Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 531.36

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Кузьмина Л. К.

Рассматривается один класс сингулярно-возмущенных систем, имеющих многообразие стационарных положений размерности m. При исчезновении малого параметра система также имеет m-мерное многообразие стационарных положений и, следовательно, соответствующее характеристическое уравнение имеет m нулевых корней. Определяются условия, при которых решение задачи об устойчивости сводится к решению задачи об устойчивости для вырожденной системы. В качестве приложения рассматриваются системы гироскопической стабилизации (им отвечает критический случай) с упругими элементами большой жесткости. Получены условия, при которых решение задачи об устойчивости установившегося движения для рассматриваемой системы следует из решения этой задачи для идеальной системы (с абсолютно жесткими элементами). Рассматривается задача о близости соответствующих решений полной и упрощенной систем дифференциальных уравнений на бесконечном интервале времени.

1. Пусть возмущенное движение системы описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}=\mathbf{Z}(t,\mu,\mathbf{z},\mathbf{x}),\quad \frac{d\mathbf{x}_1}{dt}=P_1(\mu)\mathbf{x}+\mathbf{X}_1(t,\mu,\mathbf{z},\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

$$\mu^2\frac{d\mathbf{x}_2}{dt}=P_2(\mu)\mathbf{x}+\mathbf{X}_2(t,\mu,\mathbf{z},\mathbf{x}),\quad \frac{d\mathbf{x}_3}{dt}=P_3(\mu)\mathbf{x}+\mathbf{X}_3(t,\mu,\mathbf{z},\mathbf{x})$$

$$(\mathbf{x}=\|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3\|^T,\ P_i(\mu)=\|P_{i1}(\mu),P_{i2}(\mu),\ P_{i3}(\mu)\|)$$

Здесь $\mathbf{z}$ — m-мерный вектор, соответствующий критическим (по Ляпунову) переменным, $\mathbf{x}_i$ ($i=1,2,3$) — n_i-мерные векторы, соответствующие некритическим переменным; индекс «T» означает транспонирование; μ — малый положительный параметр, $P_i(\mu)$ — матрицы соответствующих размеров, элементы которых — непрерывные функции μ, $P_{ij}(\mu)$ — субматрицы размером $n_i\times n_j$ ($i,j=1,2,3$), $\mathbf{Z}$, $\mathbf{X}_i$ — векторные функции, голоморфные (в соответствующей области) по совокупности переменных $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}$, не содержащие в своих разложениях членов ниже второго измерения, коэффициенты в которых — непрерывные, ограниченные функции t, μ.

Пусть $\mathbf{Z}$, $\mathbf{X}_i$ ($i=1,2,3$) обращаются в нуль при $\mathbf{x}=0$; $P_{21}(\mu)=\mu P_{21}'(\mu)$, $P_{22}(\mu)=\mu P_{22}'(\mu)$.

Для системы (1.1) характеристическое уравнение имеет m нулевых корней. Обозначим уравнение, определяющее остальные корни,

$$d(\lambda,\ \mu)=0 \tag{1.2}$$

не расписывая его.

Положив $\mu = 0$, получим из (1.1) вырожденную систему

$$(1.3) \qquad dz/dt = Z, \quad dx_1/dt = P_1 x + X_1$$
$$0 = P_{23} x_3 + X_2, \quad dx_3/dt = P_3 x + X_3$$
$$(z = z(t, 0, Z, X), \; X_i = X_i(t, 0, z, x) \; (i = 1, 2, 3)$$
$$P_1 = P_1(0), \; P_{23} = P_{23}(0), \quad P_3 = P_3(0))$$

Предполагая приложение результатов к конкретным механическим системам, рассмотрим случай, когда $n_2 = n_3$ и при этом алгебраическое уравнение $0 = P_{23} x_3 + X_2$ из системы (1.3) допускает единственное решение $x_3 = 0$, а уравнение $0 = P_{31} x_1 + P_{32} x_2 + X_3(t, 0, z, x_1, x_2, 0)$ — решение $x_2 = f(t, z, x_1)$. Подставляя $x_3 = 0$ и $x_2 = f(t, z, x_1)$ в первые два уравнения системы (1.3), получим

$$(1.4) \qquad dz/dt = Z'(t, z, x_1), \quad dx_1/dt = P_{11}' x_1 + X_1'(t, z, x_1)$$

Примем систему (1.4) в качестве упрощенной для полной системы (1.1). Характеристическое уравнение упрощенной системы имеет m нулевых корней, а остальные определяются из уравнения

$$(1.5) \qquad |\lambda E - P_{11}'| = 0 \quad (P_{11}' = P_{11} - P_{12} P_{32}^{-1} P_{31})$$

Система (1.4) имеет более низкий порядок, чем полная система (1.1), и возникает важная с практической точки зрения задача: при каких условиях при достаточно малых значениях параметра μ устойчивость нулевого решения упрощенной системы (1.4) повлечет за собой устойчивость нулевого решения полной системы (1.1). Подобная задача для дифференциальных уравнений с малым параметром при производных рассматривалась во многих работах, например в [1—5], для случаев, отличных от разбираемого здесь.

Следуя [4, 5] и используя соответствующие теоремы Ляпунова [6], можно показать, что для рассматриваемой системы (1.1) справедливо утверждение.

Теорема 1. Если при

$$|P_{23}| \neq 0, \quad |P_{32}| \neq 0, \quad \begin{vmatrix} P_{11}, & P_{12} \\ P_{31}, & P_{32} \end{vmatrix} \neq 0$$

уравнение

$$(1.6) \qquad \begin{vmatrix} \alpha E - P_{22}', & -P_{23} \\ -P_{32}, & \alpha E \end{vmatrix} = 0$$

удовлетворяет условиям Гурвица и все корни (кроме m нулевых) характеристического уравнения упрощенной системы имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение упрощенной системы (1.4) устойчиво и при достаточно малых значениях параметра μ устойчиво также нулевое решение полной системы (1.1).

При этом упрощенная система (1.4) имеет интеграл вида $z + \varphi(t, z, x_1) = B$, полная система (1.1) допускает интеграл $z + F(t, \mu, z, x) = A$, где φ, F — нелинейные голоморфные векторные функции, причем $\varphi = 0$ при $x_1 = 0$; $F = 0$ при $x = 0$; B, A — постоянные векторы.

При условиях теоремы устойчивым будет также и любое решение вида $z = C$, $x = 0$ (C — произвольный постоянный вектор), где $\|C\|$ — достаточно малая величина.

2. В качестве приложения рассматривается задача об устойчивости установившегося движения системы гиростабилизации, для которой имеет место критический (по Ляпунову) случай, в предположении, что элементы системы не являются абсолютно жесткими. Система такого типа рассматривалась в [5], где вводилась упрощенная модель при дополнительном условии, что гироскопы имеют большие собственные кинетические моменты.

Здесь будем рассматривать системы гиростабилизации, считая жесткость упругих элементов системы достаточно большой (но конечной в отличие от случая идеальной, т. е. абсолютно жесткой системы). Для простоты полагаем, что электрические цепи следящих систем безынерционны и дифференциальные уравнения возмущенного движения [5] приведены к виду

$$\frac{d}{dt}\, a\mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}} + (b^\circ + g^\circ)\,\mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}} + c^\circ \mathbf{q}_M = \mathbf{Q}_M'', \quad \frac{d\mathbf{q}_M}{dt} = \mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{2.1}$$

Здесь, как в [5], $\mathbf{q}_M$ — n-мерный вектор механических обобщенных координат, $\mathbf{q}_M = \| \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4 \|^T$, где $\mathbf{q}_1$ — l-мерный вектор углов прецессий гироскопов, $\mathbf{q}_2$ — $(m - l)$-мерный вектор отклонений углов собственных вращений гироскопов от их значений в установившемся движении, $\mathbf{q}_3$ — $(s - m)$-мерный вектор углов поворота роторов стабилизирующих двигателей $(s = m + l)$, $\mathbf{q}_4$ — $(n - s)$-мерный вектор деформаций упругих элементов, a, b, g — квадратные $(n \times n)$-матрицы, соответственно, квадратичной формы кинетической энергии системы, диссипативной функции сил трения, гироскопических коэффициентов, $c = \| 0, 0, c_3, c_4 \|^T$, причем $c_3 = \| c_{31}, 0, 0, 0 \|$, $c_4 = \| 0, 0, 0, c_{44} \|$, c_{44} — квадратная $(n - s) \times (n - s)$-матрица, соответствующая потенциальной энергии сил упругости, $b = \| b_1, b_2, b_3, b_4 \|^T$, причем $b_i = \| b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4} \|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, где b_{ij} — субматрицы соответствующих размеров, b_{44} — квадратная $(n - s) \times (n - s)$-матрица диссипативной функции сил внутреннего трения в материале упругих тел, $g = \| g_1, g_2, g_3, g_4 \|^T$, $g_i = \| g_{i1}, g_{i2}, g_{i3}, g_{i4} \|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, где g_{ij} — субматрицы соответствующих размеров матрицы g; индексом $^\circ$ обозначены члены нулевого порядка в разложении соответствующих функций.

Рассмотрим системы с довольно жесткими элементами и пусть $c_{44} = c_{44}^*/\mu^2$, $b_{44} = b_{44}^*/\mu$, где μ — малый безразмерный положительный параметр. Такого рода модель рассматривалась в [7].

Приведем систему (2.1) к виду (1.1). Введем новые переменные

$$\mathbf{z} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Vmatrix} \mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}} + \begin{Vmatrix} b_1^\circ + g_1^\circ \\ b_2^\circ + g_2^\circ \end{Vmatrix} \mathbf{q}_M, \quad \boldsymbol{\varkappa}_1 = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix} \mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}}$$

$$\boldsymbol{\varkappa}_2 = a_4 \mathbf{q}_M^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_4$$

где $\mathbf{z}$, $\boldsymbol{\varkappa}_1$, $\boldsymbol{\varkappa}_2$ — m-, s-, $(n - s)$-мерные векторы, a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, b_j, g_j $(j = 1, 2)$ — субматрицы соответствующих размеров матриц a, b, g соответственно.

Указанное выше преобразование — нелинейное, неособенное при условии

$$\begin{vmatrix} b_{12}^\circ + g_{12}^\circ, & b_{13}^\circ + g_{13}^\circ \\ b_{22}^\circ + g_{22}^\circ, & b_{23}^\circ + g_{23}^\circ \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.2}$$

равномерно регулярное, не изменяющее постановки задачи об устойчивости.

Система (2.1) в новых переменных

$$\frac{dz}{dt}=\mathbf{Z},\quad \frac{d\varkappa_1}{dt}=-e_{11}^{\circ}\varkappa_1-e_{12}^{\circ}\varkappa_2+\left\|\begin{matrix}0\\ -c_{31}^{\circ}\end{matrix}\right\|\mathbf{q}_1+\mathbf{K}_1 \tag{2.3}$$

$$\mu^2\frac{d\varkappa_2}{dt}=-e_{21}^{\circ}\varkappa_1-e_{22}^{\circ}\varkappa_2-\overset{*\circ}{c_{44}}\mathbf{q}_4+\mathbf{K}_2$$

$$\frac{d\mathbf{q}_{-1}}{dt}=l_{11}\varkappa_1+l_{12}\varkappa_2,\quad \frac{d\mathbf{q}_{-4}}{dt}=l_{41}\varkappa_1+l_{42}\varkappa_2$$

Здесь e_{ij} $(i, j=1, 2)$ — субматрицы соответствующих размеров матрицы $e=(b(\mu)+g(\mu)\,d$, $d=a^{-1}=\|\,d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4\,\|^T$, $d_i=\|\,l_{i1},\ l_{i2}\|$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, d_i, l_{ij} — субматрицы соответствующих размеров матрицы d, $\mathbf{z}$ — критические переменные, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_4$ — некритические переменные, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ — нелинейные векторные функции, голоморфные по совокупности переменных $\mathbf{z}$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_4$, обращающиеся в нуль при нулевых значениях некритических переменных.

Заметим, что система (2.3) имеет вид

$$dz/dt=\mathbf{Z},\quad d\mathbf{x}_1/dt=P_1\mathbf{x}+\mathbf{X}_1 \tag{2.3'}$$

$$\mu^2\frac{d\mathbf{x}_2}{dt}=P_2(\mu)\,\mathbf{x}+\mathbf{X}_2(\mu,\mathbf{z},\mathbf{x}),\quad \frac{d\mathbf{x}_3}{dt}=P_3\mathbf{x}+\mathbf{X}_3$$

Здесь

$$\mathbf{x}_1=\left\|\begin{matrix}\varkappa_1\\ \mathbf{q}_1\end{matrix}\right\|,\quad \mathbf{x}_2=\varkappa_2,\quad \mathbf{x}_3=\mathbf{q}_4$$

$$P_{11}=\left\|\begin{array}{c:c} & 0\\ -e_{11}^{\circ} & \\ & -c_{31}^{\circ}\\ \hdashline l_{11}^{\circ} & 0\end{array}\right\|,\quad P_{12}=\left\|\begin{array}{c}-e_{12}^{\circ}\\ \hdashline l_{12}^{\circ}\end{array}\right\|,\quad P_{13}=0$$

$$P_{21}(\mu)=\|-e_{21}^{\circ},0\|,\quad P_{22}(\mu)=-e_{22}^{\circ},\quad P_{23}=-c_{44}^{*\circ}$$

$$P_{31}=\|\,l_{41}^{\circ},0\,\|,\quad P_{32}=l_{42}^{\circ},\quad P_{33}=0$$

$$P_{21}(\mu)=\mu P_{21}'(\mu),\quad P_{22}(\mu)=\mu P_{22}'(\mu)$$

Подставляя $\mu=0$, получим вырожденную систему. При этом, учитывая, что для рассматриваемых систем $|\,c_{44}^*\,|\neq 0$, $|\,l_{42}\,|\neq 0$, принимая $q_4=0$, $\varkappa_2=-l_{42}^{-1}l_{41}\varkappa_1$ и подставляя в первые два уравнения из (2.3′), представим ее в виде

$$\frac{dz}{dt}=\mathbf{Z}',\quad \frac{d\varkappa_1}{dt}=e_{11}'\varkappa_1+\left\|\begin{matrix}0\\ -c_{31}^{\circ}\end{matrix}\right\|\mathbf{q}_1+\mathbf{K}_1',\quad \frac{d\mathbf{q}_{-1}}{dt}=l_{11}'\varkappa_1 \tag{2.4}$$

(штрихом обозначены соответствующие преобразованные матрицы и векторные функции, полученные при указанной подстановке).

Примем систему (2.4) в качестве упрощенной для (2.3). В старых переменных ей соответствует система

$$\frac{d}{dt}a^*\mathbf{q}^{\cdot}+(b^*+g^*)\,\mathbf{q}^{\cdot}+c^*\mathbf{q}=\mathbf{Q}^*,\quad \frac{d\mathbf{q}}{dt}=\mathbf{q}^{\cdot} \tag{2.5}$$

где $\mathbf{q}=\|\,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\,\|^T$ — s-мерный вектор обобщенных координат, описывающих состояние абсолютно жесткой системы, a^*, b^*, g^*, c^* — квадратные $(s\times s)$-матрицы, отвечающие абсолютно жесткой механической системе.

Заметим, что дифференциальные уравнения (2.5), образующие систему более низкого порядка по сравнению с (2.1), описывают движение механической системы, элементы которой обладают абсолютной жесткостью.

Поставим задачу: при каких условиях допустимо использование уравнений (2.5) вместо исходных уравнений (2.1) (т. е. допусти́м переход от модели механической системы, учитывающей реальные свойства, к ее идеализированной (абсолютно жесткой) модели).

Используя результаты п. 1, можно показать, что если при

$$\left\| \begin{array}{c:c} -e_{11}^\circ, \ -e_{12}^\circ & \begin{array}{c} 0 \\ \hdashline -c_{31}^\circ \end{array} \\ \hdashline \begin{array}{c} d_1^\circ \\ d_4^\circ \end{array} & 0 \end{array} \right\| \neq 0$$

уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha E + e_{22}', & c_{44}^{*\circ} \\ -l_{42}^\circ, & \alpha E \end{vmatrix} = 0 \tag{2.6}$$

удовлетворяет условиям Гурвица, а характеристическое уравнение системы линейного приближения для (2.4) имеет все корни (кроме m нулевых) в левой полуплоскости, то при достаточно малых значениях μ устойчивость нулевого решения упрощенной системы (2.4) обеспечивает и устойчивость нулевого решения полной системы (2.3). Возвращаясь к старым переменным, заметим при этом, что уравнению (2.6) соответствует уравнение

$$\left| \begin{array}{c} a_{\rm I}^\circ \\ \hline a_{\rm II}^\circ \alpha^2 \,\vdots\, a_{44}^\circ \alpha^2 + b_{44}^{*\circ} \alpha + c_{44}^{*\circ} \end{array} \right| = 0 \tag{2.7}$$

$$(a_I = \| a_1, a_2, a_3 \|^T, \ a_{\rm II} = \| a_{41}, a_{42}, a_{43} \|)$$

которое для рассматриваемых механических систем удовлетворяет (как показано в [7]) условиям Гурвица при любых значениях параметров системы, соответствующих физическому смыслу (здесь a_{4i} $(i = 1, 2, 3, 4)$ — субматрицы соответствующих размеров матрицы a). Учитывая это, получаем утверждение.

Теорема 2. Если при условии (2.2) и $|c_{31}^\circ| \neq 0$ все корни (за исключением m нулевых) характеристического уравнения упрощенной системы (2.5) имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение упрощенной системы устойчиво, а при достаточно малых значениях параметра μ (при достаточно большой жесткости элементов системы) устойчиво и нулевое решение полной системы (2.1).

Упрощенная система (2.5) допускает интеграл вида

$$\left\| \begin{matrix} a_1^* \\ a_2^* \end{matrix} \right\| \mathbf{q}^{\cdot} + \left\| \begin{matrix} b_1^{*\circ} + g_1^{*\circ} \\ b_2^{*\circ} + g_2^{*\circ} \end{matrix} \right\| \mathbf{q} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \mathbf{B}$$

а полная система (2.1) — интеграл вида

$$\left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\| \mathbf{q}_M^{\cdot} + \left\| \begin{matrix} b_1^\circ + g_1^\circ \\ b_2^\circ + g_2^\circ \end{matrix} \right\| \mathbf{q}_M + \mathbf{F}(\mathbf{q}_M, \mathbf{q}_M^{\cdot}) = \mathbf{A}$$

Замечания. 1°. Теорема 2 доказана для систем гиростабилизации, но все выкладки легко распространяются и на общий случай механических систем, не содержащих гироскопы, для которых получается аналогичное утверждение.

2°. Теорема 2 относится к случаю неасимптотической устойчивости нулевого решения, но аналогичный результат имеет место и в случае асимптотической устойчивости.

Приведенные результаты определяют условия, позволяющие при решении задачи об устойчивости для указанных систем пользоваться упрощенной (приближенной) моделью более низкого порядка, которая соответствует абсолютно жесткой механической системе.

3. Для рассматриваемых в п. 2 механических систем поставим задачу о близости решений полной и упрощенной систем дифференциальных уравнений. Пусть $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i(t, \mu)$, $\mathbf{q}_i^{\cdot} = \mathbf{q}_i^{\cdot}(t, \mu)(i = 1, 2, 3, 4)$ — решение полной системы (2.1) с начальными условиями $\mathbf{q}_{i0} = \mathbf{q}_i(t_0, \mu)$, $\mathbf{q}_{i0}^{\cdot} = \mathbf{q}_i^{\cdot}(t_0, \mu)$; обозначим через $\mathbf{q}_i^* = \mathbf{q}_i^*(t)$, $\mathbf{q}_i^{\cdot *} = \mathbf{q}_i^{\cdot *}(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ решение упрощенной системы (2.5), определяемое начальными условиями $\mathbf{q}_{i0}^* = \mathbf{q}_i^*(t_0)$, $\mathbf{q}_{i0}^{\cdot *} = \mathbf{q}_i^{\cdot *}(t_0)(i = 1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_4^* = 0$, $\mathbf{q}_4^{\cdot *} = 0$.

Найдем, при каких условиях будет иметь место близость соответствующих решений полной и упрощенной систем на бесконечном интервале времени. Применяя методы теории устойчивости в сочетании с методами теории сингулярно-возмущенных уравнений [8—10], рассматривая дифференциальные уравнения для отклонений, соответствующих некритическим переменным, используя интегралы, имеющие место для рассматриваемых систем и учитывая особенности этих систем, отмеченные в п. 2, можно показать справедливость утверждения.

Теорема 3. Если выполняется условие (2.2), $|c_{31}^{\circ}| \neq 0$ и все корни (кроме m нулевых) характеристического уравнения для упрощенной системы (2.5) располагаются в левой полуплоскости, то при достаточно малых значениях параметра μ для наперед заданных чисел $\xi > 0$, $\eta > 0$ (где ξ — сколь угодно мало́) существует такое значение μ_*, что в возмущенном движении при $0 < \mu < \mu_*$ для всех $t > t_* > t_0$ выполняются соотношения

$$\| \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i^* \| < \xi, \quad \| \mathbf{q}_i^{\cdot} = \mathbf{q}_i^{\cdot *} \| < \xi \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

если $\mathbf{q}_{j0} = \mathbf{q}_{j0}^*$, $\mathbf{q}_{j0}^{\cdot} = \mathbf{q}_{j0}^{\cdot *}$ $(j = 1, 2, 3)$, $\| \mathbf{q}_{40} \| < \eta$, $\| \mathbf{q}_{40}^{\cdot} \| < \eta$. Причем выбором достаточно малого μ значение t_* может быть сделано сколь угодно близким к t_0.

Отметим, что различным задачам динамики механических систем с упругими элементами большой жесткости посвящено много работ. Например, для такого типа систем рассматривались вопросы построения асимптотики решений дифференциальных уравнений [11, 12], вопросы устойчивости для конкретных типов гиростабилизаторов [13, 14] и т. д. Как уже отмечалось выше, для гироскопических систем, рассматриваемых в данной работе, предположение о большой величине собственных кинетических моментов гироскопов не делается (в отличие от [5]) и уравнения прецессионной теории, являющиеся предметом исследования многих авторов ([14—19] и др.), здесь не рассматриваются. Результаты, полученные в данной работе, дополняя известные, обосновывают для рассматриваемых систем допустимость использования принятой упрощенной модели и позволяют при решении соответствующих задач пользоваться приближенными уравнениями и приближенным решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климушев А. И., Красовский Н. Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 680—690.
2. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных.— Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 1, с. 206—211.
3. *Климушев А. И.* Устойчивость по первому приближению нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.— Тр. Уральск. политехн. ин-та, 1973, № 211, с. 44—54.
4. *Кузьмина Л. К.* Об устойчивости решений некоторых систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. —ПММ, 1977, т. 31, вып. 3, с. 567—573.

5. *Кузьмина Л. К.* О некоторых свойствах решений сингулярно-возмущенных систем в одном критическом случае.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 3, с. 382—388.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2, с. 7—263.
7. *Кузьмина Л. К.* К вопросу устойчивости гиростабилизаторов.— В кн.: Приборостроение. Казань: Татар. кн. изд-во, 1971, вып. 2, с. 162—168.
8. *Четаев Н. Г.* К вопросу об оценках приближенных интегрирований.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 3, с. 419—421.
9. *Градштейн И. С.* О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных.— Матем. сб., 1953, т. 32, № 3, с. 533—544.
10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
11. *Черноусько Ф. Л., Шамаев А. С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 3, с. 33—42.
12. *Черноусько Ф. Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 101—113.
13. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
14. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
15. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Гостехиздат, 1956. 299 с.
16. *Новоселов В. С.* Движение нелинейных гироскопических систем.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 1030—1036.
17. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.
18. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В.* О прецессионных уравнениях гироскопических систем.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 2, с. 230—237.
19. *Соболев В. А., Стрыгин В. В.* О допустимости перехода к прецессионным уравнениям гироскопических систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 10—17.

Казань

Поступила в редакцию
30.VII.1984