Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 531.3

ОБ ОЦЕНКЕ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Комарова Г. Л., Леонов Г. А.

Для оценки областей притяжения асимптотически устойчивых состояний равновесия динамических систем предлагается использовать метод нелокального сведения [1, 2], связанный с построением функций Ляпунова, в которых содержатся траектории хорошо изученных двумерных систем. Построенный ниже класс функций расширяет класс функций А. И. Лурье — В. Н. Постникова [3, 4]. Определена область, целиком принадлежащая области притяжения устойчивого состояния равновесия системы. Она оказывается шире, чем оценка области притяжения, полученная на основе функций А. И. Лурье — В. Н. Постникова. В отличие от известных результатов эта область может выходить за пределы интервала, на котором нелинейность удовлетворяет обобщенным условиям Рауса—Гурвица [5]. Предлагаемый ниже алгоритм при определенных значениях варьируемых параметров содержит в себе алгоритмы, опирающиеся на построение функций Ляпунова типа А. И. Лурье и частотное условие В. М. Попова.

Рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$x^{\cdot} = Px + q\varphi(\sigma), \quad \sigma = r^* x \tag{1}$$

где P — постоянная матрица $(n+1)\times(n+1)$, q, r — $(n+1)$-мерные постоянные векторы. Нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ непрерывна и однозначна [5] при всех $\sigma \neq 0$. Значением $\varphi(\sigma)$ при $\sigma = 0$ является множество $[\varphi(-0), \varphi(+0)]$. Предполагаем, что функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(\sigma)\,\sigma > 0, \quad \forall \sigma \neq 0 \tag{2}$$

Матрица P имеет произвольный спектр. В случае, когда P имеет собственные значения с положительными вещественными частями, систему (1) будем называть собственно неустойчивой.

Поставим задачу следующим образом: построить область в фазовом пространстве системы (1), целиком принадлежащую области притяжения состояния равновесия $x = 0$, т. е. оценивающую «изнутри» область асимптотической устойчивости «в большом».

Вопрос о такой оценке области притяжения нулевого решения системы (1) будет сводиться к изучению системы второго порядка

$$\eta^{\cdot} = \alpha\eta - \varphi(\sigma), \quad \sigma^{\cdot} = \eta - \beta\varphi(\sigma); \quad \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 0 \tag{3}$$

где функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (2). Наряду с системой (3) будем рассматривать уравнение

$$\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = \frac{\alpha F(\sigma) - \varphi(\sigma)}{F(\sigma) - \beta\varphi(\sigma)} \tag{4}$$

Решения $F(\sigma)$ уравнения (4) соответствуют траекториям системы (3) при $\sigma \neq 0$. Анализ поля направлений системы (3) показывает, что для чисел $\sigma_1 < 0 < \sigma_2$ и $s_0 \geqslant 0$ уравнение (4) имеет решения $F_-(\sigma)$, $F_+(\sigma)$

со следующими свойствами:

(5) $$F_-'(\sigma) > 0, \quad \forall\sigma \in [\sigma_1, 0), \; F_-(\sigma_1) = s_0$$
$$F_+'(\sigma) > 0, \quad \forall\sigma \in (0, \sigma_2], \; F_+(\sigma_2) = -s_0$$

При доказательстве теоремы 1 будет использоваться решение $F(\sigma)$ уравнения (4), заданное при $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, которое определим следующим образом:

$$F(\sigma) = \begin{cases} F_-(\sigma), & \sigma \in [\sigma_1, 0] \\ F_+(\sigma), & \sigma \in (0, \sigma_2] \end{cases}$$

Предполагаем, что при некотором μ выполнено соотношение

(6) $$0 \leqslant \varphi(\sigma)\sigma \leqslant \mu\sigma^2, \quad \forall\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$$

Рассмотрим поведение траекторий системы (1) вблизи гиперплоскости $\sigma = 0$. Предполагаем, что $\rho = r^*q < 0$. В этом случае система (1) имеет так называемый скользящий режим [5], т. е. «полосу» в гиперплоскости $r^*x = 0$

(7) $$\Pi = \{x\colon \; -\rho\varphi(-0) \leqslant r^*Px \leqslant -\rho\varphi(+0), \; r^*x = 0\}$$

в которой $\sigma^{\cdot}(t) \equiv 0$. Покинуть полосу (7) решение $x(t)$ системы (1) может лишь в граничных точках множества (7), а движение на скользящем режиме описывается линейной системой [5]

(8) $$x^{\cdot} = (I - qr^*/\rho)\,Px, \quad r^*x = 0$$

Рассмотрим множества вида $\Psi(\zeta) = \{x\colon x^*Lx \leqslant \zeta, \; r^*x = 0\}$ для некоторой положительно-определенной матрицы $L = L^*$. Если число ζ таково, что множество $\Psi(\zeta)$ принадлежит полосе (7), а матрица L удовлетворяет неравенству $L(I - \rho^{-1}qr^*)P + P^*(I - \rho^{-1}rq^*)L \leqslant 0$, то множество $\Psi(\zeta)$ положительно инвариантно для решений системы (8) и, следовательно, для решений $x(t)$ системы (1). Это означает, что если $x(0) \in \Psi(\zeta)$, то $x(t) \in \Psi(\zeta)$ при всех $t \geqslant 0$.

Если, кроме того, все корни характеристического уравнения системы (8) [5]

(9) $$\det(P - pI)\,r^*(P - pI)^{-1}q = 0$$

находятся слева от мнимой оси, то решения системы (8) стремятся при $t \to +\infty$ к точке $x = 0$.

Введем обозначения $L_0 = \sup\{\zeta\colon \Psi(\zeta) \in \Pi\}$, $\chi(p) = r^*(P - pI)^{-1}q$ и для произвольной матрицы $H = H^* > 0$ и чисел σ_1, σ_2 определим число H_0 по формуле

$$H_0 = \min_{i=1,2}\left(\min_{r^*x=\sigma_i} x^*Hx\right)$$

Относительный минимум квадратичной формы x^*Hx при условии $r^*x = \sigma_1$ достигается при [6—9] $x_1 = \sigma_1 H^{-1}r(r^*H^{-1}r)^{-1}$.

Таким образом

$$H_0 = \min\left(\frac{\sigma_1^2}{r^*H^{-1}r}, \frac{\sigma_2^2}{r^*H^{-1}r}\right)$$

Сформулируем теорему об оценке области притяжения решения $x = 0$ системы (1).

Теорема 1. Пусть существуют вещественные симметричные матрицы $H > 0$, $L > 0$ и числа $\lambda \leqslant 0$, $\tau \geqslant 0$, $\theta > 0$, $\varepsilon_\lambda < 0$ при $\lambda = 0$, $\varepsilon_\lambda = \theta/\lambda$ при $\lambda \neq 0$, такие, что выполнены следующие условия:

1) множество $\Omega_0 = \{x : x^*Lx \leqslant \varepsilon_\lambda \lambda \theta^{-1} L_0, \quad r^*x = 0\}$ положительно инвариантно для решений системы (8);

2) $P + \lambda I$ — матрица Гурвица;

3) выполнены матричные неравенства $R \leqslant 0$; $-\gamma R \geqslant gg^*$, где $R = H(P + \lambda I) + (P^* + \lambda I) H + L$, $g = Hq + {}^1/_2 (\theta P^* r + \tau r)$

$$\gamma = \tau\mu^{-1} - \rho\theta + \rho\varepsilon_\lambda\lambda$$

4) для решения $F(\sigma)$ уравнения (4) с $\alpha = -\lambda(\theta\Gamma^{-1})^{1/2}$, $\beta = -\rho\varepsilon_\lambda\lambda(\theta\Gamma)^{-1/2}$, $\Gamma = -(\theta P^* r + \tau r)^* q$, $s_0 = (2\theta^{-1}H_0)^{1/2}$, обладающего свойствами (5), справедливо соотношение $F(-0) = -F(+0)$ и, кроме того, при $\lambda \neq 0$ выполнено условие

$$F(-0) \leqslant \min\left\{\sqrt{\frac{L_0}{-\lambda\theta}}, \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \inf_{\sigma \neq 0} |\varphi(\sigma)|\right\} \tag{10}$$

5) при $\lambda \neq 0$ в условии (6) $\mu = +\infty$.

Тогда любое решение $x(t)$ системы (1) с начальными условиями

$$x(0) \in \Omega = \{x : x^*Hx < {}^1/_2\theta F^2(\sigma), \ \sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)\} \cup \Omega_0 \tag{11}$$

принадлежит области Ω при всех $t \geqslant 0$.

Если, кроме того, все корни уравнения (9) расположены слева от мнимой оси, то решение $x(t)$ с начальными условиями (11) стремится к точке $x = 0$ при $t \to +\infty$, т. е. область Ω принадлежит области притяжения состояния равновесия $x = 0$ системы (1).

Условия существования матрицы H определяет

Лемма 1. Для существования матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей условию 3) теоремы 1, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\omega \in R^1$ было выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}[(\tau + \theta p)\chi(p) - q^*(P^* - pI)^{-1} L (P - pI)^{-1} q] + \rho\varepsilon_\lambda\lambda + \tau/\mu \geqslant 0 \tag{12}$$

где $p = i\omega - \lambda$. Алгоритм определения матрицы H описан в [10, 11].

Доказательство теоремы 1. В силу условия 3) теоремы 1 по лемме 1.2.1 [5] при любых x, ξ выполнено неравенство

$$2x^* H[(P + \lambda I)x + q\xi] + \theta\xi r^*(Px + q\xi) + \tau\xi r^* x + x^*Lx - (\rho\varepsilon_\lambda\lambda + \tau\mu^{-1})\xi^2 \leqslant 0 \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$V(x) = x^*Hx - {}^1/_2\theta F^2(\sigma) \tag{14}$$

Пусть $x(t)$ — некоторое решение системы (1) с начальными данными $x(0) \in \Omega \setminus \Omega_0$ (если $x(0) \in \Omega_0$, то $x(t) \in \Omega_0$ при всех $t \geqslant 0$ по условию 1) теоремы 1). Вычислим производную по времени функции $v(t) = V(x(t))$ в силу системы (1)

$$v^\cdot + 2\lambda v = 2x^*H[(P + \lambda I)x + q\varphi(\sigma)] - \theta\lambda F^2(\sigma) - \theta F(\sigma)F'(\sigma) r^*[Px + q\varphi(\sigma)]$$

Здесь $x = x(t)$, $\sigma = \sigma(t)$. Используя (13), получим

$$v^\cdot + 2\lambda v \leqslant -\theta\varphi(\sigma) r^*[Px + q\varphi(\sigma)] - \tau\varphi(\sigma) r^* x + \tau\mu^{-1}\varphi^2(\sigma) - x^*Lx + \rho\varepsilon_\lambda\lambda\varphi^2(\sigma) - \theta\lambda F^2(\sigma) - \theta F(\sigma) F'(\sigma) r^* [Px + q\varphi(\sigma)] \tag{15}$$

Поскольку $v(0) = x^*(0) Hx(0) - {}^1/_2\theta F^2 + (\sigma(0)) < 0$, то из непрерывности функции $v(t)$ следует существование числа T, такого, что при $t < T$ выполнено условие $v(t) < 0$, т. е. $x(t) \in \Omega$. Отметим, что

$$\sigma(t) \in (\sigma_1, \sigma_2), \quad \forall t : v(t) < 0 \tag{16}$$

Действительно, поскольку $\sigma(0) \in (\sigma_1, \sigma_2)$, то существует число t_1, такое, что при $t \in [0, t_1)$ справедливо включение $\sigma(t) \in (\sigma_1, \sigma_2)$. Предположим, что $\sigma(t_1) = \sigma_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда из соотношений $v(t_1) < 0$, $F(\sigma_1) = -F(\sigma_2) = \sqrt{2H_0/\theta}$ следует $x^*(t_1)Hx(t_1) < H_0$, что противоречит положительной определенности матрицы H и определению числа H_0.

Предположим теперь, что $v(T) = 0$. Рассмотрим сначала случай $\lambda \neq 0$. При этом $\varepsilon_\lambda \lambda = \theta$, $\mu = +\infty$ и из положительной определенности матрицы L и (15) имеем

$$v^{\cdot} + 2\lambda v \leqslant -\theta[F(\sigma)F'(\sigma) + \varphi(\sigma)]r^*Px - \theta\lambda F^2(\sigma) - \tag{17}$$
$$-\rho\theta F(\sigma)F'(\sigma)\varphi(\sigma) - \tau r^*x\varphi(\sigma) - \tau F(\sigma)F'(\sigma)r^*x$$

Последнее слагаемое добавлено к правой части, так как $F(\sigma)F'(\sigma)\sigma < 0$ при всех $\sigma \neq 0$.

Из условия 3) теоремы 1 ($\gamma = 0$ при $\lambda \neq 0$)

$$Hq = -{}^1/_2(\theta P^*r + \tau r) \tag{18}$$

Обозначим $c = \theta P^*r + \tau r$, $\Gamma = -c^*q$. Из положительной определенности матрицы H и (18) следует, что $\Gamma > 0$. По лемме 1.2.5 [5] и на основании (18) имеем равенства

$$\det[H + (2c^*q)^{-1}cc^*] = \det H[1 + (2c^*q)^{-1}c^*H^{-1}c] = 0$$

откуда в силу положительной определенности матрицы H и положительности числа Γ получим неравенство $H + (2c^*q)^{-1}cc^* \geqslant 0$, или $x^*Hx \geqslant (2\Gamma)^{-1}|c^*x|^2$. Из последнего неравенства и условия $v(t) \leqslant 0$ при $t \in [0, T]$ следует

$$|c^*x|^2 \leqslant \Gamma\theta F^2(\sigma) \tag{19}$$

Условие 4) теоремы 1 обеспечивает соотношение

$$F(\sigma)[F(\sigma)F'(\sigma) + \varphi(\sigma)] \leqslant 0, \quad \forall\sigma \neq 0 \tag{20}$$

Это следует из (10), неравенства $|F(\sigma)| \leqslant F(-0)$ при $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ и равенства

$$F(\sigma)F'(\sigma) + \varphi(\sigma) = [\alpha F^2(\sigma) - \beta\varphi^2(\sigma)][F(\sigma) - \beta\varphi(\sigma)]^{-1}$$

При $t \leqslant T$, таких, что $\sigma(t) \neq 0$, продолжим неравенства (17), используя (19), (20) и то, что $\varepsilon_\lambda\lambda = \theta$ при $\lambda \neq 0$. Получим

$$v^{\cdot} + 2\lambda v \leqslant -[F(\sigma)F'(\sigma) + \varphi(\sigma)](\theta r^*P + \tau r^*)x - \theta\lambda F^2(\sigma) -$$
$$-\rho\theta F(\sigma)F'(\sigma)\varphi(\sigma) \leqslant -[F(\sigma)F'(\sigma) + \varphi(\sigma)]\sqrt{\Gamma\theta}F(\sigma) -$$
$$-\theta\lambda F^2(\sigma) - \rho\varepsilon_\lambda\lambda F(\sigma)F'(\sigma)\varphi(\sigma)$$

Выберем числа $\alpha = -\lambda\sqrt{\theta\Gamma^{-1}}$, $\beta = -\rho\varepsilon_\lambda\lambda(\theta\Gamma)^{-1/2}$ и получим

$$v^{\cdot} + 2\lambda v \leqslant -\sqrt{\Gamma\theta}F(\sigma)[F(\sigma)F'(\sigma) - \alpha F(\sigma) - \beta F'(\sigma)\times$$
$$\times\varphi(\sigma) + \varphi(\sigma)] = 0$$

в силу уравнения (4).

Таким образом, при $\lambda \neq 0$

$$v^{\cdot} + 2\lambda v \leqslant 0, \quad t \in [0, T] : \sigma(t) \neq 0 \tag{21}$$

При $\sigma(t) = 0$, $\sigma^{\cdot}(t) = 0$ (т. е. $r^*x = 0$, $r^*(Px + q\varphi(\sigma)) = 0$) из (15) получим

$$v^{\cdot} + 2\lambda v \leqslant -\lambda\theta F^2(\sigma) - x^*Lx \tag{22}$$

При t, таких, что $\sigma(t) = 0$ и $x^*(t)Lx(t) > L_0 \geqslant -\lambda\theta F^2(0)$, из (22) и (10) вытекает

$$v^{\cdot} + 2\lambda v \leqslant 0 \tag{23}$$

Если же при некотором $t = t_2$ будет $\sigma(t_2) = 0$ и $x^*(t_2) Lx(t_2) \leqslant L_0$, т. е. $x(t_2) \in \Omega_0$, то $x(t) \in \Omega_0$ при всех $t \geqslant t_2$ в силу положительной инвариантности множества Ω_0. Отсюда и из (21) следует, что условие (23) выполнено при всех $t \in [0, T]$, и, так как $v(0) < 0$, то $v(T) < 0$, что противоречит $v(T) = 0$. Следовательно, условие (23) выполнено при всех $t \in [0, t_2]$.

При $\lambda = 0$ функция $F(\sigma)$ удовлетворяет уравнению $F(\sigma) F'(\sigma) + \varphi(\sigma) = 0$. Отсюда, из (6), (15) и положительной определенности матрицы L имеем при всех $t \geqslant 0$

$$\dot{v} < -\theta [F(\sigma) F'(\sigma) + \varphi(\sigma)] r^* [Px + q\varphi(\sigma)] - \tau [r^*x - \varphi(\sigma)/\mu]\varphi(\sigma) \leqslant 0$$

Итак, при любом $\lambda \leqslant 0$ выполнено неравенство

$$\dot{v}(t) < 0, \quad \forall t \in [0, t_2), \ t_2 \leqslant +\infty \tag{24}$$

и если $t_2 < +\infty$, то $x(t) \in \Omega_0$ при всех $t \geqslant t_2$. Из (24) и $v(0) < 0$ вытекает, что $v(t) < 0$ при $t \in [0, t_2)$. Отсюда и из (16) следует, что при всех $t \geqslant 0$ $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$.

Итак, доказано, что если $x(0) \in \Omega$, т. е. $v(0) < 0$, то $x(t) \in \Omega$ при всех $t \geqslant 0$. Покажем теперь, что при условии (11) $x(t) \to 0$.

Предположим, что $x(t) \in \Omega \setminus \Omega_0$ при всех $t \geqslant 0$. Поскольку $x(t)$ ограничено, то и функция $v(t)$ ограничена при всех $t \geqslant 0$. Отсюда и из (24) следует, что существует предел

$$\lim_{t \to +\infty} V(x(t)) = V_0 \tag{25}$$

а множество ω-предельных точек траектории $x(t)$ не пусто [5]. По теореме 2.2.5 [5], существует траектория $x_\omega(t)$, целиком состоящая из ω-предельных точек траектории $x(t)$. Из (25) вытекает, что $V(x_\omega(t)) \equiv V_0$ при всех $t \geqslant 0$, а это противоречит (24).

Следовательно, существует момент времени t_2, такой, что $x(t_2) \in \Omega_0$, и следовательно, $x(t) \in \Omega_0$ при всех $t \geqslant t_2$. По условию теоремы 1 характеристическое уравнение скользящего режима (9) имеет все корни с отрицательными вещественными частями. Поэтому решения линейной системы (8) стремятся при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия $x = 0$. Отсюда следует, что решение $x(t)$ системы (1) стремится к точке $x = 0$ при $t \to +\infty$. Теорема 1 доказана.

Утверждение леммы 1 следует из леммы 1.2.1 [5], теоремы 1.2.6 [5] и невырожденности передаточной функции $\chi(p)$ системы (1).

Предложенный в доказательстве теоремы 1 алгоритм является распространением алгоритмов [6—9, 12—22], основанных на построении функции Ляпунова типа А. И. Лурье

$$V_1(x) = x^*Hx + \theta \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma$$

где $H = H^* > 0$.

Действительно, пусть выполнены все условия теоремы 1 при $\lambda = 0$, т. е. матрица P исходной системы (1) — матрица Гурвица. Проинтегрировав уравнение (4) при $\lambda = 0$, $F(\sigma)F'(\sigma) + \varphi(\sigma) = 0$, получим

$$F^2(\sigma) = 2\int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma + F^2(0)$$

Таким образом, при $\lambda = 0$ функция $V(x)$ (14) с точностью до постоянной совпадает с $V_1(x)$. Пусть σ_1, σ_2 — значения σ, при которых удовлетворяется условие (6). При $\sigma = \sigma_i$ $(i = 1, 2)$ имеем

$$\frac{1}{2} F^2(-0) = \int_0^{\sigma_1} \varphi(\sigma)\, d\sigma + \frac{H_0}{\theta}, \qquad \frac{1}{2} F^2(+0) = \int_0^{\sigma_2} \varphi(\sigma)\, d\sigma + \frac{H_0}{\theta}$$

$$\frac{1}{2} F^2(\sigma) = -\int_0^{\sigma} \varphi(\sigma)\, d\sigma + \min_{i=1,2} \int_0^{\sigma_i} \varphi(\sigma)\, d\sigma + \frac{H_0}{\theta}$$

Область Ω, полученная по теореме 1 при $\lambda = 0$, определяется неравенствами

$$x^* H x + \theta \int_0^{\sigma} \varphi(\sigma)\, d\sigma < \theta \min_{i=1,2} \int_0^{\sigma_i} \varphi(\sigma)\, d\sigma + H_0, \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2 \tag{26}$$

и в точности совпадает с областью, полученной в [6—9, 12—22] при помощи функции $V_1(x)$.

Выберем при $= 0$ матрицу $L > 0$ так, чтобы $x^* L x < \delta \mid x \mid^2$ для любого $\delta > 0$. Частотное условие (12) при этом записывается следующим образом: $\operatorname{Re}[(\tau + i\omega\theta)\chi(i\omega)] + \tau\mu^{-1} > 0$ и совпадает с частотным условием В. М. Попова [23], использованным в работах [6—9, 12—24].

Таким образом, алгоритмы [6—9, 12—22], опирающиеся на построение функции Ляпунова типа А. И. Лурье, содержатся в доказательстве теоремы 1 при $\lambda = 0$.

Сектор (6), в котором при $\lambda = 0$ должен лежать график нелинейности $\varphi(\sigma)$ при $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, принадлежит сектору

$$h_1 \sigma^2 \leqslant \varphi(\sigma)\, \sigma \leqslant h_2 \sigma^2, \quad h_2 \leqslant +\infty \tag{27}$$

в котором линеаризованная при $\varphi(\sigma) = h\sigma$ система (1) устойчива для любого $h \in (h_1, h_2)$. Области, полученные в [6—9, 12—24], ограничены по оси σ промежутком $[\sigma_{h1}, \sigma_{h2}]$, на котором $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет (27). Если применять теорему 1 для собственно неустойчивой системы (1), то при этом $\lambda < 0$, условие (6) совпадает с (2) и теорема 1 не содержит требований типа (27) (сектор (6) в этом случае шире, чем сектор (27)). Область Ω не ограничена по оси σ интервалом $[\sigma_{h1}, \sigma_{h2}]$ и для ряда систем выходит за пределы указанного интервала. Это подтверждено приведенным ниже примером.

Таким образом, теорема 1 при $\lambda < 0$ в ряде случаев позволяет получить область Ω, более точно приближающую истинную область притяжения стационарного решения системы вида (1), чем оценки, полученные в [6—9, 12—24].

Рассмотрим теперь систему вида

$$z^{\cdot} = Az + b\varphi(\sigma), \quad \sigma^{\cdot} = c^* z + \rho\varphi(\sigma) \tag{28}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица произвольного спектра, b, c — n-векторы, $\rho < 0$ — число; функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (2). Система (28) может быть приведена к виду (1). Сформулируем для системы (28) результат, который можно рассматривать как некоторый «предельный» случай теоремы 1. Введем обозначения $D(p) = c^*(A - pI)^{-1} b$, $\Gamma = -c^* b$ и для некоторой матрицы $L = L^* > 0$, $\Psi_1(\zeta) = \{z : z^* L z \leqslant \zeta\}$, $\Pi_1 = \{z : -\rho\varphi(-0) \leqslant c^* z \leqslant -\rho\varphi(+0)\}$, $L_1 = \sup\{\zeta : \Psi_1(\zeta) \subset \Pi_1\}$. Предполагаем, что $\Gamma > 0$.

Теорема 2. Пусть существуют матрица $L = L^* > 0$ и числа $\lambda < 0$, $\theta > 0$, такие, что выполнены условия

1) $A + \lambda I$ — матрица Гурвица;

2) при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ выполнено неравенство

$$\theta \operatorname{Re} D(i\omega - \lambda) - b^* [A^* + (\lambda - i\omega) I]^{-1} L [A + (\lambda - i\omega) I]^{-1} b \geqslant 0 \tag{29}$$

3) $\sqrt{L_1} \leqslant \sqrt{\rho\theta} \inf\limits_{\sigma \neq 0} |\varphi(\sigma)|$;

4) $L(A - \rho^{-1} b c^*) + (A^* - \rho^{-1} c b^*) L \leqslant 0$;

5) для решения $F(\sigma)$ уравнения (4) с $\alpha = -\lambda\Gamma^{-1/2}$, $\beta = -\rho\Gamma^{-1/2}$, $s_0 = 0$, обладающего свойствами (5), справедливо соотношение $F(-0) = -F(+0) = \sqrt{L_1(\lambda\theta)^{-1}}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) все решения $z(t)$, $\sigma(t)$ системы (28) с начальными условиями

$$(z(0),\ \sigma(0)) \in \Omega = \{z, \sigma : z^*Hz < {}^1/_2\theta F^2(\sigma),\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2\} \cup \cup \{z : z^*Lz \leqslant L_1\}$$

удовлетворяют включению $(z(t),\ \sigma(t)) \in \Omega$ при всех $t \geqslant 0$;

б) если, кроме выполнения условий 1)—5), $A - \rho^{-1}bc^*$ — матрица Гурвица, то любое решение системы (28) с начальными условиями $(z(0),\ \sigma(0)) \in \Omega$ стремится при $t \to +\infty$ к точке $z = 0$, $\sigma = 0$.

Существование матрицы H гарантируется выполнением частотного условия (29) по лемме 1.2.6 [5].

Пример. Проиллюстрируем применение теоремы 2 на примере системы уравнений второго порядка (вторая задача Булгакова) [25, 26]

$$(30)\qquad \begin{aligned} &T^2\xi^{\cdot\cdot} + U\xi^{\cdot} - k\xi = -\varphi(\sigma), \\ &\sigma^{\cdot} = G^2\xi^{\cdot\cdot} + E\xi^{\cdot} + a\xi - l^{-1}\varphi(\sigma), \end{aligned} \qquad \varphi(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > 0 \\ -1, & \sigma < 0 \end{cases}$$

Здесь $\varphi(\sigma)$ — функция вида (2), G^2, $a > 0$, $l > 0$, $E > 0$ — постоянные регулятора, T, U — постоянные объекта регулирования. Будем рассматривать систему (30) при $U = 0$ и $G^2 = 0$.

Система (30) сводится к системе вида (28), при этом

$$(31)\qquad A = \begin{Vmatrix} 0 & kT^{-2} \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} -T^2 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad c = \begin{Vmatrix} E \\ a \end{Vmatrix}, \quad \rho = -\frac{1}{l}$$

$$\Gamma = \frac{E}{T^2}, \quad z = \begin{Vmatrix} \xi^{\cdot} \\ \xi \end{Vmatrix}$$

Скользящий режим системы (30) описывается уравнением

$$(32)\qquad \xi^{\cdot\cdot} = -\frac{lE}{T^2}\xi^{\cdot} - \frac{al - k}{T^2}\xi$$

Выберем матрицу L в виде

$$L = \begin{Vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & (al - k)T^{-2}\varepsilon \end{Vmatrix}$$

($\varepsilon > 0$ — некоторое число). Матрица L положительно определена, если

$$(33)\qquad al - k > 0$$

Условие 4) теоремы 2 при этом выполнено.

Определим число L_1 так, чтобы система уравнений $\varepsilon[z_1^2 + (al - k)T^{-2}z_2] = L_1$, $Ez_1 + az_2 = l^{-1}$ ($z_1 = \xi^{\cdot}$, $z_2 = \xi$) имела единственное решение (т. е. множество $z^*Lz = L_1$ должно касаться границы полосы $|c^*z| = -\rho$). Получим

$$(34)\qquad L_1 = \varepsilon l^{-2}\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = E^2 + a^2T^2(al - k)^{-1}$$

Условие 1) теоремы 2 выполнено, если

$$(35)\qquad -\lambda > \sqrt{k}/T$$

а условие 2)

$$\operatorname{Re}[(Ep + a)(T^2p^2 - k)^{-1}] - \varepsilon\left(|p|^2 + \frac{al - k}{T^2}\right)|T^2p^2 - k|^{-2} \geqslant 0$$

справедливо, если

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon = -T^2(E\lambda + a) > 0 \\ &2T^2a\lambda^2 + Ek\lambda - ak + (E\lambda + a)(al - k) > 0 \end{aligned}$$

При выборе $\lambda = -aE^{-1} - \delta_\lambda$ ($\delta_\lambda > 0$ — некоторое число) и выполнении неравенств

$$(37)\qquad E\sqrt{k} < aT, \quad E^2l \leqslant 4aT^2$$

условие (29) выполнено. Учитывая (34), получим

$$F(-0) = \frac{T\sqrt{E\delta_\lambda}}{l\sqrt{-\lambda}\sqrt{\Lambda}}$$

Условие 3) теоремы 2 записывается в виде неравенства

$$\delta_\lambda \leqslant l\Lambda/(ET^2) \tag{38}$$

Таким образом, при выполнении соотношений (33), (37), (38) справедливы все условия теоремы 2.

Область Ω ограничена по оси σ отрезком (σ_1, σ_2), где $\sigma_1 = -\sigma_2$ — нули функции $F(\sigma)$. В системе (30) функция $\varphi(\sigma)$ — релейная. Система (3) при этом интегрируется, и, вычисляя значение $\sigma(t) = \sigma_1$ в момент времени t_1, такой, что $\eta(t_1) = 0$ ($\sigma(0) = 0$, $\eta(0) = F(-0)$), получим

$$\sigma_1 = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha^2}\ln(1+\alpha\eta_0) - \frac{\eta_0}{\alpha} \tag{39}$$

$$\alpha = (a + E\delta_\lambda)E^{-3/2}T, \qquad \beta = \frac{T}{l\sqrt{E}}, \qquad \eta_0 = F(-0)$$

Сравним теперь полученный интервал $(\sigma_1, -\sigma_1)$ с интервалом $(-\sigma_h, \sigma_h)$, вырезаемым на оси σ сектором (27) для системы (30). Для этого рассмотрим линейную систему, полученную из (30) при $\varphi(\sigma) = \varkappa\sigma$. Эта система будет устойчивой при $\varkappa > al/E$, т. е. $h_1 = al/E$, $h_2 = +\infty$. Нелинейность $\varphi(\sigma)$ принадлежит сектору (27) при $\sigma \in (-E/(al), E/(al))$.

Подставив в (40) числовые значения параметров $E = 4$, $a = 3$, $l = 1$, $T = 15$, $k = 1$, $\delta_\lambda = 0{,}4$, вычислим $\sigma_1 = -1{,}563$. Значение σ_h при этом равно 1,333.

Область (26), полученная в [6—9, 12—24], ограничена по оси σ интервалом (—1,333; 1,333), тогда как область Ω вырезает на оси σ интервал (—1,563; 1,563). Следовательно, для системы (30) полученная по теореме 2 оценка Ω истинной области притяжения точнее, чем область, построенная по алгоритмам, использующим функцию Ляпунова типа А. И. Лурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов Г. А.* Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 2, с. 238—244.
2. *Леонов Г. А.* Метод нелокального сведения в теории абсолютной устойчивости нелинейных систем. I, II.— Автоматика и телемеханика, 1984, № 2, с. 45—53; № 3, с. 48—56.
3. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.— Л.: Гостехиздат, 1951. 216 с.
4. *Лурье А. И., Постников В. Н.* К теории устойчивости регулируемых систем.— ПММ, 1944, т. 8, вып. 3, с. 246—248.
5. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
6. *Дмитриев Ю. А.* Асимптотическая устойчивость «в большом» некоторых динамических систем.— В кн.: Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике. Тр. семинара-симпозиума. Ч. 2. Новосибирск: Наука, 1966, с. 93—109.
7. *Walker J. A. McClamroch N. H.* Finite region of attraction for problem of Lur'e.— Internat. J. Control, 1967, v. 6, No. 4, p. 331—336.
8. *Willems J. L.* The computation of finite stability regions by means of open Lyapunov surfaces.— Internat. J. Control, 1969, v. 10, No. 5, p. 538—544.
9. *Weissenberger S.* Application of results from the absolute stability problem to the computation of finite stability domains.— IEEE Trans. Automat. Control, 1968, v. AC-13, No. 1, p. 124—125.
10. *Якубович В. А.* Частотная теорема в теории управления.— Сиб. матем. ж., 1973, т. 14, № 2, с. 384—420.
11. *Барабанов А. Т., Катховник В. Я., Нелепин Р. А. и др.* Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. М.: Наука, 1975. 447 с.
12. *Willems J. L.* Direct method for transient stability studies in power system analysis.— IEEE Trans. Automat. Control, 1971, v. AC-16, No. 4, p. 332—341.
13. *Moor J. B., Anderson B. D. O.* A generalization of the Popov criterion.— J. Franklin Inst., 1968, v. 285, No. 6, p. 488—492.
14. *Pai M. A., Mohan A. M., Rao G. J.* Power system transient stability regions using Popov's method.— IEEE Trans. Power Appar. Syst., 1970, v. PAS-89, No. 5, p. 788—794.
15. *Willems L. J., Willems J. C.* The application of Lyapunov methods to the computation of transient stability regions for multi-machine power systems.— IEEE Trans. Power Appar. Syst., 1970, v. PAS-89, No. 5, p. 795—801.

16. *Henner V. E.* A multi-machine power system Lyapunov function using the generalized Popov criterion.— Internat. J. Control, 1974, v. 19, No. 5, p. 969—976.
17. *Mansour M.* Generalized Lyapunov function for power systems.— IEEE Trans. Automat. Control, 1974, v. AC-19, No. 3, p. 247—248.
18. *Gudaru U.* A general Lyapunov function for multi-machine power systems with transfer conductances.— Internat. J. Control, 1975, v. 21, No. 2, p. 333—343.
19. *Willems J. L.* A partial stability approach to the problem of transient power system stability.— Internat. J. Control., 1974, v. 19, No. 1, p. 1—14.
20. *Chang T. L., Davies M. S.* Regions of transient stability for power systems involving saliency using the Popov criterion.— Proc. IEE, 1972, v. 119, No. 5, p. 625—628.
21. *Mahalanabis A. K., Singh R.* On the analysis and improvement of the transient stability of multi-machine power systems.— IEEE Trans. Power Appar. Syst., 1981, v. PAS-100, No. 4, p. 1574—1579.
22. *Янко-Триницкий А. А.* Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. М.— Л.: Госэнергоиздат, 1958. 103 с.
23. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970, 453 с.
24. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
25. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматгиз, 1962. 483 с.
26. *Булгаков Б. В.* Некоторые задачи теории регулирования с нелинейными характеристиками.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 313—332.

Ленинград

Поступила в редакцию
20.I.1985