Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ТИПА МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Тереки Й., Хатвани Л.

При изучении свойств устойчивости и асимптотического поведения системы в качестве функции Ляпунова часто используют полную механическую энергию системы [1—7]. По аналогии с разделением энергии на кинетическую и потенциальную ниже предлагается строить функцию Ляпунова в виде суммы двух вспомогательных скалярных функций, причем так, что ее производная в силу системы оценивается какой-то функцией от этих вспомогательных функций. Обобщая результаты [8], будем изучать случай, когда производная функции Ляпунова может принимать также положительные значения, а уравнение сравнения, возникающее из оценки функции Ляпунова, не допускает разделения переменных. На основании полученных результатов обобщается теорема В. В. Румянцева [3] об асимптотической устойчивости относительно скоростей положения равновесия диссипативной механической системы.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot} = X(t, x) \quad (t \in R_+ = [0, \infty),\ x \in R^k) \tag{1.1}$$

где функция X определена и непрерывна на множестве $R_+ \times G$, где G — открытое множество.

Кроме стандартных обозначений и понятий [9] пользуемся следующими. Непрерывная функция φ: $R_+ \to R_+$ называется положительной в среднем [4], если для любой бесконечной системы S непересекающихся отрезков полуоси R_+ одинаковой длины имеет место соотношение

$$\int_S \varphi(t)\, dt = \infty$$

Далее введем обозначения $[a]_+ = \max\{0, a\}$ и $[a]_- = \max\{0, -a\}$ — положительную и отрицательную части вещественного числа a.

Теорема 1.1. Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемые функции V_1, V_2: $R_+ \times G \to R$ и непрерывные функции ω, r: $R_+^2 \to R_+$, удовлетворяющие на множестве $R_+ \times G$ следующим условиям:

$$1)\ V_1(t, x) \geqslant 0,\ V(t, x) = V_1(t, x) + V_2(t, x) \geqslant 0$$

$$2)\ V^{\cdot}(t, x) \leqslant -\omega(t, V_1(t, x)) + r(t, V(t, x))$$

где функции $\omega(t, u)$, $r(t, u)$ не убывают по u; при фиксированных значениях u_0 функция $\omega(t, u_0)$ положительна в среднем и решения уравнения $u^{\cdot} = r(t, u)$ ограничены на R_+;

3) для любых постоянных α, $\alpha_1 > 0$ и непрерывной функции ξ: $R_+ \to R^k$ из неравенства $V(t, \xi(t)) \leqslant \alpha$ $(t \in R_+)$ вытекает, что функция

$$\int_{H(t)} [V_2^{\cdot}(s, \xi(s))]_+ ds, \quad H(t) = \{s\colon 0 \leqslant s < t, \quad V_1(s, \xi(s)) \geqslant \alpha_1\}$$

равномерно непрерывна на R_+. Тогда для всякого решения $x(t)$ уравнения (1.1), определенного при всех $t \geqslant t_0$

$$V_1(t, x(t)) \to 0,\ V_2(t, x(t)) \to \text{const} \quad (t \to \infty)$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — какое-нибудь решение уравнения (1.1), определенное на $[t_0, \infty)$, и пусть $u(t)$ — верхнее решение задачи $u^{\cdot} = r(t, u)$, $u(t_0) = V(t_0, x(t_0))$.

Функция $u(t)$ не убывает и ограничена, поэтому она имеет конечный предел u_∞ при $t \to \infty$. Введем обозначения

$$v_1(t) = V_1(t, x(t)), \quad v_2(t) = V_2(t, x(t))$$
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t), \quad w(t) = v(t) + u_\infty - u(t)$$

В силу условия 2) функция $v(t)$ удовлетворяет неравенству $v^\cdot \leqslant r(t, v)$ на интервале (t_0, ∞), поэтому по основной теореме сравнения [10]

$$w^\cdot(t) \leqslant -\omega(t, v_1(t)) \leqslant 0 \quad (t \geqslant t_0) \tag{1.2}$$

Итак, функция $w(t)$ неотрицательна и не возрастает, поэтому она имеет конечный предел при $t \to \infty$.

Осталось доказать, что $v_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Допустим противное, т. е. пусть

$$\limsup_{t\to\infty} v_1(t) > 0 \tag{1.3}$$

Интегрируя соотношение (1.2) на $[t_0, \infty)$, получаем неравенство

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t, v_1(t))\, dt \leqslant w(t_0) - \lim_{t\to\infty} w(t) < \infty \tag{1.4}$$

Функция $\omega(t, u)$ неубывающая относительно u и положительная в среднем при фиксированных значениях u, поэтому из (1.4) следует, что

$$\liminf_{t\to\infty} v_1(t) = 0$$

Это вместе с неравенством (1.3) влечет за собой существование такого числа $\gamma > 0$, что для любого $T \geqslant t_0$ найдутся числа $A = A(T)$, $B = B(T)$ $(T < A < B)$, удовлетворяющие соотношениям $v_1(A) = 2\gamma/3$, $v_1(B) = \gamma/3$, $\gamma/3 \leqslant v_1(t) \leqslant 2\gamma/3$ для $t \in [A(T), B(T)]$.

В силу неравенства (1.2) имеем

$$w(B) - w(A) \leqslant -\int_A^B \omega(t, \gamma/3)\, dt$$

Так как функция $\omega(t, \gamma/3)$ положительна в среднем, то

$$\lim_{T\to\infty} (B(T) - A(T)) = 0 \tag{1.5}$$

С другой стороны, сумма $v_1(t) + v_2(t)$ имеет конечный предел при $t \to \infty$, следовательно, существует $T_0 > 0$, такое, что из $T > T_0$ следует $v_2(B(T)) - v_2(A(T)) > \gamma/6$. Однако тогда

$$\frac{\gamma}{6} \leqslant \int_{A(T)}^{B(T)} [v_2^\cdot(t)]_+\, dt \tag{1.6}$$

а это неравенство (учитываем соотношение (1.5)) находится в противоречии с условием 3). Действительно, в силу условия 3) для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $0 < B(T) - A(T) < \delta$ следует неравенство

$$0 \leqslant \int_A^B [v_2^\cdot(t)]_+\, dt = \int_A^B [V_2^\cdot(t, x(t))]_+\, dt < \varepsilon \tag{1.7}$$

которое противоречит (1.5), (1.6). Теорема доказана.

Пусть $x = (y, z)$— разбиение, при котором $y \in R^m$, $z \in R^n$ $(0 < m \leqslant k$, $n = k - m)$, и допустим, что $0 \in G$. Применяя доказанную теорему для нахождения условия асимптотической y-устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), получаем

Следствие 1.1. Предположим, что все условия теоремы 1.1 выполнены, причем $V_2(t, x) \geqslant 0$, функция $V_1(t, y, z)$ y-определенно положительна и нулевое решение уравнения $u^{\cdot} = r(t, u)$ устойчиво. Тогда нулевое решение уравнения (1.1) асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Так как $V^{\cdot}(t, x) \leqslant r(t, V(t, x))$ и функция Ляпунова $V(t, x)$ y-определенно положительна, то нулевое решение уравнения (1.1) y-устойчиво [9]. Отсюда при помощи теоремы 1.1 получаем требуемое утверждение.

Замечание 1.1. Ради простоты в теорему 1.1 включен не самый строгий вариант условия 3). Можно было бы дополнительно предположить, что функция $\xi(t)$ обладает еще и свойством

$$(1.8) \qquad \int_0^{\infty} \omega(t, V_1(t, \xi(t)))\, dt < \infty$$

(см. (1.4)).

Теорема 1.1 остается справедливой и после замены условия 3) следующим условием:

3′) Пусть для любых постоянных $\varepsilon, \alpha, \alpha_1 > 0$ и непрерывной функции ξ: $R_+ \to R^k$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sup_{t \in R_+} V(t, \xi(t)) \leqslant \alpha, \quad \int_0^{\infty} \omega(t, V_1(t, \xi(t)))\, dt < \infty$$

существует $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha, \alpha_1, \xi) > 0$, такое, что из условия

$$A \leqslant B < A + \delta, \quad \min_{t \in [A, B]} V_1(t, \xi(t)) \geqslant \alpha_1$$

следует

$$\int_A^B [V_2^{\cdot}(t, \xi(t))]_+\, dt < \varepsilon$$

В самом деле, условие 3) было использовано только для вывода оценки (1.7), а для этого достаточно потребовать выполнения 3′).

Ниже продемонстрировано, что это условие теоремы имеет практическое значение.

Замечание 1.2. Анализ доказательства теоремы 1.1 показывает также, что в условии 3) достаточно потребовать равномерную непрерывность функции $\int_{H(t)} [V_2^{\cdot}(s, \xi(s))]_- ds$ на R_+, или функции $V_2(t, \xi(t))$ на множестве $H(\infty)$.

2. Рассмотрим голономную склерономную механическую систему под действием потенциальных, диссипативных и гироскопических сил

$$(2.1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \pi}{\partial q} + Q + e(t), \quad q \in \Omega$$

$$T = T(q, q^{\cdot}) = \frac{1}{2}(q^{\cdot})^T A(q) q^{\cdot}$$

где $\Omega \subset R^r$ — некоторое открытое связное множество, T — кинетическая энергия (здесь и в дальнейшем x^T означает транспонированный вектор-столбец $x \in R^r$), $\pi = \pi(t, q)$ — потенциальная энергия ($\pi(t, 0) \equiv 0$), $Q = Q(t, q, q^{\cdot})$ — равнодействующая гироскопических и диссипативных сил, т. е. $Q^T(t, q, q^{\cdot})\, q^{\cdot} \leqslant 0$ при всех $t \in R_+$, $q \in \Omega$, $q^{\cdot} \in R^r$.

Допустим, что все функции в (2.1) достаточно гладкие и все движения с достаточно малыми начальными значениями $\| q_0 \|$, $\| q_0^{\cdot} \|$ определены для всех значений $t \geqslant t_0$. Изучим асимптотическое поведение обобщенных скоростей $q^\cdot$.

Для стационарного случая $\pi = \pi(q)$, $Q = Q(q, q^\cdot)$, $e(t) \equiv 0$ доказано [3], что если диссипация полна и нет потенциальной силы ($\pi(q) \equiv 0$), то положение равновесия $q = q^\cdot = 0$ асимптотически устойчиво относительно скоростей. Опыт подсказывает, что это верно и при $\pi(q) \geqslant 0$, если движения ограничены. Ниже при помощи теоремы 1.1 это будет доказано. Кроме того, будем заниматься обобщением теоремы В. В. Румянцева [3] на нестационарный случай. Во всех прежних ее обобщениях [4, 5, 8] авторы требовали, чтобы величина $\| Q(t, q, q^\cdot) \|$ как функция t была ограничена в том или ином смысле. Это условие кажется неестественным, поскольку с увеличением диссипации скорость уменьшается. Применяя результаты п. 1, получаем теорему об асимптотической $q^\cdot$-устойчивости и в нестационарном случае, не содержащую никакого требования ограниченности $\| Q(t, q, q^\cdot) \|$.

Введем обозначения

$$E_h(t) = \{q \in \Omega\colon \pi(t, q) < h\}, \quad E_h^* = \{(t, q) \in R^{r+1}\colon t \in R_+,\ q \in E_h(t)\}$$

Теорема 2.1. Допустим, что при произвольном фиксированном значении $h > 0$ выполнены следующие условия для всех $(t, q, q^\cdot) \in E_h^* \times R^r$:

а) $T(q, q^\cdot) \geqslant c \| q^\cdot \|^2$ $(0 < c = c(h) = \mathrm{const})$

б) $Q^T(t, q, q^\cdot)\, q^\cdot \leqslant -\varphi(t)\, b(T(q, q^\cdot))$

где φ, b: $R_+ \to R_+$ — непрерывные функции, φ — положительная в среднем функция, b — строго возрастающая функция и $b(0) = 0$;

в) $\pi(t, q) \geqslant 0$

г) $[\partial\pi(t, q)/\partial t]_+ \leqslant r(t, \pi(t, q))$

где функция $r(t, u)$ непрерывна, возрастает по u;

д) решения уравнения

$$u^\cdot = | e(t) |\, c^{-1/2} u^{1/2} + r(t, u) \tag{2.2}$$

с достаточно малыми начальными значениями ограничены;

е) функция $\| \partial\pi(t, q)/\partial q \|$ ограничена на множестве E_h^*.

Тогда для всякого движения $q(t)$ с достаточно малыми начальными значениями имеем $q^\cdot(t) \to 0$, $\pi(t, q(t)) \to \mathrm{const}$ $(t \to \infty)$.

Доказательство. Пусть $V_1 = T$, $V_2 = \pi$, $V = V_1 + V_2$. Тогда

$$V^\cdot(t, q, q^\cdot) = \partial\pi/\partial t + Q^T q^\cdot + e(t)\, q^\cdot \leqslant$$
$$\leqslant -\varphi(t)\, b(V_1(q, q^\cdot)) + | e(t) |\, c^{-1/2} V^{1/2} + r(t, V)$$

Пусть теперь $u(t) = u(t; t_0, u_0)$ — такое решение уравнения (2.2), что $u_0 > 0$, $u(t) \leqslant h = \mathrm{const}$ при $t \geqslant t_0$, и пусть $q = q(t)$ — движение системы (2.1) с начальными значениями q_0, $q_0^\cdot$, удовлетворяющими неравенству

$$V(t_0, q_0, q_0^\cdot) = T(q_0, q_0^\cdot) + \pi(t_0, q_0) < u_0$$

По теореме сравнения [10]

$$\pi(t, q(t)) \leqslant V(t, q(t), q^\cdot(t)) \leqslant u(t) \leqslant h \quad (t \geqslant t_0)$$

Применим теперь теорему 1.1. Условия 1), 2), очевидно, выполняются, осталось проверить выполнение условия 3) для $\xi(t) = (q(t), q^\cdot(t))^T$. В силу условий теоремы справедлива оценка

$$[\pi^\cdot(t, q)]_+ \leqslant [\partial\pi/\partial t]_+ + \| \partial\pi/\partial q \| \, \| q^\cdot \| \leqslant \tag{2.3}$$
$$\leqslant r(t, u(t)) + \mathrm{const}\, (h/c)^{1/2}$$

и, следовательно

$$\int\limits_A^B [\pi^{\cdot}(t, q(t))]_+ dt \leqslant u(B) - u(A) + \mathrm{const}\,(B - A) \to 0, \quad (B - A) \to 0$$

Отсюда с учетом того, что $u(t) \to u_\infty < \infty$, непосредственно получаем условие 3). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай потенциальной энергии $\pi = \pi(q)$, не зависящей от времени t, и будем исследовать только ограниченные движения. (Так как $\pi(q(t))$ имеет конечный предел, то для ограниченности всех движений достаточно выполнения условия $\pi(q) \to \infty$ ($\|q\| \to \infty$).) Множество $E_h{}^*$ теперь можно заменить множеством $R_+ \times K$, где $K \subset R^r$ — компакт, и поскольку условия а), г) — е), очевидно, выполняются, получаем

Следствие 2.1. Допустим, что в системе (2.1) потенциальная энергия не зависит от времени и неотрицательна в окрестности положения равновесия $q = 0$. Допустим далее, что диссипация полна в среднем, т. е. для всякого компакта $K \subset R^r$ существуют непрерывные функции φ, a: $R_+ \to R_+$, такие, что φ положительна в среднем, функция a строго возрастает, $a(0) = 0$ и $Q^T(t, q, q^{\cdot})\, q^{\cdot} \leqslant -\varphi(t)\, a(\|q^{\cdot}\|)$ на множестве $R_+ \times K \times R^r$.

Тогда для всякого ограниченного движения $q(t)$ системы (2.1) справедливы соотношения $q^{\cdot}(t) \to 0$, $\pi(q(t)) \to \mathrm{const}$ $(t \to \infty)$.

Следствие 2.2. Допустим, что $\pi(q) \geqslant 0$ и всякое движение системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T(q, q^{\cdot})}{\partial q^{\cdot}} - \frac{\partial T(q, q^{\cdot})}{\partial q} = -\frac{\partial \pi(q)}{\partial q} + Q(t, q, q^{\cdot}) \tag{2.4}$$

с достаточно малыми начальными значениями ограничено на R_+. Допустим далее, что диссипация полна в среднем (см. следствие 2.1).

Тогда положение равновесия $q = q^{\cdot} = 0$ асимптотически $q^{\cdot}$-устойчиво.

Сформулируем теперь одно следствие теоремы 2.1 для уравнения (2.4), не требующее ограниченности движений.

Введем обозначение $E_h = \{q \in \Omega:\ \pi(q) \leqslant h\}$.

Следствие 2.3. Допустим, что при произвольном фиксированном значении $h > 0$ выполнены следующие условия:

а) существуют такие положительные постоянные $c_1 = c_1(h)$, $c_2 = c_2(h)$, что $c_1\|q^{\cdot}\|^2 \leqslant T(q, q^{\cdot}) \leqslant c_2\|q^{\cdot}\|^2$ $(q \in E_h,\ q^{\cdot} \in R^r)$;

б) диссипация полна, т. е. существует такая непрерывная, строго возрастающая функция $a(r)$, что $a(0) = 0$ и $Q^T(t, q, q^{\cdot})\, q^{\cdot} \leqslant -a(\|q^{\cdot}\|)$ $((t, q, q^{\cdot}) \in R_+ \times E_h \times R^r)$;

в) $\pi(q) \geqslant 0$;

г) функция $\mathrm{grad}\,\pi(q)$ ограничена на множестве E_h.

Тогда положение равновесия $q = q^{\cdot} = 0$ системы (2.4) асимптотически $q^{\cdot}$-устойчиво.

Пользуясь замечанием 1.1, можно распространить теорему 2.1 на случай, когда функция $\partial\pi(t, q)/\partial q$ неограничена на множестве $E_h{}^*$. Дело в том, что условие е) в теореме 2.1 может быть заменено следующим:

е′) для всякого $h > 0$ функция

$$\int\limits_t^{t+1} \frac{1}{\varphi(s)} \max\left\{\left\|\frac{\partial\pi(q, s)}{\partial q}\right\|^2 : q \in E_h(s)\right\} ds$$

ограничена на R_+.

В самом деле, доказательство теоремы 2.1 приходится модифицировать лишь в самом конце, а именно надо показать, что (вместо условия 3)) условие 3′) выполнено для $\xi(t) = (q(t), q^{\boldsymbol{\cdot}}(t))^T$.

Известно, что $\sup\limits_{t \geqslant t_0} V(t, q(t), q^{\boldsymbol{\cdot}}(t)) \leqslant h$

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\, b(V_1(q(t), q^{\boldsymbol{\cdot}}(t)))\, dt < \infty \tag{2.5}$$

Допустим, что $V_1(q(t), q^{\boldsymbol{\cdot}}(t)) \geqslant \alpha_1 > 0$ на отрезке $[A, B]$ $(A < B < A + 1)$. Из оценки

$$[\pi^{\boldsymbol{\cdot}}(t, q(t))]_+ \leqslant [\partial\pi(t, q(t))/\partial t]_+ + |(\partial\pi(t, q(t))/\partial q)^T q^{\boldsymbol{\cdot}}| \leqslant$$
$$\leqslant r(t, u(t)) + \max\{\|\partial\pi(t, q)/\partial q\| : q \in E_h(t)\} \times$$
$$\times (h/c)^{1/2}\varphi^{-1/2}(t)\,[\varphi(t)\, b(T(q, (t), q^{\boldsymbol{\cdot}}(t)))]^{1/2}$$

используя неравенство Гельдера и условие е′), получаем неравенство

$$\int\limits_A^B [V_2^{\boldsymbol{\cdot}}(t, q(t), q^{\boldsymbol{\cdot}}(t))]_+\, dt \leqslant u(B) - u(A) +$$
$$+ \text{const} \int\limits_A^B \varphi(t)\, b(V_1(q(t), q^{\boldsymbol{\cdot}}(t)))\, dt$$

В силу (2.5) и соотношения $u(t) \uparrow u_\infty < \infty$ правая сторона последней оценки произвольно мала, если величина $B - A$ достаточно мала, что дает условие 3′).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4, с. 9—16.
3. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по части переменных.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 138—143.
4. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 5, с. 885—895.
5. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 4, с. 659—665.
6. *Тереки Й., Хатвани Л.* О частичной устойчивости и сходимости движений.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 428—435.
7. *Тереки Й., Хатвани Л.* Об асимптотическом останавливании при наличии вязкого трения.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 1, с. 20—26.
8. *Hatvani L.* A generalization of the Barbashin—Krasovskij theorems to the partial stability in non-autonomous systems.— Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, 30. Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged, Hungary, 1979, p. 381.
9. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 364—384.
10. *Матросов В. М.* Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. I—IV.— Дифференц. уравнения, 1968, т. 4, вып. 8, с. 1374—1386; 1968, т. 4, вып. 10, с. 1739—1752; 1969, т. 5, вып. 7, с. 1171—1185; 1969, т. 5, вып. 12, с. 2129—2143.

Венгрия

Поступила в редакцию
16.XI.1984