Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТЕРЖНЕ

Рубановский В. Н.

Рассматривается задача о движении динамически симметричного твердого тела, которое подвешено к неподвижной точке при помощи невесомого стержня и двух шаровых шарниров, один из которых установлен в неподвижной точке O', а другой находится на оси симметрии тела в точке O. Исследуется вопрос об устойчивости равномерного вращения тела, когда точки O', O и центр масс C тела лежат на одной вертикали, при этом точка O может находиться как ниже, так и выше точки O', а точка C — выше или ниже точки O. Дан анализ необходимых и достаточных условий устойчивости. Множество всех параметров системы сведено к трем независимым безразмерным параметрам L, Ω, β, и на плоскости (L, Ω) при фиксированных значениях β указаны области, для которых невозмущенное вращение устойчиво, устойчиво в первом приближении и неустойчиво. Обнаружены области, для которых устойчиво в первом приближении вращение тела, когда точка O расположена выше точки O', а точка C — выше или ниже точки O.

Достаточные условия устойчивости вертикального вращения динамически симметричного тела, подвешенного на нити, получены в [1] и исследованы для случаев, когда в невозмущенном движении точка C расположена ниже точки O, когда точки C и O совпадают и когда длина нити равна нулю (волчок Лагранжа). В [2] дан анализ полученных в [1] достаточных, а также указанных в [2] необходимых условий устойчивости для случаев, когда в невозмущенном движении точка C расположена выше точки O.

1. Рассмотрим в однородном поле сил тяжести движение динамически симметричного твердого тела, которое подвешено при помощи тонкого прямолинейного невесомого стержня и двух шаровых шарниров, один из которых находится в неподвижной точке O', а другой расположен на оси симметрии тела в точке O.

Возьмем систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой неизменно связаны с телом и направлены по его главным осям инерции для точки O. Введем следующие обозначения: m, $\mathbf{J}_C$ — масса и тензор инерции тела для его центра масс C с диагональными элементами $J_1 = J_2$, J_3; $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{K}_C = J_C\cdot\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость и кинетический момент тела, вычисляемый для точки C; $\mathbf{a}$ — радиус-вектор точки C относительно точки O; $\mathbf{v}$ — скорость точки O; $\boldsymbol{\gamma}$ — орт восходящей вертикали; l — длина стержня; $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль стержня в точку O'; g — ускорение силы тяжести; N — реакция стержня. Все векторы будем задавать их проекциями ω_i, $K_{Ci} = J_i\omega_i$, v_i, γ_i, e_i, a_i на оси x_i $(i = 1, 2, 3)$, при этом $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a$.

Уравнения движения, отнесенные к системе координат $Ox_1x_2x_3$, можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
& m\,[d/dt\,(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a})] = -mg\boldsymbol{\gamma} + N\mathbf{e} \\
& d\mathbf{K}_C/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_C = N\mathbf{e} \times \mathbf{a} \qquad (1.1) \\
& d\boldsymbol{\gamma}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad l\,(d\mathbf{e}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) = -\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Механический смысл уравнений (1.1) очевиден. Они допускают следующие первые интегралы:

$$V_1 = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}_C\cdot\boldsymbol{\omega} + m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a})^2 - 2mg(l\mathbf{e} - \mathbf{a})\cdot\boldsymbol{\gamma} = \text{const}$$

$$V_2 = [\mathbf{J}_C\cdot\boldsymbol{\omega} + m(\mathbf{a} - l\mathbf{e})\times(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a})]\cdot\boldsymbol{\gamma} = \text{const}$$

$$V_3 = \omega_3 = \text{const},\quad V_4 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1,\quad V_5 = \mathbf{e}^2 = 1,\quad V_6 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e} = 0$$

и имеют частные решения

$$v_i = \omega_i = \gamma_i = e_i\ (i = 1, 2),\quad v_3 = 0,\quad \omega_3 = \omega > 0,\ \gamma_3 = 1,\quad e_3 = \pm 1\ (N = \pm mg) \tag{1.2}$$

описывающие равномерные вращения тела, для которых точки O', O и C лежат на одной вертикали, при этом для первого решения ($e_3 = 1$, $N = mg$) точка O расположена ниже, а для второго ($e_3 = -1$, $N = -mg$) — выше точки O'. Решения (1.2) можно рассматривать как одно решение с $e_3 = 1$, если для второго решения считать $l < 0$.

2. В возмущенном движении сохраним за переменными прежние обозначения. Тогда уравнения (1.1), линеаризованные в окрестности решения (1.2), принимают вид

$$\begin{gathered} le_*^{\cdot\cdot} + 2i\omega le_*^{\cdot} + (g - \omega^2 l)e_* - i(l - a)\omega_*^{\cdot} - \omega(l - a)\omega_* - g\gamma_* = 0 \\ J_1\omega_*^{\cdot} + i\omega(J_1 - J_3)\omega_* + imgae_* = 0,\quad \gamma_*^{\cdot} + i\omega\gamma_* - i\omega_* = 0 \\ e_* = e_1 + ie_2,\quad \omega_* = \omega_1 + i\omega_2,\quad \gamma_* = \gamma_1 + i\gamma_2 \end{gathered} \tag{2.1}$$

при этом в первом приближении $e_3 = 1$, $\gamma_3 = 0$, $v_3 = 1$, $N = mg\,\text{sign}\,l$. Отыскивая решения уравнений (2.1) в виде

$$(\omega_*, \gamma_*, e_*) = (\omega_*^\circ, \gamma_*^\circ, e_*^\circ)\exp[i(\lambda - \omega)t]$$

для определения постоянной λ получаем характеристическое уравнение

$$\begin{gathered} g\Delta_0(\lambda) - \lambda^2 l\Delta_1(\lambda) = 0,\quad \Delta_0 = -J_1^*\lambda^2 + J_3\omega\lambda - mga \\ \Delta_1 = -J_1\lambda^2 + J_3\omega\lambda - mga,\quad J_1^* = J_1 + ma^2 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Итак, для устойчивости движения (1.2) по отношению к переменным ω_i, γ_i, e_i ($i = 1, 2, 3$) необходимо, чтобы все четыре корня уравнения (2.2) были вещественными.

3. Достаточные условия устойчивости решения (1.2) получим из теоремы Рауса как условия положительной определенности связки интегралов (λ — параметр)

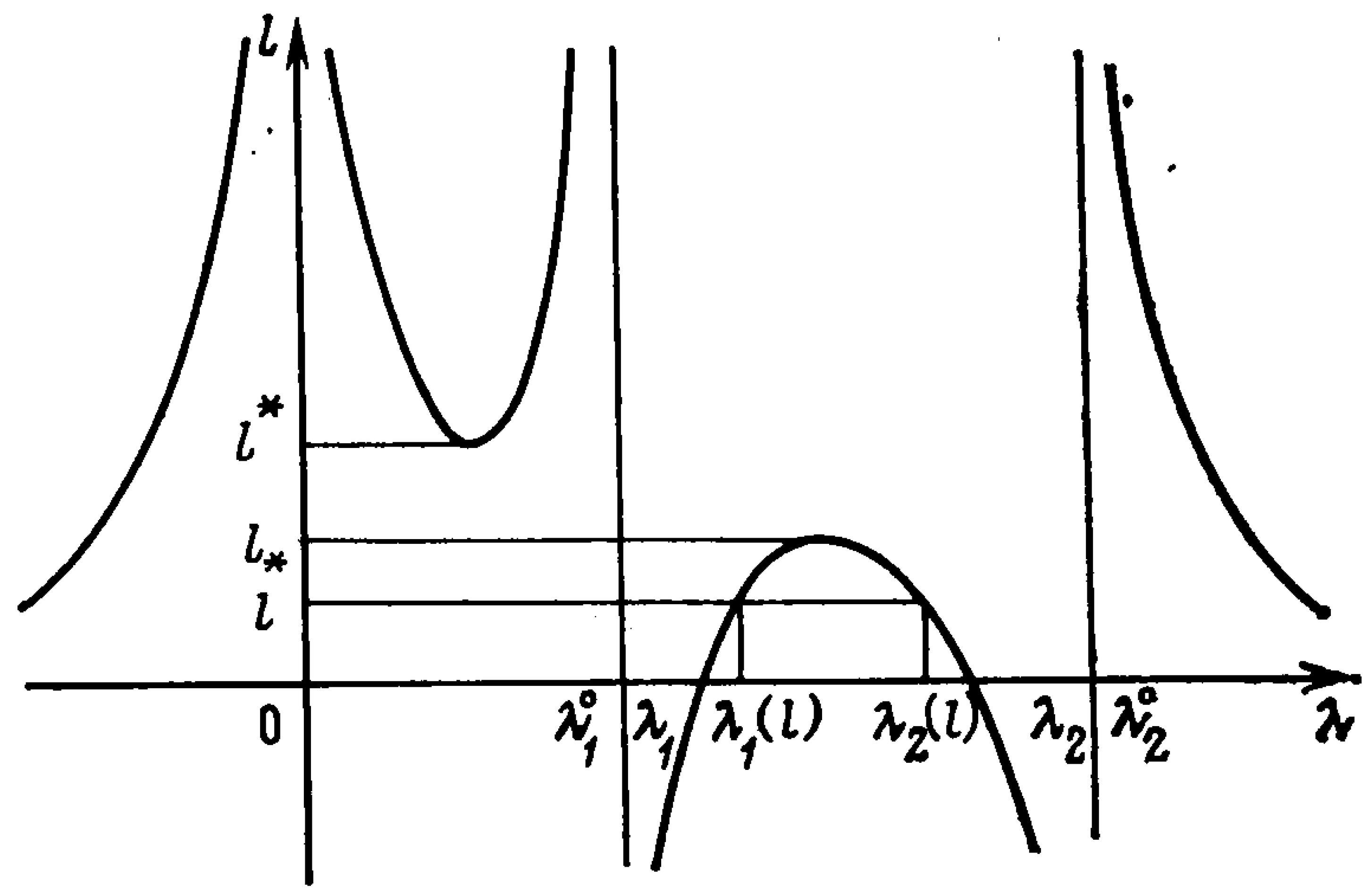
$$V = V_1 - 2\lambda V_2 - 2J_3(\omega - \lambda)V_3 + [J_3\omega\lambda + mg(l - a)]V_4 + mgl\,V_5$$

на линейном многообразии, определяемом уравнениями $\delta V_i = 0$ ($i = 2, \ldots, 6$), т. е. при $\delta\omega_3 = \delta\gamma_3 = \delta e_3 = v_3 = 0$. Вводя вместо ω_j, e_j новые переменные Ω_j, α_j ($j = 1, 2$): $\omega_j = \Omega_j + \lambda\gamma_j$, $e_j = \gamma_j + \alpha_j$, представим V в виде

$$\begin{aligned} V = {} & J_1^*(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \Delta_0(\lambda)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + mgl(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \\ & + m(v_1^2 + v_2^2) - 2mal\lambda[(\Omega_1 + \lambda\gamma_1)\alpha_1 + (\Omega_2 + \lambda\gamma_2)\alpha_2] + \\ & + 2ml\lambda(\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_1) - 2a(\Omega_1 v_2 + \Omega_2 v_1) + \ldots \end{aligned}$$

где не выписаны члены выше второго порядка малости. Условия положительной определенности функции V приводятся к неравенствам

$$\Delta_0(\lambda) > 0,\quad l[g\Delta_0(\lambda) - \lambda^2 l\Delta_1(\lambda)] > 0 \tag{3.1}$$



Фиг. 1

При выполнении условий (3.1) функция V — знакоопределенный по отношению к ω_i, γ_i, e_i, v_i ($i = 1, 2, 3$) первый интеграл уравнений возмущенного движения. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости отсюда заключаем, что неравенства (3.1) являются достаточными условиями устойчивости решения (1.2) по отношению к переменным ω_i, γ_i, e_i, v_i ($i = 1, 2, 3$).

Итак, достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (1.2) состоят в том, чтобы для некоторого вещественного значения параметра λ выполнялись одновременно оба неравенства (3.1).

При анализе корней уравнения (2.2) и неравенств (3.1) условимся считать, что $a > 0$ ($a < 0$), если для решения (1.2) точка C находится выше (ниже) точки O.

Условия (3.1) получены в [1] и исследованы для случаев, когда: 1) $l = 0$; 2) $l > 0$, $a < 0$; 3) $l > 0$, $a = 0$.

4. Условия (3.1) не могут выполняться для $l < 0$, потому что тогда выполнялось бы неравенство $l\,[g\Delta_0(\lambda) - \lambda^2 l \Delta_1(\lambda)] < 0$, если $\Delta_0(\lambda) > 0$. Поэтому далее будем считать, что $l > 0$.

Для анализа условий (3.1) введем в рассмотрение функцию

$$l(\lambda) = g\Delta_0(\lambda)/(\lambda^2\Delta_1(\lambda)) \tag{4.1}$$

На фиг. 1 указан график функции (4.1) для случая, когда

$$J_3^2\omega^2 - 4J_1^* mga > 0 \tag{4.2}$$

Через λ_1, λ_2 и λ_1°, λ_2° обозначены корни уравнений $\Delta_0(\lambda) = 0$ и $\Delta_1(\lambda) = 0$ соответственно, а через l_* и l^* ($l_* < l^*$) — экстремальные значения функции (4.1).

Для выполнения первого из условий (3.1) необходимо, чтобы выполнялось неравенство (4.2), и тогда $\Delta_0(\lambda) > 0$, если $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Второе из условий (3.1) эквивалентно условию $l > l(\lambda)$, если $\lambda < \lambda_1^\circ$ ($\lambda \neq 0$) или $\lambda > \lambda_2^\circ$, и условию $0 < l < l(\lambda)$, если $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Поэтому условия (3.1) эквивалентны условиям

$$\Delta_0(\lambda) > 0,\ l > l(\lambda),\ \text{если } \lambda < \lambda_1^\circ\ (\lambda \neq 0) \text{ или } \lambda > \lambda_2^\circ \tag{4.3}$$

$$\Delta_0(\lambda) > 0,\ 0 < l < l(\lambda),\ \text{если } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \tag{4.4}$$

Условия (4.3) не могут выполняться ни для одного из значений λ: $\lambda < \lambda_1^\circ$ ($\lambda \neq 0$), $\lambda > \lambda_2^\circ$, потому что $\Delta_0(\lambda) < 0$ для всех $\lambda < \lambda_1^\circ$, $\lambda > \lambda_2^\circ$.

Для анализа условий (4.4) возьмем произвольное значение l, $0 < l < l_*$ и обозначим через $\lambda_1(l)$, $\lambda_2(l)$ корни уравнения $l(\lambda) = l$, удовлетворяющие неравенствам $\lambda_1 < \lambda_1(l) < \lambda_2(l) < \lambda_2$ (фиг. 1). Тогда условия

(4.4) будут выполняться для всех значений λ, удовлетворяющих условиям $\lambda_1(l) < \lambda < \lambda_2(l)$. Далее, из фиг. 1 видим, что уравнение $l(\lambda) = l$ имеет четыре вещественных корня, если $l > l^*$ или $0 < l < l_*$, и два вещественных и пару комплексных корней, если $l_* < l < l^*$. При $l = l_*$ и $l = l^*$ это уравнение имеет два равных вещественных корня и пару комплексных. Так как для $l \neq 0$ уравнение $l(\lambda) = l$ совпадает с уравнением (2.2), то отсюда следует, что необходимые условия устойчивости выполняются для $l > l^*$ и $0 < l < l_*$. Сопоставляя этот результат с приведенным выше анализом условий (4.3) и (4.4), окончательно заключаем, что: 1) для $l > l^*$ необходимые условия устойчивости выполняются, а достаточные условия (4.3) не выполняются; 2) для $0 < l < l_*$ одновременно выполняются и необходимые, и достаточные условия устойчивости.

В [1] утверждается для $l > 0$, $a > 0$, что условия (3.1) приводятся к требованию вещественности всех четырех корней уравнения $l(\lambda) = l$ относительно λ, а в [2] дополнительно отмечается, что для (1.2) необходимые условия устойчивости совпадают с достаточными и приводятся к требованию вещественности всех корней уравнения (2.2). Как показывает приведенный выше анализ, эти утверждения справедливы лишь для $0 < l < l_*$, но теряют силу для $l > l^*$.

5. Сделаем в (2.2) подстановку $\lambda = J_3 J_1^{-1} \omega x$ и представим это уравнение в виде

$$(5.1) \qquad L\Omega^2 (x^4 - x^3) + (L - \beta)\,\Omega x^2 + \Omega x - 1 = 0$$

$$L = \frac{mal}{J_1}, \quad \Omega = \frac{J_3^2\omega^2}{J_1 mga}, \quad \beta = \frac{J_1^*}{J_1} = 1 + \varepsilon \geqslant 1$$

Для того чтобы все четыре корня уравнения (5.1) были вещественными и различными, необходимо и достаточно выполнение для $L > 0$ условий ([3], с. 60)

$$(5.2) \qquad \Delta_3^1 = L^2\Omega^5\Delta_3 > 0, \quad \Delta_5^1 = L^2\Omega^7\Delta_5 > 0, \quad \Delta_7^1 = L^2\Omega^8\Delta_7 > 0$$

$$\Delta_3(L, \Omega, \beta) = 3\Omega L - 8(L - \beta)$$

$$\Delta_5(L, \Omega, \beta) = 3\Omega^2 L^2 + [(L - \beta)^2 - 8(L - \beta) + 6(\beta - 3)]\,\Omega L - 4(L - \beta)[(L - \beta)^2 + 4L]$$

$$\Delta_7(L, \Omega, \varepsilon) = 4(\Omega - 4)[\Omega L - (L + 1)^2]^2 - 4\varepsilon(L - 1)[5L\Omega^2 + (3L^2 - 10L + 3)\Omega + 16(L + 1)^2] + \varepsilon^2[L\Omega^2 + 4(3L^2 - 26L + 3)\Omega - 32(3L^2 - 2L + 3)] - 4\varepsilon^3(L - 1)(\Omega - 16) - 16\varepsilon^4$$

Если $L < 0$, то знаки всех неравенств (5.2) следует изменить на противоположные.

Если $\Delta_7^1 = 0$, то уравнение (5.1) имеет кратные корни. Для $L > 0$ уравнение (5.1) имеет два вещественных и пару комплексных корней, если $\Delta_7^1 < 0$, и не имеет вещественных корней, если $\Delta_7^1 > 0$ и не выполняется хотя бы одно из первых двух неравенств (5.2). Для $L < 0$ уравнение (5.1) имеет два вещественных и пару комплексных корней, если $\Delta_7^1 > 0$, и не имеет вещественных корней, если $\Delta_7^1 < 0$ и, кроме того, выполняется хотя бы одно из неравенств $\Delta_3^1 > 0$, $\Delta^1_5 > 0$.

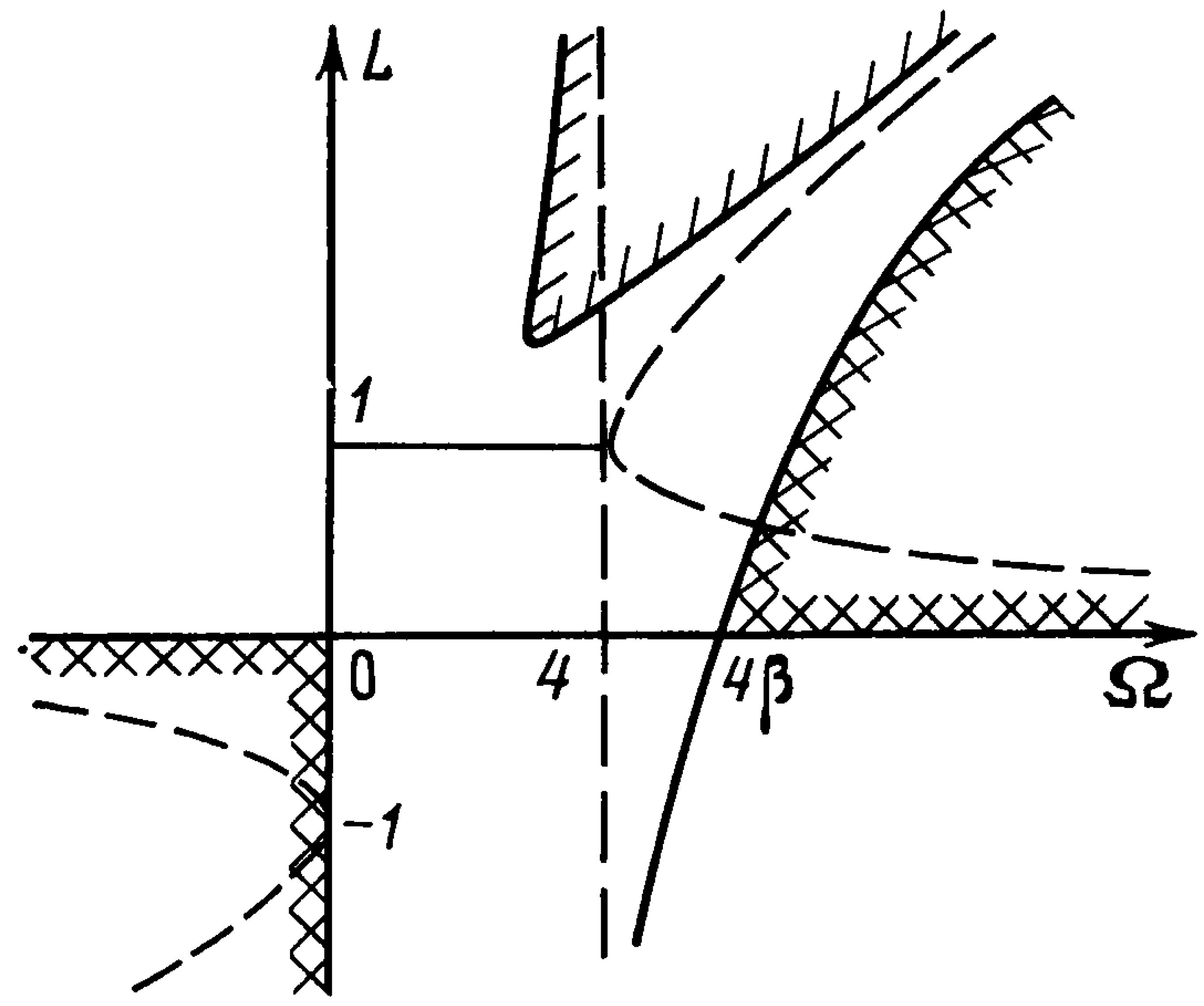
Анализ условий (5.2) приводится к построению на (L, Ω)-плоскости при фиксированных значениях параметра $\beta = 1 + \varepsilon \geqslant 1$ кривых, определяемых уравнениями $\Delta_3 = 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_7 = 0$. Построение кривых, определяемых первыми двумя из этих уравнений, не вызывает затруднений.

Более сложным является построение кривых, определяемых уравнением $\Delta_7 = 0$. При $\varepsilon = 0$ оно принимает вид

$$\Delta_7 (L, \Omega, 0) = 4 (\Omega - 4)[\Omega L - (L + 1)^2]^2 = 0$$

и распадается на два уравнения $\Omega = 4$, $\Omega = (L + 1)^2 L^{-1}$, определяющих кривые, изображенные на фиг. 2 (штриховые линии).

Введем новые переменные $w = \Omega - 4$, $Z = L - 1$ и представим уравнение $\Delta_7 = 0$ в виде



Фиг. 2

$$\Delta_7 = a_0 w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3 = 0 \tag{5.3}$$

$$a_0 = 4 (z + 1)^2,$$

$$a_1 = -(8z^2 + 20z\varepsilon - \varepsilon^2)(z + 1)$$

$$a_2 = 4[z (z - \varepsilon)^3 - 18\varepsilon \times (2z + \varepsilon)(z + 1)],$$

$$a_3 = 16\varepsilon [(z - \varepsilon)^3 - 27\varepsilon (z + 1)]$$

Обозначим через $D (z, \varepsilon)$ дискриминант уравнения (5.3)

$$D (z, \varepsilon) = - 4p^3 - 27q^2 = \frac{\varepsilon Q (z, \varepsilon)}{16 (z + 1)^6} \tag{5.4}$$

$$3a_0^2 p = 3a_0 a_2 - a_1^2, \quad 27a_0^3 q = 27a_0^2 a_3 - 9a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$$

где $Q (z, \varepsilon)$ — полином по каждой из переменных z, ε, имеющий по z степень, равную 11, а по ε, равную 9, при этом

$$Q (z, 0) = 512z^9 (z + 2)^2, \quad Q (-1, \varepsilon) = (\varepsilon + 1)^6 (\varepsilon - 8)^3$$

$$Q (\varepsilon, \varepsilon) = -2^6 3^9 \varepsilon^3 (\varepsilon + 1)^3 (\varepsilon + 2)^2$$

Отсюда следует, что для каждого ε функция Q, а следовательно, в силу (5.4) и D имеет по крайней мере один вещественный корень $z_1 = z_1(\varepsilon)$, если $0 < \varepsilon < 8$, и по крайней мере три вещественных корня $z_3 (\varepsilon) < 0 < z_2 (\varepsilon) < z_1 (\varepsilon)$, если $\varepsilon > 8$, при этом для $0 < \varepsilon < 8$ имеем $D > 0$, если $z > z_1$, и $D < 0$, если $z < z_1$, а для $\varepsilon > 8$ имеем $D > 0$, если $z > z_1$ или $z_3 < z < z_2$, и $D < 0$, если $z_2 < z < z_1$ или $z < z_3$. Поэтому уравнение (5.3) для $0 < \varepsilon < 8$ имеет три вещественных корня, если $z > z_1$, и один вещественный корень, если $z < z_1$. Для $\varepsilon > 8$ уравнение (5.3) имеет три вещественных корня, если $z > z_1$, или $z_3 < z < z_2$, и один вещественный корень, если $z_2 < z < z_1$ или $z < z_3$.

Обозначим через $L = L (\Omega, \beta)$ вещественную алгебраическую функцию, определяемую уравнением $\Delta_7 = 0$. Для ветвей этой функции имеют место следующие разложения:

для малых значений $| \Omega - 4 |$

$$L = a_{-1}^{(i)} (\Omega - 4)^{-1} + a_0^{(i)} + a_1^{(i)} (\Omega - 4) + a_2^{(i)} (\Omega - 4)^2 + \ldots$$

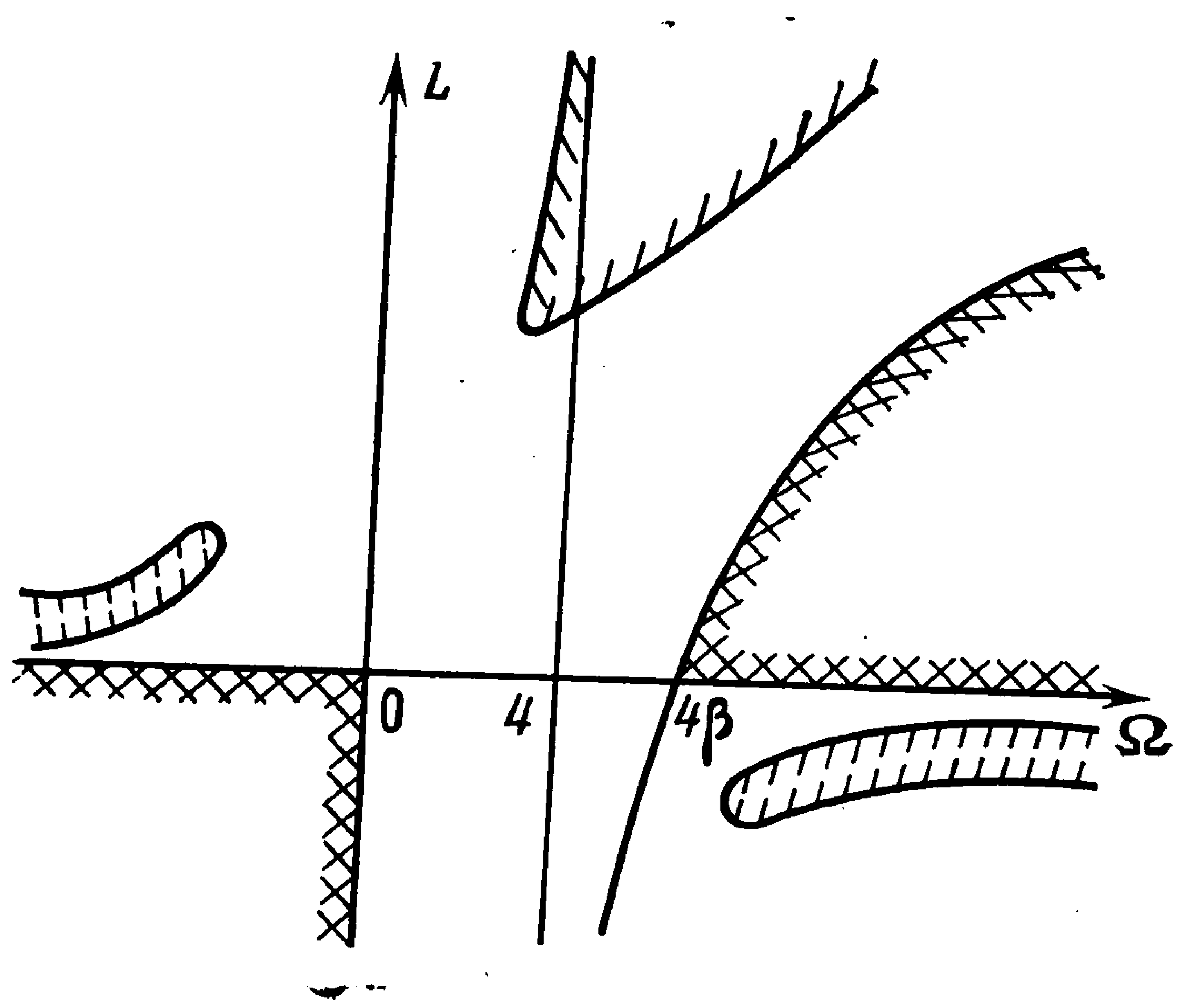
$$(i = 1, 2)$$

$$a_{-1}^{(1)} = - 4 (\beta - 1), \quad a_{-1}^{(2)} = 0, \quad a_0^{(1)} = 3\beta + 1,$$

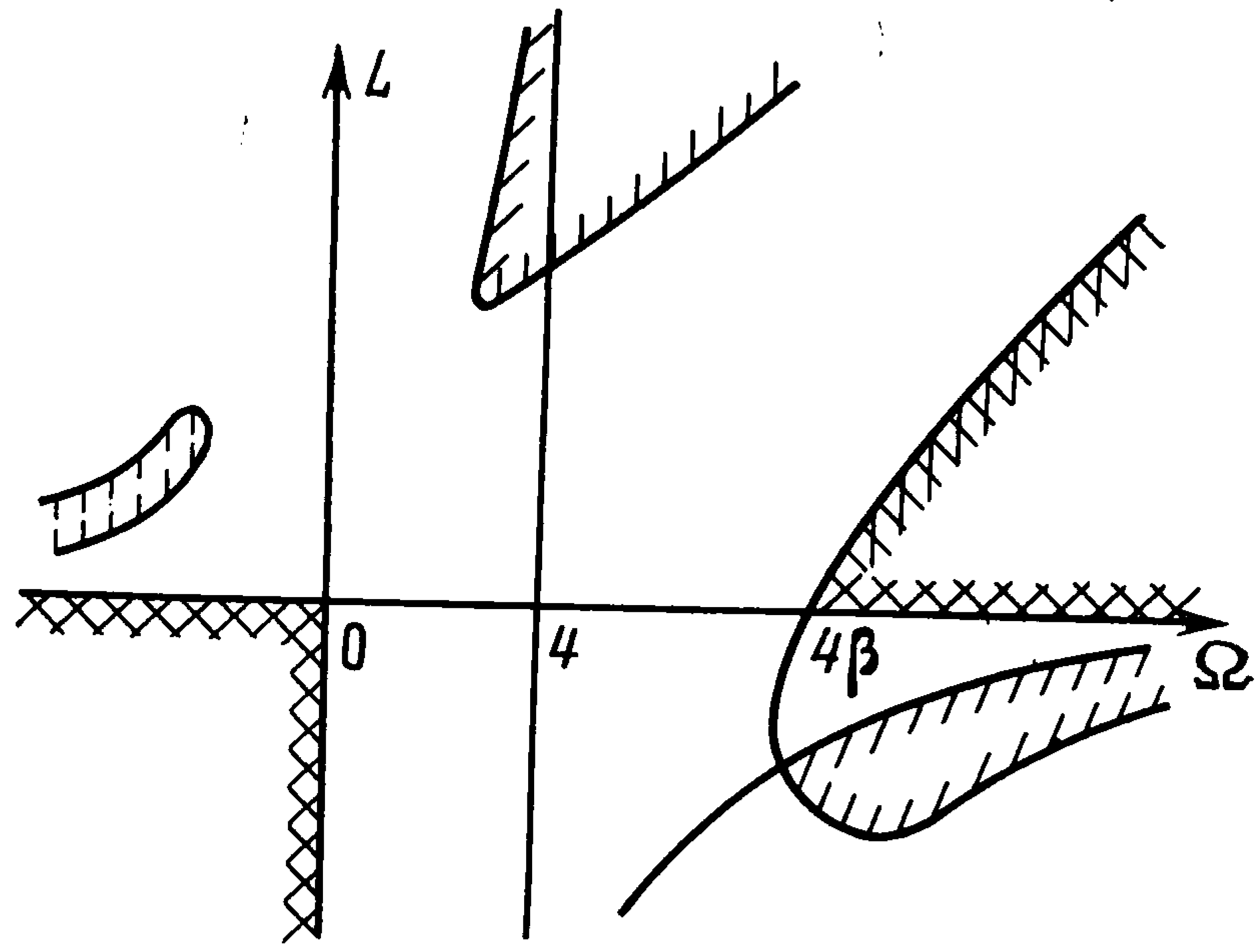
$$a_0^{(2)} = \beta + 3 [(\beta - 1)^{1/3} + (\beta - 1)^{2/3}]$$

$$a_1^{(1)} = 2, \quad a_1^{(2)} = \frac{1}{4} a_0^{(2)} (\beta - 1)^{1/3} [1 + (\beta - 1)^{1/3} + (\beta - 1)^{2/3}] \times [1 + (\beta - 1)^{2/3} + (\beta - 1)^{4/3}]$$

$$a_2^{(1)} = - \frac{1}{16} [48\beta (\beta - 1)^2 + 12 (\beta - 1) (\beta^2 - 9\beta + 9) + \beta^3] (\beta - 1)^{-2}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

для малых значений $|\Omega - 4\beta|$

$$L = a_1^{(3)}(\Omega - 4\beta) + a_2^{(3)}(\Omega - 4\beta)^2 + a_3^{(3)}(\Omega - 4\beta)^3 + \ldots$$

$$a_1^{(3)} = \frac{\beta}{4(\beta - 1)}, \quad a_2^{(3)} = \frac{\beta - 2}{16(\beta - 1)^2}, \quad a_3^{(3)} = \frac{8\beta^3 - 9\beta^2 + 3\beta - 1}{64\beta(\beta - 1)^3}$$

для больших значений $\Omega > 0$

$$L = a_2^{(i)}\Omega + a_1^{(i)}\Omega^{1/2} + a_0^{(i)} + a_{-1}^{(i)}\Omega^{-1/2} + a_{-2}^{(i)}\Omega^{-1} + a_{-3}^{(i)}\Omega^{-3/2} + \ldots$$

$$(i = 4, 5)$$

$$a_2^{(4)} = a_2^{(5)} = 1, \quad a_1^{(4)} = -a_1^{(5)} = -2\sqrt{2(\beta - 1)}$$

$$a_0^{(4)} = a_0^{(5)} = -\frac{1}{2}(7 - 3\beta)$$

для больших значений $|\Omega|$ и $\beta > 9$

$$L = a_{-1}^{(i)}\Omega^{-1} + a_{-2}^{(i)}\Omega^{-2} + a_{-3}^{(i)}\Omega^{-3} + \ldots \quad (i = 6, 7)$$

$$a_{-1}^{(6,7)} = \frac{1}{8}[27 - 18\beta - \beta^2 \pm (\beta - 1)^{1/2}(\beta - 9)^{3/2}] < 0$$

$$a_{-2}^{(6,7)} = \frac{1}{8}[-(\beta^3 + \beta^2 + 63\beta - 81) \pm$$

$$\pm (\beta^4 - 12\beta^3 + 972\beta + 2187)(\beta - 1)^{1/2}(\beta - 9)^{-3/2}]$$

(остальные коэффициенты не приводятся в силу громоздкости их выражений).

Результаты проведенного анализа достаточных и необходимых условий устойчивости движения (1.2) представлены на фиг. 3,4. Первый (третий) квадрант (L, Ω) -плоскости отвечает движению (1.2), для которого точка O расположена ниже точки O', а точка C — выше (ниже) точки O, а второй (четвертый) квадрант — движению, для которого точка O расположена выше точки O', а точка C — ниже (выше) точки O. Области с перекрестной штриховкой отвечают движениям, для которых одновременно выполняются достаточные и необходимые условия устойчивости; области с наклонной штриховкой отвечают движениям, для которых выполняются только необходимые условия устойчивости. Фиг. 2 соответствует значениям $1 < \beta < 9$, фиг. 3 — значениям $9 < \beta < \beta_*$, при этом линия, ограничивающая область устойчивости, лежащую в четвертом квадранте, при $\beta \to \beta_*$ перемещается в направлении, противоположном оси Ω, и при $\beta = \beta_*$ касается ветви кривой $L = L(\Omega, \beta_*)$, лежащей в первом и четвертом квадрантах. Фиг. 4 соответствует значениям $\beta > \beta_*$. Части (L, Ω)-плоскости, не отмеченные штриховкой, отвечают значениям параметров, для которых движение (1.2) неустойчиво и уравнение (2.2) имеет по крайней мере пару комплексных корней.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозова Е. П.* Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 5, с. 621—626.
2. *Темченко М. Е.* Об исследовании критериев устойчивости движения подвешенного на струне твердого тела и волчка при наличии у них эллипсоидальной полости, наполненной жидкостью.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1, с. 26—31.
3. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 299 с.

Москва

Поступила в редакцию 26.VIII.1983