением нейтрального типа с интегральным функционалом качества. Получено необходимое условие оптимальности управления. В случае линейно-квадратичной задачи выписан явный вид оптимального управления.

Рассматриваемый класс уравнений возник как синтез уравнений Вольтерры и стохастических дифференциальных уравнений с последействием нейтрального типа. Задача оптимального управления такими системами является естественным развитием теории управляемых дифференциальных уравнений [1—8]. Примеры реальных объектов, математические модели которых содержат уравнения с последействием, приведены в [9]. Изучение интегральных уравнений нейтрального типа необходимо в задачах управляемого движения тел в сплошной среде [10]. Уравнения Вольтерры появились впервые в теории ползучести и составляют основу этой теории [11, 12].

1. Пусть $\{\xi_u(t), J(u), U\}$ — некоторая задача оптимального управления с траекторией движения $\xi_u(t)$, функционалом качества $J(u)$ и множеством допустимых управлений U. Пусть u_0 и u_ε — два «близких» один к другому при $\varepsilon > 0$ и совпадающих при $\varepsilon = 0$ элемента из U, для которых существует предел

$$J'(u_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}[J(u_\varepsilon) - J(u_0)] \tag{1.1}$$

Если u_0 — оптимальное управление задачи $\{\xi_u(t), J(u), U\}$, т. е. $J(u_0) = \inf_{u\in U} J(u)$, то величина $J'(u_0)$ неотрицательна. Таким образом, неравенство $J'(u_0) \geqslant 0$ является необходимым условием оптимальности управления u_0. В некоторых случаях оно может служить для построения синтеза оптимального управления.

Цель работы — вычисление предела (1.1) для задачи управления с траекторией движения, заданной стохастическим интегрально-функциональным уравнением (1.2) и функционалом качества (1.3)

$$\xi(t) = \eta(t) + \Phi(t, \theta_t\xi) + \int_0^t A(t, s, \theta_s\xi, u(s), ds) \tag{1.2}$$

$$\theta_0\xi = \varphi_0$$

$$A(t, s, \varphi, u, h) = a(t, s, \varphi, u)h + b(t, s, \varphi)(w(t+h) - \\ -w(t)) + \int c(z; t, s, \varphi)\, \nu^\circ([t, t+h], dz)$$

$$J(u) = M\left[F(\theta_T\xi) + \int_0^T G(s, \theta_s\xi, u(s))\, ds\right] \tag{1.3}$$

Введем необходимые обозначения и определения: $\{\Omega, \sigma, P\}$ — заданное вероятностное пространство; $\{f_t\}$ — поток σ-алгебр, $f_t \subset \sigma$, $t \in [0, T]$, $M_t = M\{\cdot/f_t\}$; $\|\varphi\|_0$ ($\|\varphi\|_1$) — норма функции $\varphi(t)$, определенная соотношением

$$\|\varphi\|_0 = [\sup_{t\leqslant 0} M|\varphi(t)|^2]^{1/2}$$

$$(\|\varphi\|_1 = [\sup_{t\in[0,T]} M|\varphi(t)|^2]^{1/2})$$

H_0 (H_1)— пространство f_0 (f_t)-измеримых функций $\varphi(t)$, $\varphi(t) \in R^n$, $t \in \in (-\infty, 0]$ ($[0, T]$), непрерывных справа, имеющих предел слева и таких, что $\|\varphi\|_0 < \infty$ ($\|\varphi\|_1 < \infty$); U — множество допустимых управлений, т. е. f_t-измеримых функций $u(t)$, $u(t) \in R^l$, $t \in [0, T]$, при которых существует решение уравнения (1.2) и конечен функционал (1.3); U_0 — множество f_t-измеримых функций $u(t)$, $u(t) \in R^l$, $t \in [0, T]$, таких, что $\|u\|_1 < \infty$; $D(\alpha)$ — множество f_t-измеримых функций $\varphi(t)$, таких, что при некоторых $\alpha > 0$ и $c > 0$ для любых t и s из области определения $\varphi(t)$ имеет место соотношение $M|\varphi(t) - \varphi(s)|^2 \leqslant c|t-s|^\alpha$; S — множество неубывающих функций $K(\tau)$, $\tau \in (-\infty, 0]$, непрерывных справа, имеющих предел слева и таких, что

$$\int_{-\infty}^{0} dK(\tau) < \infty$$

Будем говорить, что функция $K(\tau)$ из S имеет изолированный скачок в нуле, если существует такое $\delta > 0$, что на отрезке $[-\delta, 0]$ она имеет единственный скачок в нуле: $dK(0) = K(0) - K(-0)$; S_1 — подмножество функций из S, имеющих изолированный скачок в нуле, меньший единицы, т. е. $dK(0) < 1$; S_0 — подмножество функций из S, непрерывных в некоторой достаточно малой окрестности нуля $[-\delta, 0]$ (отметим, что из $K(\tau) \in S_1$ и $K_0(\tau) = K(\tau)$ при $\tau < 0$, $K_0(0) = K(-0)$ следует $K_0(\tau) \in S_0$); V — множество неотрицательных неубывающих по $\tau \in \in [0, t]$ функций $R(t, \tau)$, $t \in [0, T]$, таких, что

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_0^t dR(t, \tau) < \infty$$

S_2 — подмножество функций $K(\tau)$ из S, для которых ядро $dK(\tau - t)$ имеет резольвенту в V.

Если X и Y — два нормированных пространства, а $B(x)$ — некоторое отображение X в Y, то $\nabla B(x)$ — производная Гато этого отображения. При фиксированном $x_0 \in X$ $\nabla B(x_0)$ — линейный оператор, отображающий X в Y ([13], с. 471). Для произвольных x_0 и x_1 из X справедливо соотношение

$$B(x_1) - B(x_0) = \int_0^1 \nabla B(x_0 + \tau(x_1 - x_0))(x_0 - x_1)\, d\tau \tag{1.4}$$

Если $Y = R^1$, то $\langle \nabla B(x_0), x\rangle$ — значение линейного функционала $\nabla B(x_0)$ на элементе $x \in X$ ([14], с. 62).

Буквами c и α (с индексами или без) обозначаются различные положительные постоянные, $a \wedge b = \min[a, b]$. Скалярные функции $F(\varphi)$, $G(t, \varphi, u)$, n-мерные функции $\Phi(t, \varphi)$, $a(t, s, \varphi, u)$, $c(z; t, s, \varphi)$ и матричная функция $b(t, s, \varphi)$ размерности $n \times m$ определены при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \leqslant T$, $z \in R^n$, $u \in R^l$, $\varphi \in H_0$. Центрированная пуассоновская мера $\nu^\circ(t, A)$ с параметром $t\Pi(A)$ и m-мерный винеровский процесс $w(t)$ взаимно независимы и f_t-измеримы; $\eta(t)$ — f_t-измеримый случайный процесс; θ_t — семейство операторов сдвига: $\theta_t\xi(s) = \xi(t+s)$, $s \leqslant 0$, $t \geqslant 0$.

Процесс $\xi(t)$ при $t < 0$ считается известным, причем $\theta_0\xi = \varphi_0 \in H_0$. При $t > 0$ он определяется уравнением (1.2). Предполагается выполненным «условие склейки», характерное для уравнений нейтрального типа ([9], с. 28)

$$\varphi_0(0) = \eta(0) + \Phi(0, \varphi_0) \tag{1.5}$$

Пусть

(1.6) $$u_0 \in U$$

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v, & t \in [t_0 - \varepsilon, t_0), \quad 0 < \varepsilon < t_0 < T \\ u_0(t), & t \in [0, T] \setminus [t_0 - \varepsilon, t_0) \end{cases}$$

$$q_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(t) - \xi_0(t)), \quad p_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(\Phi(t, \theta_t\xi_\varepsilon) - \Phi(t, \theta_t\xi_0))$$

$$C_\varepsilon(t, s, u, ds) = A(t, s, \theta_s\xi_\varepsilon, u, ds) - A(t, s, \theta_s\xi_0, u_0(s), ds)$$

$$\eta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0\wedge t} C_\varepsilon(t, s, v, ds), \quad t \in [t_0 - \varepsilon, T]$$

$$\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} C_\varepsilon(t, s, u_0(s), ds), \quad t \in [t_0, T]$$

ξ_0 — решение уравнения (1.2) при управлении u_0, ξ_ε — при u_ε.

Полагая $\rho_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in [0, t_0]$, $\eta_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in [0, t_0 - \varepsilon]$, можно получить

$$q_\varepsilon(t) = \eta_\varepsilon(t) + p_\varepsilon(t) + \rho_\varepsilon(t), \quad t \in [0, T]$$

Пусть

$$\lambda_\varepsilon^\tau(t) = \xi_0(t) + \tau(\xi_\varepsilon(t) - \xi_0(t)), \quad \tau \in [0, 1]$$

$$\Phi_\varepsilon(t) = \int_0^1 \nabla\Phi(t, \theta_t\lambda_\varepsilon^\tau)\, d\tau, \quad \varepsilon \geqslant 0$$

$$A_\varepsilon(t, s, h) = \int_0^1 \nabla A(t, s, \theta_s\lambda_\varepsilon^\tau, u_0(s), h)\, d\tau, \quad \varepsilon \geqslant 0$$

Тогда

$$p_\varepsilon(t) = \Phi_\varepsilon(t)\,\theta_t q_\varepsilon, \quad \rho_\varepsilon(t) = \int_{t_0}^{t} A_\varepsilon(t, s, ds)\,\theta_s q_\varepsilon$$

т. е. $q_\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению

(1.7) $$q_\varepsilon(t) = \eta_\varepsilon(t) + \Phi_\varepsilon(t)\,\theta_t q_\varepsilon + \int_{t_0}^{t} A_\varepsilon(t, s, ds)\,\theta_s q_\varepsilon$$

Рассмотрим также уравнение

(1.8) $$q_0(t) = \eta_0(t) + \Phi_0(t)\,\theta_t q_0 + \int_{t_0}^{t} A_0(t, s, ds)\,\theta_s q_0$$

(1.9) $$\eta_0(t) = a(t, t_0, \theta_{t_0}\xi_0, v) - a(\cdot, u_0(t_0))$$

Полагая

(1.10) $$\zeta_\varepsilon(t) = \Psi_\varepsilon(t)\,\theta_t q_0 + \int_{t_0}^{t} B_\varepsilon(t, s, ds)\,\theta_s q_0$$

$$\Psi_\varepsilon(t) = \Phi_\varepsilon(t) - \Phi_0(t), \quad B_\varepsilon(t, s, h) = A_\varepsilon(t, s, h) - A_0(t, s, h)$$

$$l_\varepsilon(t) = q_\varepsilon(t) - q_0(t), \quad \gamma_\varepsilon(t) = \eta_\varepsilon(t) - \eta_0(t)$$

получим

(1.11) $$l_\varepsilon(t) = \zeta_\varepsilon(t) + \gamma_\varepsilon(t) + \Phi_\varepsilon(t)\,\theta_t l_\varepsilon + \int_{t_0}^{t} A_\varepsilon(t, s, ds)\,\theta_s l_\varepsilon$$

Отметим, что из (1.2), (1.3), (1.6) следует

$$\frac{1}{\varepsilon}(J(u_\varepsilon)-J(u_0))=\mathrm{M}\Big[\frac{1}{\varepsilon}(F(\theta_T\xi_\varepsilon)-F(\theta_T\xi_0))+ \tag{1.12}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0}(G(s,\theta_s\xi_\varepsilon,v)-G(s,\theta_s\xi_0,u_0(s)))\,ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(G(s,\theta_s\xi_\varepsilon,u_0(s))-G(s,\theta_s\xi_0,u_0(s)))\,ds\Big]$$

Введем следующие условия:
1°. $\varphi\in H_0$; 2°. $\eta\in H_1$; 3°. $u_0\in U_0$; 4°. $\varphi\in D(\alpha_1)$; 5°. $\eta\in D(\alpha_2)$; 6°. $u_0\in D(\alpha_3)$; 7°. Случайная величина v $f_{t_0-\varepsilon}$-измерима, $M\mid v\mid^2<\infty$.
В условиях 8°—14° используются обозначения:

$$Q_{ij}{}^k=\int_{-\infty}^{0}|\varphi_k(\tau)|^i\,dK_j(\tau),\quad Q_j=Q_{0j}{}^k,\quad K_2(\tau)=K_2(z,\tau)$$

$$P_{ij}=\int_{-\infty}^{0}|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)|^i\,dK_j(\tau)$$

$$R_{ij}=\int_{-\infty}^{0}|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)|^i\,|\varphi(\tau)|^i\,dK_j(\tau)$$

$$Z_j=\int_{-\infty}^{0}|\varphi_1(\tau)|\,|\varphi_2(\tau)|\,dK_j(\tau)$$

$$L_{ij}{}^k=(1+|u_1|^2+|u_2|^2)^k\,Q_j+Q_{ij}{}^1+Q_{ij}{}^2$$

8°. Функции Φ, a, b, c таковы, что

$$|\Phi(t,\varphi_1)|\leqslant Q_0+Q_{10}{}^1,\quad |a(t,s,\varphi_1,u)|^2\leqslant(1+$$
$$+|u|^2)\,Q_1+Q_{21}{}^1$$
$$|b(t,s,\varphi_1)|^2\leqslant Q_1+Q_{21}{}^1,\quad |c(z;t,s,\varphi_1)|^2\leqslant Q_2+Q_{22}{}^1$$

9°. Функции Φ, a, b, c таковы, что

$$|\Phi(t_1,\varphi_1)-\Phi(t_2,\varphi_2)|\leqslant P_{10}+|t_1-t_2|^{\alpha_4}L_{10}{}^\circ$$
$$|a(t_1,s_1,\varphi_1,u_1)-a(t_2,s_2,\varphi_2,u_2)|^2\leqslant P_{21}+|u_1-$$
$$-u_2|^2\,Q_1+(|t_1-t_2|^{\alpha_5}+|s_1-s_2|^{\alpha_6})\,L_{21}{}^1$$
$$|b(t_1,s_1,\varphi_1)-b(t_2,s_2,\varphi_2)|^2\leqslant P_{21}+|t_1-t_2|^{\alpha_7}L_{21}{}^\circ$$
$$|c(z;t_1,s_1,\varphi_1)-c(z;t_2,s_2,\varphi_2)|^2\leqslant P_{22}+|t_1-t_2|^{\alpha_8}L_{22}{}^\circ$$

10°. Функции Φ, a, b, c имеют производные Гато по φ, причем для любых φ_1 и φ_2 из H_0

$$|\nabla\Phi(t,\varphi_1)\,\varphi_2|\leqslant Q_{10}{}^2,\quad |\nabla c(z;t,s,\varphi_1)\,\varphi_2|^2\leqslant Q_{22}{}^2$$
$$|\nabla a(t,s,\varphi_1,u)\,\varphi_2|^2+|\nabla b(t,s,\varphi_1)\,\varphi_2|^2\leqslant Q_{21}{}^2$$

11°. Функции Φ, a, b, c имеют производную Гато по φ, причем для любых φ_1, φ_2 и φ из H_0

$$|(\nabla\Phi(t,\varphi_1)-\nabla\Phi(t,\varphi_2))\,\varphi|^2+$$
$$+|(\nabla a(t,s,\varphi_1,u)-\nabla a(t,s,\varphi_2,u))\,\varphi|^2+$$
$$+|(\nabla b(t,s,\varphi_1)-\nabla b(t,s,\varphi_2))\,\varphi|^2\leqslant R_{21}$$
$$|(\nabla c(z;t,s,\varphi_1)-\nabla c(z;t,s,\varphi_2))\,\varphi|^2\leqslant R_{22}$$

12°. Функции F и G таковы, что

$$|F(\varphi_1)|\leqslant Q_1+Q_{21}{}^1$$
$$|G(t,\varphi_1,u)|\leqslant(1+|u|^2)\,Q_1+Q_{21}{}^1$$

13°. Функция G такова, что

$$| G(t_1, \varphi_1, u_1) - G(t_2, \varphi_2, u_2) | \leqslant (L_{21}^1)^{1/2} [| u_1 - u_2 | + P_{11}] + + | t_1 - t_2 |^{\alpha_0} L_{21}^1$$

14°. Функции F и G имеют производную Гато по φ, причем для любых φ_1, φ_2 и φ из H_0

$$| \langle \nabla F(\varphi_1), \varphi_2 \rangle | \leqslant Q_1 + Z_1$$

$$| \langle \nabla G(t, \varphi_1, u), \varphi_2 \rangle | \leqslant (1 + | u |) Q_1 + Z_1$$

$$| \langle \nabla F(\varphi_1) - \nabla F(\varphi_2), \varphi \rangle | + + | \langle \nabla G(t, \varphi_1, u) - \nabla G(t, \varphi_2, u), \varphi \rangle | \leqslant R_{11}$$

В условиях 8°—14° предполагается, что

$$K_0 \in S_1 \cap S_2, \quad K = K_1 + \int K_2(z) \Pi(dz) \in S$$

Функции K_0, K_1, K_2 будем считать одними и теми же для всех условий.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1°—14°. Тогда при любом $t_0 \in [0, T]$ предел (1.1), (1.6) для задачи управления (1.2), (1.3) существует и равен

$$J'(u_0) = M \Big[G(t_0, \theta_{t_0}\xi_0, v) - G(\cdot, u_0(t_0)) + + \langle \nabla F(\theta_T \xi_0), \theta_T q_0 \rangle + \int_{t_0}^{T} \langle \nabla G(s, \theta_s \xi_0, u_0(s)), \theta_s q_0 \rangle \, ds \Big] \tag{1.13}$$

где $q_0(t)$ — решение уравнения (1.8).

2. Для доказательства теоремы 1 потребуются следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $\alpha(t)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha(t) \leqslant \beta(t) + \int_{-t}^{0} \alpha(t + s) \, dK(s), \quad t \in [0, T], \quad K \in S_0 \cap S_2$$

где $\beta(t)$ — неотрицательная, неубывающая, непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $\alpha(s) \leqslant c\beta(t)$.

Доказательство. Введем последовательность функций $\gamma_n(t)$, такую, что

$$\gamma_0(t) = \alpha(t), \quad \gamma_n(t) = \beta(t) + \int_{-t}^{0} \gamma_{n-1}(t + s) \, dK(s), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Можно показать, что $\gamma_n(t) \geqslant \gamma_{n-1}(t)$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $t \in [0, T]$. Пусть $\alpha_0(t)$ — решение уравнения

$$\alpha_0(t) = \beta(t) + \int_{-t}^{0} \alpha_0(t + s) \, dK(s)$$

Оно существует и единственно ([9], с. 30). Таким образом, $\lim \gamma_n(t) = \alpha_0(t)$ при $n \to \infty$, причем $\alpha(t) \leqslant \alpha_0(t)$. Имеем

$$\alpha_0(t) = \beta(t) + \int_0^t \alpha_0(s) \, dK(s - t) = \beta(t) + \int_0^t dR(t, s) \beta(s) \leqslant$$

$$\leqslant \beta(t) \left[1 + \int_0^t dR(t, s) \right] \leqslant c\beta(t)$$

Теорема 2. Пусть $u \in U_0$ и выполняются условия 1°, 2°, 8°, 9°. Тогда в H_1 существует единственное решение уравнения (1.2).

Доказательство. Положим

$$(2.1)\qquad \theta_0\xi_n = \varphi_0, \quad n \geqslant 0, \quad \xi_0(t) = \eta(t)$$

$$\xi_{n+1}(t) = \eta(t) + \Phi(t, \theta_t\xi_{n+1}) + \int_0^t A(t, s, \theta_s\xi_n, u(s), ds)$$

$$y_n(t) = \mathrm{M}\,|\,\xi_n(t)\,|^2, \qquad z_n(t) = \sup\nolimits_{0\leqslant s\leqslant t} y_n(s)$$

Функция $z_n(t)$ равномерно ограничена. Действительно, из условия 8° следует

$$(2.2)\qquad |\,\xi_{n+1}(t)\,|\,(1 - dK_0(0)) \leqslant c + |\,\eta(t)\,| +$$
$$+ \int_{-\infty}^{-0} |\,\xi_{n+1}(t+s)\,|\,dK_0(s) + \left|\int_0^t A(t, s, \theta_s\xi_n, u(s), ds)\right|$$

При помощи условий 1°, 2°, 8°, свойств стохастических интегралов ([15], с. 138) и леммы 1 из (2.2) можно получить оценку

$$(2.3)\qquad z_{n+1}(t) \leqslant c\left[1 + \int_0^t z_n(s)\,ds\right] \leqslant ce^{cT} + \|\,\eta\,\|_1 \frac{(cT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

откуда и следует равномерная ограниченность $z_n(t)$.

Пусть теперь $z_n(t) = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} M\,|\,\xi_n(s) - \xi_{n-1}(s)\,|^2$. Используя условие 9°, аналогично (2.3) получим $z_{n+1}(t) \leqslant z_1(T)\,(cT)^n/n!$, $z_1(T) < \infty$ и $\lim z_n(t) = 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $t \in [0, T]$. Следовательно, $\xi_n(t)$ сходится в среднем квадратическом к некоторому процессу $\xi(t)$, который и является (аналогично [15], с. 238) единственным решением уравнения (1.2), причем $\|\,\xi\,\|_1 < \infty$.

Заметим, что при выполнении условий 3°, 7° управление u_ε принадлежит U_0.

Следствие 1. Пусть выполняются условия 1°, 2°, 8°, 9°, 12°. Тогда произвольное управление из U_0 является допустимым, т. е. $U_0 \subset U$.

Следствие 2. Пусть выполняются условия 1°—3°, 8°, 9°. Тогда в H_1 существует единственное решение уравнения (1.2) при управлении u_0. Если, кроме того, выполняется условие 7°, то в H_1 существует единственное решение уравнения (1.2) при управлении u_ε. Если, к тому же, выполняется условие 10°, то в H_1 существуют единственные решения уравнений (1.7), (1.8), (1.11).

Теорема 3. Пусть выполняются условия (1.5) и 1°—6°, 8°, 9°. Тогда

$$\xi_0 \in D(\alpha), \quad \alpha = \min[1, \alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8]$$

Доказательство. Существование ξ_0 вытекает из следствия 2. Неравенство

$$M\,|\,\xi_0(t_1) - \xi_0(t_2)\,|^2 \leqslant c\,|\,t_1 - t_2\,|^\alpha, \qquad \forall t_1, t_2 \in [0, T]$$

доказывается в два этапа. Пусть сначала $t_2 = 0, t_1 = t$, $z(t) = M\,|\,\xi_0(t) - \varphi_0(0)\,|^2$. Из (1.2) и (1.5) для $|\,\xi_0(t) - \varphi_0(0)\,|$ получается оценка, аналогичная (2.2). Затем при помощи условий 1°, 3°—5°, 8°, 9°, $\xi_0 \in H_1$ и соотношения

$$M\,|\,\xi_0(t+\tau) - \varphi_0(\tau)\,|^2 \leqslant 2\,[z(t+\tau) + |\,\tau\,|^{\alpha_1}]$$

выводится неравенство

$$z(t) \leqslant c\left[t^\alpha + \int_{-t}^{-0} z(t+\tau)\,dK_0(\tau)\right]$$

Отсюда (лемма 1) $z(t) \leqslant ct^{\alpha}$. Полагая теперь

$$t_2 = t < t_1 = t + \Delta, \quad z(t) = M \mid \xi_0(t+\Delta) - \xi_0(t) \mid^2$$

аналогично доказательству предыдущей оценки и с ее помощью окончательно получим $z(t) \leqslant c\Delta^{\alpha}$. Теорема доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1°—9°. Тогда равномерно по $t \in [t_0, T]$ $\lim_{\varepsilon\to 0} M \mid \gamma_\varepsilon(t) \mid^2 = 0$.

Доказательство. Представим $\gamma_\varepsilon(t)$ в виде

$$\gamma_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{5} \delta_i(t)$$

$$\delta_1(t) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [a(t, s, \theta_s\xi_\varepsilon, v) - a(t, s, \theta_s\xi_0, v)]\, ds$$

$$\delta_2(t) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [a(t, s, \theta_s\xi_0, v) - a(t, t_0, \theta_{t_0}\xi_0, v)]\, ds$$

$$\delta_3(t) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [a(t, t_0, \theta_{t_0}\xi_0, u_0(t_0)) - a(t, s, \theta_s\xi_0, u_0(s))]\, ds$$

$$\delta_4(t) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} [b(t, s, \theta_s\xi_\varepsilon) - b(t, s, \theta_s\xi_0)]\, dw(s)$$

$$\delta_5(t) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \int [c(z; t, s, \theta_s\xi_\varepsilon) - c(z; t, s, \theta_s\xi_0)]\, \nu^0(ds, dz)$$

Из условия 9° и следствия 2 аналогично [16] вытекают оценки

$$M \mid \delta_1(t) \mid^2 \leqslant c\varepsilon^4, \quad M \mid \delta_2(t) \mid^2 \leqslant c\varepsilon^2(\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\alpha_6}), \quad M \mid \delta_3(t) \mid^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon^2(\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\alpha_3} + \varepsilon^{\alpha_6}), \quad M \mid \delta_4(t) \mid^2 + M \mid \delta_5(t) \mid^2 \leqslant c\varepsilon^3$$

из которых следует утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть выполняются условия 1°—3°, 7°—11°. Тогда равномерно по $t \in [t_0, T]$ $\lim_{\varepsilon\to 0} M \mid \zeta_\varepsilon(t) \mid^2 = 0$.

Доказательство. Из (1.10) следует

$$M \mid \zeta_\varepsilon(t) \mid^2 \leqslant c \sum_{i=1}^{4} \delta_i(t)$$

$$\delta_1(t) = \int_0^1 M \mid [\nabla\Phi(t, \theta_t\lambda_\varepsilon^{\tau}) - \nabla\Phi(t, \theta_t\xi_0)]\, \theta_t q_0 \mid^2 d\tau$$

$$\delta_2(t) = \int_{t_0}^{t} \int_0^1 M \mid [\nabla a(t, s, \theta_s\lambda_\varepsilon^{\tau}, u_0(s)) - \nabla a(\cdot, \theta_s\xi_0, \cdot)]\, \theta_s q_0 \mid^2 d\tau\, ds$$

$$\delta_3(t) = \int_{t_0}^{t} \int_0^1 M \mid [\nabla b(t, s, \theta_s\lambda_\varepsilon^{\tau}) - \nabla b(\cdot, \theta_s\xi_0)]\, \theta_s q_0 \mid^2 d\tau\, ds$$

$$\delta_4(t) = \int_{t_0}^{t} \int \int_0^1 M \mid [\nabla c(z; t, s, \theta_s\lambda_\varepsilon^{\tau}) - \nabla c(\cdot, \theta_s\xi_0)]\, \theta_s q_0 \mid^2 d\tau \Pi(dz)\, ds$$

Пусть $\chi_N(s)$ — индикатор множества $\{\omega: q_0(s) > N\}$. Представляя $q_0(s)$ в виде $q_0(s) = q_0(s)\chi_N(s) + q_0(s)(1 - \chi_N(s))$ и используя условия 10°, 11°, можно показать [16], что

$$\delta_1(t) \leqslant c[\| q_0\chi_N \|_1^2 + \varepsilon^2 N^2 \| q_\varepsilon \|_1^2]$$

Для любого $\delta > 0$ найдется такое N, что $\| q_0\chi_N \|_1^2 < \delta/(2c)$. Фиксируя N, выберем ε так, чтобы $\varepsilon^2 N^2 \| q_\varepsilon \|_1^2 < \delta/(2c)$. Тогда $\delta_1(t) < \delta$. Аналогичные оценки справедливы и для $\delta_i(t)$, $i = 2, 3, 4$. Таким образом, для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $M \mid \zeta_\varepsilon(t) \mid^2 < \delta$. Лемма доказана.

Следствие 3. Пусть выполняются условия 1°—11°. Тогда равномерно по $t \in [t_0, T]$ $\lim_{\varepsilon \to 0} M \mid l_\varepsilon(t) \mid^2 = 0$.

Доказательство. Для любого $\delta > 0$ найдется (леммы 2, 3) такое $\varepsilon > 0$, что $M \mid \zeta_\varepsilon(t) \mid^2 + M \mid \gamma_\varepsilon(t) \mid^2 < \delta$. Полагая $z_\varepsilon(t) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} M \mid l_\varepsilon(s) \mid^2$, из (1.11) аналогично (2.3) получим

$$z_\varepsilon(t) \leqslant c \left[\delta + \int_{t_0}^{t} z_\varepsilon(s)\, ds\right]$$

Отсюда на основании леммы Гронуолла — Беллмана вытекает необходимое.

Лемма 4. Пусть выполняются условия 1°—10°, 13° и

$$g_\varepsilon(s) = M\left[G(s, \theta_s\xi_\varepsilon, v) - G(s, \theta_s\xi_0, u_0(s))\right]$$

$$\mu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} g_\varepsilon(s)\, ds$$

Тогда $\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon = g_0(t_0)$.

Доказательство. Пусть

$$\delta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} M \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \left[G(s, \theta_s\xi_\varepsilon, v) - G(t_0, \theta_{t_0}\xi_0, v)\right] ds + $$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} M \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \left[G(t_0, \theta_{t_0}\xi_0, u_0(t_0)) - G(s, \theta_s\xi_0, u_0(s))\right] ds$$

Тогда $\mu_\varepsilon = \mu + \delta_\varepsilon$. Используя условия 13°, 3°, 6°, 7°, следствие 2 и теорему 3, можно показать [16], что

$$\mid \delta_\varepsilon \mid \leqslant c\left[\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^\alpha} + \varepsilon^{\alpha_\bullet} + \varepsilon^{\alpha_s/2} + \varepsilon^{\alpha/2}\right]$$

т. е. $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon = 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть выполняются условия 1°—11°, 14° и

$$\beta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} M\left[F(\theta_T\xi_\varepsilon) - F(\theta_T\xi_0)\right], \qquad \beta = M\langle \nabla F(\theta_T\xi_0), \theta_T q_0\rangle$$

Тогда $\lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon = \beta$. Кроме того

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} M \int_{t_0}^{T} \left[G(s, \theta_s\xi_\varepsilon, u_0(s)) - G(s, \theta_s\xi_0, u_0(s))\right] ds =$$
$$= M \int_{t_0}^{T} \langle \nabla G(s, \theta_s\xi_0, u_0(s)), \theta_s q_0\rangle\, ds$$

Доказательство. Пусть

$$\delta_\varepsilon = M\langle \nabla F(\theta_T\xi_0),\ \theta_T l_\varepsilon\rangle + M\int_0^1 \langle \nabla F(\theta_T\lambda_\varepsilon^\tau) - \nabla F(\theta_T\xi_0), \theta_T q_\varepsilon\rangle\, d\tau$$

Тогда $\beta_\varepsilon = \beta + \delta_\varepsilon$. Используя условие 14°, следствия 2 и 3, можно показать [16], что $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon = 0$. Доказательство второго утверждения аналогично. Лемма доказана.

Теперь доказательство теоремы 1 вытекает из (1.12) и лемм 4,5.

3. Продемонстрируем возможность построения синтеза оптимального управления при помощи условия $J'(u_0) \geqslant 0$ на примере задачи управления линейным уравнением с квадратичным функционалом качества

$$\xi(t) = \eta(t) + \int_{-\infty}^{0} dK(t, s)\,\xi(t+s) + \int_{0}^{t} a(t, s)\,u(s)\,ds \tag{3.1}$$

$$J(u) = M\left[\xi^*(T)\,H\xi(T) + \int_{0}^{T} u^*(s)\,N(s)\,u(s)\,ds\right] \tag{3.2}$$

Здесь $\eta(t)$ — случайный процесс, удовлетворяющий условиям 2°, 5°, $a(t, s)$ — неслучайная, ограниченная, гельдеровская по обеим переменным матрица $n \times l$, $N(s)$ — неслучайная, гельдеровская, ограниченная и положительно-определенная равномерно по s матрица $l \times l$, H — неслучайная, неотрицательно-определенная матрица $n \times n$, $K(t, s)$ — неслучайная матрица $n \times n$, такая, что

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |dK(t, s)| \leqslant dK_0(s), \quad K_0 \in S_1 \cap S_2$$

$$|dK(t_1, s) - dK(t_2, s)| \leqslant |t_1 - t_2|^{\alpha}\, dK_0(s)$$

Пусть $dR(t, \tau)$ — резольвента ядра $dK(t, \tau - t)$. Положим

$$\psi(t, t_0, f(\cdot, s)) = f(t, s) + \int_{t_0}^{t} dR(t, \tau)\, f(\tau, s)$$

для произвольной матрицы $f(\tau, s)$. Тогда

$$q_0(t) = \psi(t, t_0, a(\cdot, t_0))\,(v - u_0(t_0)), \quad t \in [t_0, T]$$

Представим $J'(u_0)$ в виде

$$J'(u_0) = M\,[(v - u_0(t_0))^*\, N(t_0)\,(v - u_0(t_0)) +$$
$$+ 2\,(v - u_0(t_0))^*\,(N(t_0)\,u_0(t_0) +$$
$$+ \psi^*(T, t_0, a(\cdot, t_0))\, H M_{t_0}\xi_0(T))]$$

Для неотрицательности $J'(u_0)$ необходимо и достаточно, чтобы оптимальное управление задачи (3.1), (3.2) имело вид

$$u_0(t_0) = -N^{-1}(t_0)\,\psi^*(T, t_0, a(\cdot, t_0))\, H M_{t_0}\xi_0(T)$$

Вычисляя $M_{t_0}\xi_0(T)$ из (3.1), $u_0(t_0)$ можно преобразовать к виду

$$u_0(t_0) = p(t_0)\left[\zeta_0(t_0) + \int_{0}^{t_0} \psi(T, t_0, a_{t_0}(\cdot, s))\, u_0(s)\, ds\right]$$

$$p(t_0) = -N^{-1}(t_0)\,\psi^*(T, t_0, a(\cdot, t_0))\, H\Big[E +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \psi(T, s, a(\cdot, s))\, N^{-1}(s)\, \psi^*(T, s, a(\cdot, s))\, ds H\Big]^{-1}$$

$$\zeta_0(t_0) = \psi(T, t_0, b(\cdot, t_0)) + \psi(T, t_0, E)\,\xi_0(t_0) +$$
$$+ \int_{0}^{t_0} \psi(T, t_0, dK_{t_0}(\cdot, s))\,\xi_0(s), \quad b(t, s) = M_s(\eta(t) - \eta(s))$$

$$a_{t_0}(t, s) = a(t, s) - a(t_0, s), \quad dK_{t_0}(t, s) = dK(t, s - t) -$$
$$- dK(t_0, s - t_0)$$

Пусть $Q(t, s)$ — резольвента ядра $p(t)\,\psi(T, t, a_t(\cdot, s))$. Тогда для произвольного $t \in [0, T]$ оптимальное управление принимает вид

$$u_0(t) = p(t)\,\zeta_0(t) + \int_{0}^{t} Q(t, s)\, p(s)\, \zeta_0(s)\, ds$$

Подставляя сюда $\zeta_0(t)$, окончательно получим

$$(3.3)\qquad u_0(t)=\alpha(t)+p(t)\psi(T,t,E)\xi_0(t)+\int_0^t dR_0(t,\tau)\xi_0(\tau)$$

$$\alpha(t)=p(t)\psi(T,t,b(\cdot,t))+\int_0^t Q(t,s)p(s)\psi(T,s,b(\cdot,s))\,ds$$

$$dR_0(t,\tau)=p(t)\psi(T,t,dK_t(\cdot,\tau))+Q(t,\tau)p(\tau)\psi(T,\tau,E)\,d\tau+$$

$$+\int_\tau^t Q(t,s)p(s)\psi(T,s,dK_s(\cdot,\tau))\,ds$$

Очевидно, что полученное управление u_0, рассматриваемое как управление обратной связи, является допустимым. Доказательство существования и единственности решения уравнения (3.1) при этом управлении аналогично доказательству теоремы 2.

При помощи методики, разработанной в [17—19], можно показать, что управление (3.3) является ε-оптимальным для задачи управления квазилинейным интегральным уравнением, мало отличающимся от уравнения (3.1).

4. *Пример 1.* Управляемое движение летательных аппаратов описывается [10] системами линейных интегродифференциальных уравнений вида

$$(4.1)\qquad \xi^{\cdot}(t)=A_0(t)\xi(t)+\int_0^t A_1(t-s)\xi^{\cdot}(s)\,ds+$$

$$+\int_0^t A_2(t-s)\xi(s)\,ds+a(t)u(t)+\sigma(t)w^{\cdot}(t)$$

Как отмечено в [10], создание эффективных методов оптимального управления такими системами «пока остается нерешенной проблемой».

Покажем, что уравнение (4.1) сводится к уравнению вида (3.1) и, следовательно, решение задачи управления (4.1), (3.2) может быть получено как частный случай задачи (3.1), (3.2).

Действительно, интегрируя (4.1), получим

$$\xi(t)=\eta(t)+\int_0^t K(t,s)\xi(s)\,ds+\int_0^t a(s)u(s)\,ds$$

$$\eta(t)=(E-B_1(t))\xi(0)+\int_0^t\sigma(s)\,dw(s),\qquad K(t,s)=A_0(s)+$$

$$+A_1(t-s)+B_2(t-s),\qquad B_i(t)=\int_0^t A_i(s)\,ds,\quad i=1,2$$

Пусть $R(t,s)$ — резольвента ядра $K(t,s)$ и

$$B_0(t)=E+\int_t^T R(T,s)\,ds,\qquad p(t)=-N^{-1}(t)a^*(t)B_0^*(t)H\Big[E+$$

$$+\int_t^T B_0(s)a(s)N^{-1}(s)a^*(s)B_0^*(s)\,dsH\Big]^{-1}$$

$$R_0(t,s)=K(T,s)+\int_t^T R(T,\tau)K(\tau,s)\,d\tau-B_0(t)K(t,s)$$

Тогда оптимальное управление задачи (4.1), (3.2) имеет вид

$$u_0(t)=p(t)\Big[B_0(t)\xi_0(t)+\int_0^t R_0(t,s)\xi_0(s)\,ds-\int_t^T B_0(s)A_1(s)\,ds\xi_0(0)\Big]$$

Пример 2. Рассмотрим задачу оптимального управления стохастическим дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\xi^{\cdot}(t) = b\xi^{\cdot}(t-h) + au(t) + w^{\cdot}(t),\ t \in [0, T];\ a \neq 0,\ h \in (0, T)$$

$$J(u) = M\left[\xi^2(T) + \int_0^T u^2(s)\,ds\right]$$

в которой $\xi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $w(t)$ — винеровский процесс.

Здесь

$$dK(t, \tau) = b\delta(h+\tau)\,d\tau, \qquad dR(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} b^i\delta(ih+\tau-t)\,d\tau$$

Пусть $(T-t)/h$ — не целое число, $n(t) = [(T-t)/h] + 1$, $m(t, b) = n(t)$ при $b = 1$, $m(t, b) = (1-b^{n(t)})/(1-b)$ при $b \neq 1$. Тогда оптимальное управление имеет вид

$$u_0(t) = -m(t, b)\left[m(t, b)(\xi_0(t) - b\xi_0(t-h)) + b^{n(t)}\xi_0(T-n(t)h)\right] \times$$
$$\times \left[\frac{1}{a} + a\int_t^T m^2(s, b)\,ds\right]^{-1}$$

почти при всех $t \in [0, T]$ (кроме $t_i = T - ih$, $i = 1, \ldots, [T/h]$).

Отметим, что рассматриваемое здесь необходимое условие оптимальности управления для стохастических интегрально-функциональных уравнений нейтрального типа приведено также в [19]. Ранее оно было получено для стохастических дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными) [20—23] и для стохастических уравнений Вольтерры [24].

Автор благодарит В. Б. Колмановского за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы. Киев: Наук. думка, 1977. 251 с.
6. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977. 400 с.
7. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
8. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978. 351 с.
9. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
10. *Астапов И. С., Белоцерковский С. М., Качанов Б. О., Кочетков Ю. А.* О системах интегродифференциальных уравнений, описывающих неустановившееся движение тел в сплошной среде.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 9, с. 1628—1637.
11. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеоретиздат, 1952. 324 с.
12. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
13. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
14. *Вайнберг М. М.* Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979. 128 с.
15. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 611 с.
16. *Warfield V. M.* A stochastic maximum principle.— SIAM J. Control and Optimiz., 1976, v. 14, No. 5, p. 803—826.
17. *Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.* Об одном методе построения приближенного синтеза оптимального управления.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 8, с. 737—741.
18. *Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.* О приближенном синтезе оптимального управления стохастическими квазилинейными системами с последействием.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 6, с. 978—988.
19. *Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.* О приближенном синтезе квадратичных задач управления.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1980, № 4, с. 15—18.

20. *Shaikhet L. E.* Optimal control of stochastic integral — functional equations.— Stochastic Optimization. (Intern. Conf. Kiev, USSR, 9—16 Sept. 1984). Abstracts of Papers, Kiev: V. M. Glushkov Institute of Cybernetics Ac. Sci. Ukr. SSR, 1984, p. 212—213.
21. *Шайхет Л. Е.* Необходимые условия оптимальности управления для некоторых стохастических систем.— В кн.: Респ. конф. по теории стохастических дифференц. уравнений: Тезисы докл. Донецк, 1982, с. 104—105.
22. *Шайхет Л. Е.* Об одном необходимом условии оптимальности управления для стохастических дифференциальных уравнений гиперболического типа.— Теория случайных процессов: Сб. статей; Киев: Наук. думка, 1984, с. 96—101.
23. *Шайхет Л. Е.* Об одном необходимом условии оптимальности управления для стохастических систем.— Теория вероятностей и математическая статистика: Сб. статей. Киев: Вища школа, 1985, с. 104—112.
24. *Shaikhet L. E.* On optimal control of Volterra's equations.— Probl. of Control and Inform. Theory, 1984, v. 13, No. 3, p. 141—152.

Донецк

Поступила в редакцию
19.XI.1984