Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 531.36

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.

Получены достаточные условия знакоопределенности суммы полилинейных форм. Из этих сумм формируются функции Ляпунова, которые используются для вывода достаточных условий асимптотической устойчивости в целом невозмущенного движения нелинейных систем. При этом возмущенные движения описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с правой частью в виде суммы однородных многочленов. Рассматривается приложение к исследованию устойчивости движения крылатых летательных аппаратов.

1. Вначале получим условия знакоопределенности суммы форм

$$F(\mathrm{x}) = \sum_{s=2k}^{2m} X^{(s)}(\mathrm{x}, A_{i_1\ldots i_s}), \quad \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \tag{1.1}$$

где

$$X^{(s)}(\mathrm{x}, A_{i_1\ldots i_s}) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_s=i_{s-1}}^{n} A_{i_1\ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s} \tag{1.2}$$
$$(1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_s \leqslant n)$$

— полилинейная форма степени $s = 2k, 2k+1, \ldots, 2m$; $A_{i_1\ldots i_s}$ — вещественные числа, k, m, s, n — целые положительные числа ($k \leqslant m$). Подобные члены формы (1.2) приведены. В форме (1.2) члены упорядочены лексикографически.

В сумме форм (1.1) формы следуют одна за другой в порядке возрастания либо убывания степеней этих форм. Однако в любом случае степень первой и последней форм в этой сумме (1.1) четна, т. е. $2k$ и $2m$. Такие функции (1.1) будем называть суммами форм, окаймленными формами четной степени.

Требуется найти условия, связывающие коэффициенты $A_{i_1\ldots i_s}$, при которых сумма форм (1.1) будет положительно-определенной:

$$F(\mathrm{x}) > 0, \ \forall \mathrm{x} \neq 0; \quad F(0) = 0 \tag{1.3}$$

Для решения задачи введем отображение

$$y_1 = x_1^m, \quad y_2 = x_1^{m-1}x_2, \quad y_3 = x_1^{m-1}x_3, \ldots, \quad y_n = x_1^{m-1}x_n \tag{1.4}$$
$$y_{n+1} = x_1^{m-2}x_2^2, \quad y_{n+2} = x_1^{m-2}x_2x_3, \quad y_{n+3} = x_1^{m-2}x_2x_4, \ldots$$
$$\ldots, y_j = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r}, \ldots, y_{N-1} = x_{n-1}x_n^{k-1}, \quad y_N = x_n^k$$
$$j = 1, \ldots, N; \quad i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n; \quad i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r,$$
$$j \rightleftarrows i_1 \ldots i_r, \quad m \geqslant r \geqslant k$$

Последовательность значений, принимаемых индексом j, и соответствующих значений, принимаемых групповым индексом $i_1 i_2 \ldots i_r$, строго алгоритмизирована. Вначале значения индекса j нарастают от 1 до N_r для $r = m$, при котором групповой индекс $i_1 i_2 \ldots i_r$ изменяется, начиная с $\underbrace{11\ldots11}_{m}$, по лексикографически упорядоченной последовательности.

Потом процесс нарастания индекса j продолжается для $r = m - 1$ и т. д. до $r = k$. Таким образом, между индексом j и групповым индексом $i_1 i_2 \ldots$ $\ldots i_r$ существует взаимно однозначное соответствие:

$$
\begin{gathered}
1 \rightleftarrows \underbrace{11\ldots 1}_{m}1, \quad 2 \rightleftarrows \underbrace{11\ldots 1}_{m-1}2, \quad 3 \rightleftarrows \underbrace{11\ldots 1}_{m-1}3, \ldots, \quad n \rightleftarrows \underbrace{11\ldots 1}_{m-1}n \\
n+1 \rightleftarrows \underbrace{11\ldots 1}_{m-2}22, \quad n+2 \rightleftarrows \underbrace{11\ldots 1}_{}23, \\
N-1 \rightleftarrows (n-1)\underbrace{n\ldots nn}_{k-1}, \quad N \rightleftarrows \underbrace{nn\ldots nn}_{k}
\end{gathered}
$$

Общее число N функций y_j, входящих в отображение (1.4), вычисляется по формуле [1]

$$
(1.5) \qquad N = \sum_{r=k}^{m} N_r, \quad N_r = C_{n+r-1}^{r}
$$

где N_r — число членов формы степени r, C_{n+r+1}^{r} — число сочетаний из $n + r - 1$ по r.

Обозначим $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ и используем сокращенную запись отображения (1.4): $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$. Известно, что векторы $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ образуют линейное пространство R^N [2]. Введем квадратичную форму в пространстве

$$
(1.6) \qquad P(\mathbf{y}) = \sum_{j_1=1}^{N} \sum_{j_2=1}^{N} B_{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2}, \quad B_{j_1 j_2} = B_{j_2 j_1}
$$

Подставим в функцию (1.6) значения $y_1, \ldots, y_N$ (1.4) и приведем подобные члены. Чтобы не потерять при этом связь между индексами j_1, j_2 и групповыми индексами $i_1, \ldots i_r$, $i_{r+1} \ldots i_s$ соответственно, будем обозначать коэффициенты $B_{j_1 j_2}$ еще следующим образом:

$$
(1.7) \qquad
\begin{gathered}
B_{j_1 j_2} = B^{*}_{i_1 \ldots i_r,\, i_{r+1} \ldots i_s} \\
j_1, j_2 = 1, \ldots, N; \quad i_1, \ldots, i_s = 1, \ldots, n; \quad j_1 \rightleftarrows i_1 \ldots i_r, \\
j_2 \rightleftarrows i_{r+1} \ldots i_s
\end{gathered}
$$

причем индексы i_r и i_{r+1} не связаны неравенствами, как это имеет место для индексов:

$$
(1.8) \qquad i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_r, \quad i_{r+1} \leqslant i_{r+2} \leqslant \ldots \leqslant i_s
$$

Тождественно приравнивая правые части полученного выражения $P(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ (1.6) и $F(\mathbf{x})$ (1.1), получим с учетом обозначений (1.7) связь между коэффициентами функций (1.1) и (1.6) в виде

$$
(1.9) \qquad
\begin{gathered}
A_{i_1 \ldots i_s} = (2 - \delta_{j_1 j_2}) \sum_{r=k}^{m} \sum{}^{*} B_{j_1 j_2} = (2 - \delta_{j_1 j_2}) \sum_{r=k}^{m} \sum{}^{*} B^{*}_{i_1 \ldots i_r,\, i_{r+1} \ldots i_s} \\
j_1, \; j_2 = 1, \ldots, N; \; i_1, \ldots, i_s = 1, \ldots, n; \; s = 2k, \\
2k+1, \ldots, 2m
\end{gathered}
$$

где $\delta_{j_1 j_2}$ — символ Кронекера, Σ^* — символ суммирования по тем перестановкам целочисленных значений индексов $i_1, \ldots, i_s$, для которых выполняются условия (1.8).

При составлении конкретных уравнений (1.9) практически удобно сначала задаваться значениями индексов $i_1, \ldots, i_s$ и далее, осуществляя перестановки целочисленных значений индексов $i_1, \ldots, i_s$ при сохранении условий (1.8), выписать подобные члены с $B_{j_1 j_2}$ ($j_1 \rightleftarrows i_1 \ldots i_r$, $j_2 \rightleftarrows i_{r+1} \ldots$ $\ldots i_s$), соответствующие коэффициенту $A_{i_1 \ldots i_s}$.

Таким образом, при выполнении равенств (1.4) и (1.9) $\forall \mathbf{x} \in R^n$, $\exists \mathbf{y} \in G_y^*$, такие, что

$$F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{y}(\mathbf{x})) \tag{1.10}$$

где G_y^* — область значений отображения (1.4) в R^N ($G_y^* \subset R^N$), причем точка $\mathbf{y} = 0 \in G_y^*$. Следовательно, выполняется свойство А [3] для $F(\mathbf{x})$ (1.1), $P(\mathbf{y})$ (1.6) и отображения (1.4). При этом выполняется и свойство Б [3], т. е. $\forall x_j \neq 0$, $\exists y_i = x_j^r \neq 0$, $r = k, k+1, \ldots, m$.

При выполнении свойств А и Б для положительной определенности (ПО) суммы форм $F(\mathbf{x})$ (1.1) согласно теореме 1 [3] достаточно, чтобы была положительно-определенной квадратичная форма (КФ) $P(\mathbf{y})$ (1.6). Записывая критерий ПО КФ $P(\mathbf{y})$ (1.6) и выражая коэффициенты $B_{j_1j_2}$ через коэффициенты $A_{i_1\ldots i_s}$ из уравнений (1.9), получим условия знакоопределенности суммы форм (1.1). В частности, можно использовать критерий Сильвестра [4] или критерий, полученный в работе [3], который имеет рекуррентную форму и прост в вычислительном отношении.

2. Найдем условия ПО суммы форм с постоянными вещественными коэффициентами

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = {} & A_{1111}x_1^4 + A_{1112}x_1^3x_2 + A_{1122}x_1^2x_2^2 + A_{1222}x_1x_2^3 + \\ & + A_{2222}x_2^4 + A_{111}x_1^3 + A_{112}x_1^2x_2 + A_{122}x_1x_2^2 + A_{222}x_2^3 + \\ & + A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отображение (1.4) имеет вид

$$\begin{gathered} y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_1x_2,\ y_3 = x_2^2,\ y_4 = x_1,\ y_5 = x_2 \\ r = 1, 2;\ N_1 = 2,\ N_2 = 3,\ N = N_1 + N_2 = 5 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Запишем КФ в пространстве векторов $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_5)$

$$P(\mathbf{y}) = \sum_{j_1=1}^{5}\sum_{j_2=1}^{5} B_{j_1j_2}y_{j_1}y_{j_2}, \quad B_{j_1j_2} = B_{j_2j_1} \tag{2.3}$$

Подставим в функцию (2.3) значения $y_1, \ldots, y_5$ (2.2) и приведем подобные члены. Тождественно приравнивая правые части полученного выражения $P(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ (2.3) и заданной функции (2.1), получим уравнения вида (1.9). Решая их, находим коэффициенты КФ (2.3)

$$\begin{aligned} & B_{11} = A_{1111}, \quad B_{12} = \frac{1}{2}A_{1112}, \quad B_{22} = A_{1122} - 2B_{13}, \\ & B_{23} = \frac{1}{2}A_{1222} \\ & B_{33} = A_{2222}, \quad B_{14} = \frac{1}{2}A_{111}, \quad B_{24} = \frac{1}{2}A_{112} - B_{15}, \\ & B_{25} = \frac{1}{2}A_{122} - B_{34} \\ & B_{35} = \frac{1}{2}A_{222}, \quad B_{44} = A_{11}, \quad B_{45} = \frac{1}{2}A_{12}, \quad B_{55} = A_{22} \end{aligned} \tag{2.4}$$

где вещественные значения B_{13}, B_{15}, B_{34} являются свободными и используются для обеспечения ПО КФ (2.3).

Для ПО КФ (2.3) согласно критерию работы [3] необходимо и достаточно, чтобы нашлись вещественные числа

$$\begin{gathered} b_{ij} = \frac{1}{b_{ii}}\left(B_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}b_{kj}\right) \\ i = 1, \ldots, 5; \quad j = i, i+1, \ldots, 5;\ 1 \leqslant k < i \end{gathered} \tag{2.5}$$

удовлетворяющие условию

$$(2.6)\qquad b_{ii} \neq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, 5$$

Подставляя значения B_{ij} (2.4) в рекуррентную формулу (2.5), получим достаточные условия ПО суммы форм (2.1) в виде существования чисел b_{ij} (2.5), (2.6).

Учитывая, что для знакоопределенности $F(x)$ (2.1) достаточно знакоопределенности $P(y(x))$ по (x_1, x_2), покажем, что условия (2.6) можно ослабить. Действительно, если существуют числа b_{ij}, удовлетворяющие (2.5), (2.6), то КФ (2.3) положительно определена и представима в виде суммы независимых квадратов [4]

$$(2.7)\qquad P(\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{5} \Big(\sum_{j=1}^{5} b_{ij} y_j\Big)^2$$

что проверяется подстановкой b_{ij} (2.5) в КФ (2.7). Подставляя в функцию (2.7) значения $y_1, \ldots, y_5$ (2.2) и учитывая равенство (1.10), получим представление заданной суммы форм (2.1) в виде

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} F(\mathrm{x}) = {} & (b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_2^2 + b_{14}x_1 + b_{15}x_2)^2 + \\ & + (b_{22}x_1x_2 + b_{23}x_2^2 + b_{24}x_1 + b_{25}x_2)^2 + \\ & + (b_{33}x_2^2 + b_{34}x_1 + b_{35}x_2)^2 + (b_{44}x_1 + b_{45}x_2)^2 + (b_{55}x_2)^2 \end{aligned}$$

Последние два квадрата линейных форм ($r = 1$) в сумме (2.8) образуют положительно-определенную КФ по (x_1, x_2) и обеспечивают ПО функции $F(\mathrm{x})$ (2.8) при условии

$$(2.9)\qquad b_{44} \neq 0, \quad b_{55} \neq 0$$

что является ослаблением условий (2.6).

Таким образом, для ПО заданной суммы форм $F(\mathrm{x})$ (2.1) достаточно, чтобы КФ $P(\mathrm{y})$ (2.7) была неотрицательной по $y_1, \ldots, y_5$ и положительно-определенной по переменным $y_4 = x_1$, $y_5 = x_2$ (2.2), которые соответствуют КФ (форме степени $2r$ при $r = 1$) в функции $F(\mathrm{x})$ (2.1).

С другой стороны, изменяя нумерацию переменных отображения (2.2) следующим образом:

$$(2.10)\qquad y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_1^2,\ y_4 = x_1x_2,\ y_5 = x_2^2$$

и подставляя $y_1, \ldots, y_5$ (2.10) в (2.7), получим с учетом равенства (1.10)

$$(2.11)\qquad \begin{aligned} F(x) = {} & (b_{11}'x_1 + b_{12}'x_2 + b_{13}'x_1^2 + b_{14}'x_1x_2 + b_{15}'x_2^2)^2 + \\ & + (b_{22}'x_2 + b_{23}'x_1^2 + b_{24}'x_1x_2 + b_{25}'x_2^2)^2 + \\ & + (b_{33}'x_1^2 + b_{34}'x_1x_2 + b_{35}'x_2^2)^2 + (b_{44}'x_1x_2 + b_{45}'x_2^2)^2 + \\ & + (b_{55}'x_2^2)^2 \end{aligned}$$

Последние три квадрата КФ ($r = 2$) в сумме (2.11) образуют положительно-определенную форму четвертой степени при условии

$$(2.12)\qquad b_{33}' \neq 0, \quad b_{44}' \neq 0, \quad b_{55}' \neq 0$$

и обеспечивают ПО функции $F(\mathrm{x})$ (2.11) [3]. Условия (2.12) менее жесткие, нежели условия (2.6).

Таким образом, для ПО заданной суммы форм $F(\mathrm{x})$ (2.1) достаточно, чтобы КФ $P(\mathrm{y})$ (2.7) была неотрицательной по переменным $y_1, \ldots, y_5$ и положительно-определенной по переменным $y_3 = x_1^2$, $y_4 = x_1x_2$, $y_5 = x_2^2$ (2.10), которые соответствуют форме четвертой степени (степени $2r$ при $r = 2$) в функции $F(\mathrm{x})$ (2.1).

3. Обобщая заключение п. 2, докажем теорему о знакоопределенности суммы форм F (x) (1.1). Получим также рекуррентную форму критерия знакоопределенности КФ P (y) (1.5) по части переменных [5], т. е. необходимое и достаточное условие того, чтобы КФ P (y) (1.6) была знакопостоянной по всем переменным $y_1, \ldots, y_N$ и знакоопределенной ровно по N_r переменным $y_{N-N_r+1}, \ldots, y_N$. Отметим, что N_r равно числу тех переменных КФ P (y) (1.6), которым согласно равенству (1.10) соответствует форма степени $2r$ в заданной сумме форм F (x) (1.1), где $r \in \{k, k+1, \ldots, m\}$.

Теорема 1. Для ПО суммы форм F (x) (1.1), окаймленной формами четной степени $2k$ и $2m$ ($k \leqslant m$), достаточно, чтобы при отображении (1.4) и равенстве (1.10) КФ P (y) (1.6) была неотрицательной по переменным $y_1, \ldots, y_N$ и положительно-определенной по N_r переменным $y_{N-N_r+1}, \ldots, y_N$, где r принимает некоторое значение из множества $\{k, k+1, \ldots, m\}$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, т. е. КФ P (y) $\geqslant 0$ и положительно определена по N_r переменным y_j, которые выбраны последними $j = N - N_r + 1, \ldots, N$. Тогда одним из известных методов [4] КФ P (y) (1.6) преобразуем в следующую сумму квадратов:

$$P(\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{N-N_r} \Big(\sum_{j=1}^{N} b_{ij} y_j\Big)^2 + \sum_{i=N-N_r+1}^{N} \Big(\sum_{j=i}^{N} b_{ij} y_j\Big)^2 \tag{3.1}$$

$$b_{ii} \neq 0, \quad \forall i = N - N_r + 1, \ldots, N; \ r \in \{k, k+1, \ldots, m\} \tag{3.2}$$

Подставляя в функцию (3.1) значения $y_1, \ldots, y_N$ (1.4) и учитывая равенство (1.10), получим представление заданной суммы форм (1.1) в виде неотрицательной части и положительно-определенной формы степени $2r$ [3]. Теорема доказана.

Теорема 2. Для неотрицательности КФ P (y) (1.6) с постоянными вещественными коэффициентами $B_{j_1 j_2}$ ($j_1, j_2 = 1, \ldots, N$) по N переменным $y_1, \ldots, y_N$ и ее ПО ровно по N_r переменным $y_{N-N_r+1}, \ldots, y_N$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись вещественные числа b_{ij}, которые определяются через коэффициенты $B_{j_1 j_2}$ по рекуррентной формуле

$$b_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \Big(B_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki} b_{kj}\Big) \tag{3.3}$$

$$i = 1, N - N_r + 1, N - N_r + 2, \ldots, N; \ j = i, i+1, \ldots, N; \ 1 \leqslant k < i$$

при условии

$$b_{ii} \neq 0, \ \forall i = N - N_r + 1, \ldots, N \tag{3.4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть дана неотрицательная по N переменным $y_1, \ldots, y_N$ и положительно-определенная по N_r переменным $y_{N-N_r+1}, \ldots, y_N$ КФ P (y) (1.6). Одним из известных методов [4] преобразуем ее к сумме квадратов (3.1) при условии (3.2). В представлении (3.1) числа b_{1j} ($j = 1, \ldots, N$) можно подобрать такими, чтобы выполнялись равенства

$$b_{ij} = 0, \ \forall i = 2, 3, \ldots, N - N_r; \ j = 1, \ldots, N$$

Действительно, в матрице

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,\,N-N_r+1} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,\,N-N_r+1} & \dots & b_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N-N_r,\,1} & b_{N-N_r,\,2} & \dots & b_{N-N_r,\,N-N_r+1} & \dots & b_{N-N_r,\,N} \\ 0 & 0 & \dots & b_{N-N_r+1,\,N-N_r+1} & \dots & b_{N-N_r+1,\,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{NN} \end{Vmatrix}$$

коэффициентов b_{ij} функции (3.1) первые $N - N_r$ строк линейно зависимы, так как заданная КФ P (y) знакоопределена лишь по последним N_r переменным. Поэтому элементы каждой i-й строки ($i = 2, 3, \dots, N - N_r$) отличаются на постоянный множитель α_i ($i = 2, 3, \dots, N - N_r$) от расположенных в том же столбце элементов первой строки ($i = 1$). Следовательно

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij}y_j = \alpha_i \sum_{j=1}^{N} b_{1j}y_j \quad (i = 2, 3, \dots, N - N_r)$$

В первых $N - N_r$ слагаемых суммы (3.1) вынесем α_i^2 за скобки и приведем подобные члены. Получим

$$P(\mathrm{y}) = \Big(\sum_{j=1}^{N} b_{1j}'y_j\Big)^2 + \sum_{i=N-N_r+1}^{N} \Big(\sum_{j=i}^{N} b_{ij}y_j\Big)^2 \tag{3.5}$$

$$b_{1j}' = b_{1j}\Big(\sum_{i=1}^{N-N_r} \alpha_i^2\Big)^{1/2}, \quad \alpha_1 = 1; \quad j = 1, \dots, N$$

Приравнивая КФ (1.6) и (3.5) и сравнивая коэффициенты при одинаковых членах, получим с точностью до обозначений рекуррентную формулу (3.3) при условии (3.4).

Достаточность. Пусть существуют числа b_{ij}, указанные в теореме 2. Тогда заданная КФ представима в виде (3.5) при условии (3.4), откуда следует неотрицательность КФ P (y) по N переменным $y_1, \dots, y_N$ и положительная определенность ровно по N_r переменным $y_{N-N_r+1}, \dots, y_N$. Теорема 2 доказана.

4. Применим полученный результат к выводу достаточных условий асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с правой частью в виде суммы однородных многочленов

$$\frac{dx_\beta}{dt} = \sum_{s=2h-1}^{2l-1} X_\beta^{(s)}(\mathrm{x}, a_{\beta i_1 \dots i_s}), \quad \beta = 1, \dots, n; \quad \mathrm{x} \in R^n \tag{4.1}$$

Здесь $X_\beta^{(s)}$ (x, $a_{\beta i_1 \dots i_s}$) — полилинейная форма степени s вида (1.2) с постоянными вещественными коэффициентами, $a_{\beta i_1 \dots i_s}$ ($i_1, \dots, i_s = 1, \dots, n$) — целые положительные числа ($1 \leqslant h < l$). В формах правой части уравнений (4.1) подобные члены приведены и расположены в лексикографическом порядке.

Для решения задачи используем второй метод Ляпунова и, в частности, теорему Барбашина — Красовского об асимптотической устойчивости в целом [6]. Функцию Ляпунова будем искать во множестве отрицательно-определенных функций

$$v(\mathrm{x}) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\Big(\sum_{r=k}^{m} X_\alpha^{(r)}(\mathrm{x}, c_{\alpha i_1 \dots i_r})\Big)^2 \tag{4.2}$$

где $X_\alpha^{(r)}(\mathbf{x}, c_{\alpha i_1 \ldots i_r})$ — полилинейная форма степени r вида (1.2) с постоянными вещественными коэффициентами $c_{\alpha i_1 \ldots i_r}$ ($\alpha = 1, \ldots, N$; $i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n$), образующими верхнюю треугольную ($N \times N$)-матрицу при $k \leqslant r \leqslant m$

$$\left\| \begin{matrix} c_{11\ldots 11} & c_{11\ldots 12} & \cdots & c_{1n\ldots nn} \\ 0 & c_{21\ldots 12} & \cdots & c_{2n\ldots nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{Nn\ldots nn} \end{matrix} \right\| \tag{4.3}$$

в которой r последних диагональных коэффициентов не равны нулю, что согласно теореме 1 обеспечивает знакоопределенность функции (4.2); N — число членов суммы форм степени r, где $r = k, k+1, \ldots, m$. Число N определяется по формуле (1.5).

Функция $v(\mathbf{x})$ (4.2) представляет собой сумму форм, окаймленную формами четной степени $2k$ и $2m$. Следовательно, частная производная функции $v(\mathbf{x})$ (4.2) по координате x_β ($\beta = 1, \ldots, n$) представляет собой сумму форм, окаймленную формами нечетной степени $2k-1$ и $2m-1$. Полная производная функции $v(\mathbf{x})$ (4.2) по времени t в силу системы (4.1) имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_\beta} \frac{dx_\beta}{dt} = \sum_{p=2(h+k-1)}^{2(l+m-1)} X^{(p)}(\mathbf{x}, A_{i_1 \ldots i_p}) \tag{4.4}$$

где $X^{(p)}(\mathbf{x}, A_{i_1 \ldots i_p})$ — полилинейная форма степени p вида (1.2) с постоянными вещественными коэффициентами $A_{i_1 \ldots i_p}$, которые выражаются через коэффициенты системы (4.1) и функции (4.2) по формуле

$$A_{i_1 \ldots i_p} = -\sum_{r,s} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{n} \sum\nolimits^{*} \gamma_\beta c_{\alpha i_1 \ldots i_r} c_{\alpha i_{r+1} \ldots \beta \ldots i_{2r-1}} a_{\beta i_{2r} \ldots i_{2r+s-1}} \tag{4.5}$$

Здесь $c_{\alpha i_1 \ldots i_r}$ — коэффициент функции (4.2); $c_{\alpha i_{r+1} \ldots \beta \ldots i_{2r-1}}$ — коэффициент того слагаемого в сумме форм степени r ($r = k, k+1, \ldots, m$) функции (4.2), в котором содержится координата x_β; γ_β — степень координаты x_β в этом слагаемом, равная числу повторений индекса $i_\gamma = \beta$ ($r+1 \leqslant \gamma \leqslant 2r-1$) в коэффициенте $c_{\alpha i_{r+1} \ldots \beta \ldots i_{2r-1}}$; $a_{\beta i_{2r} \ldots i_{2r+s-1}}$ — коэффициент системы (4.1); $\sum\limits_{r,s}$ — символ суммирования по всем значениям r, s, для которых $2r + s - 1 = p$; Σ^* — символ суммирования по перестановкам целочисленных значений индексов $i_1, \ldots, i_p = 1, \ldots, n$ при сохранении условия: $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r$, $i_{r+1} \leqslant \ldots \leqslant i_{2r-1}$, $i_{2r} \leqslant \ldots \leqslant i_{2r+s-1}$ ($r = k, k+1, \ldots, m$; $s = 2h-1, 2h, \ldots, 2l-1$; $p = 2r+s-1$).

Найдем условия ПО функции dv/dt (4.4), используя теорему 1. Введем отображение

$$y_1 = x_1^{l+m-1}, \quad y_2 = x_1^{l+m-2} x_2, \ldots, \quad y_j = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_q}, \quad y_{N_0} = x_n^{h+k-1} \tag{4.6}$$
$$j = 1, \ldots, N_0;\ i_1, i_2, \ldots, i_q = 1, \ldots, n;\ l + m - 1 \geqslant q \geqslant h + k - 1$$

т. е. между индексом j и групповым индексом $i_1 i_2, \ldots i_q$ имеется взаимно однозначное соответствие. Согласно формуле (1.5)

$$N_0 = \sum_{q=h+k-1}^{l+m-1} N_q, \quad N_q = C_{n+q-1}^{q} \tag{4.7}$$

Запишем КФ в пространстве R^{N_0} векторов $y = (y_1, \ldots, y_{N_0})$

(4.8) $$P_0(y) = \sum_{j_1=1}^{N_0} \sum_{j_2=1}^{N_0} B_{j_1j_2} y_{j_1} y_{j_2}, \quad B_{j_1j_2} = B_{j_2j_1}$$

коэффициенты которой связаны с коэффициентами функции dv/dt (4.4) при помощи уравнений, аналогичных уравнениям (1.9)

(4.9) $$A_{i_1 \ldots i_p} = (2 - \delta_{j_1j_2}) \sum_{q=h+k-1}^{l+m-1} \sum{}^* B_{j_1j_2} =$$
$$= (2 - \delta_{j_1j_2}) \sum_{q=h+k-1}^{l+m-1} \sum{}^* B_{i_1 \ldots i_q,\, i_{q+1} \ldots i_p}$$
$$j_1, j_2 = 1, \ldots, N_0; \quad i_1, \ldots, i_p = 1, \ldots, n;$$
$$p = 2(h+k-1), \ldots, 2(l+m-1)$$

где Σ^* — символ суммирования по тем перестановкам целочисленных значений индексов $i_1, \ldots, i_p$, для которых выполняются условия: $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_q$, $i_{q+1} \leqslant \ldots \leqslant i_p$ $(j_1 \rightleftarrows i_1 \ldots i_q,\ j_2 \rightleftarrows i_{q+1} \ldots i_p)$.

Согласно теореме 1, для ПО суммы форм dv/dt (4.4) достаточно, чтобы КФ P_0 (y) (4.8) была неотрицательной по N_0 переменным $y_1, \ldots, y_{N_0}$ и положительно-определенной по N_q переменным $y_{N_0-N_q+1}, \ldots, y_N$ (4.6), которым соответствует форма степени $2q$ в функции dv/dt (4.4), где q принимает некоторое значение из множества $\{h + k - 1, h + k, \ldots, l + m - 1\}$.

Пусть $B_{j_1j_2}(a_{\beta i_1 \ldots i_s}, c_{\alpha i_1 \ldots i_r})$ — коэффициенты КФ (4.8), определяемые из формул (4.5) и (4.9); N_q — число переменных $y_{N_0-N_q+1}, \ldots, y_{N_0}$ в КФ P_0 (y) (4.8); числа N, N_0, N_q вычисляются по формулам (1.5), (4.7); h, l — целые положительные числа, определяемые по заданной системе (4.1). Тогда, применяя к КФ P_0 (y) (4.8) критерий знакоопределенности, доказанный в теореме 2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы дифференциальных уравнений (4.1) достаточно, чтобы нашлись такие элементы $c_{\alpha i_1 \ldots i_r}$ $(\alpha = 1, \ldots, N;\ i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n;\ k \leqslant r \leqslant m)$ вещественной неособенной $(N \times N)$-матрицы (4.3) и такие вещественные числа b_{ij}, которые определяются через коэффициенты $B_{j_1j_2}$ по рекуррентной формуле

(4.10) $$b_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \left[B_{ij}(a_{\beta i_1 \ldots i_s}, c_{\alpha i_1 \ldots i_r}) - \sum_{k_0=1}^{i-1} b_{ki} b_{kj} \right]$$
$$i = 1, \ldots, N_0;\ j = i, i+1, \ldots, N_0;\ 1 \leqslant k < i$$

при условии

(4.11) $$b_{ii} \neq 0, \quad \forall i = N_0 - N_q + 1, \quad N_0 - N_q + 2, \ \ldots, \ N_0$$

где $a_{\beta i_1 \ldots i_s}$ $(\beta = 1, \ldots, n;\ i_1, \ldots, i_s = 1, \ldots, n;\ s = 2h-1, 2h, \ldots, 2l-1)$ — коэффициенты системы (4.1).

Доказательство. Пусть существуют вещественные числа, указанные в теореме 3. Тогда полная производная dv/dt (4.4) отрицательно-определенной функции (4.2) по времени t в силу системы (4.1) представляет собой сумму форм, окаймленную формами четной степени. Согласно теореме 1, для ПО функции dv/dt (4.4) достаточно, чтобы КФ P_0 (y) (4.8) была неотрицательной по N_0 переменным $y_1, \ldots, y_{N_0}$ и положительно-определенной по N_q переменным $y_{N_0-N_q+1}, \ldots, y_{N_0}$. Теорема 2 дает необходимое и достаточное условие неотрицательности $P_0(\mathbf{y})$ (4.8) по N_0 переменным $y_1, \ldots, y_{N_0}$ и ПО ровно по N_q переменным $y_{N_0-N_q+1,\ldots,}y_{N_0}$.

Заметим, что форма степени $2q$, которая будет обеспечивать ПО функции dv/dt (4.4), заранее неизвестна. Тем самым неизвестно число q. Поэтому индексу i в формуле (4.10) будем давать значения от 1 до N_0 вместо значений $1, N_0 - N_q + 1, \ldots, N_0$, определенных в теореме 2, т. е. в доказательстве теоремы расширяется класс функций (4.4), среди которых ищется положительно-определенная сумма форм.

Таким образом, существование чисел b_{ij} (4.10) при условии (4.11) представляет собой достаточное условие ПО функции dv/dt (4.4), а значит, достаточное условие асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (4.1) [6]. Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве теоремы 3 числа k и m ($k \leqslant m$) считаются фиксированными. Вообще говоря, они выбираются из натурального ряда, что порождает широкий класс функций Ляпунова (4.2).

Следствие. Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно выполнения условий теоремы 3 при

$$s = h = l = 1,\ r = k = m = 1,\ N = N_0 = N_q = n,\ q = 1,\quad p = 2 \tag{4.12}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (4.1) при $s = h = l = 1$ имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. Тогда все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части и согласно теореме Ляпунова [6], какова бы ни была наперед заданная положительно-определенная КФ $X^{(2)}(x, A_{i_1 i_2})$, существует одна и только одна отрицательно-определенная КФ (4.2), удовлетворяющая уравнению (4.4) при $p = 2$. Существование $(N \times N)$-матрицы (4.3) при $N = n$ и чисел b_{ij} (4.10), (4.11) следует теперь из критерия знакоопределенности КФ работы [3].

Достаточность. Доказательство достаточности следствия аналогично доказательству теоремы 3 при условии (4.12).

Анализ устойчивости нулевого решения системы (4.1) на основании теоремы 3 можно осуществить в следующем порядке.

1°. По заданной системе (4.1) определяются степени $s = 2h - 1, 2h, \ldots, 2l - 1$ полилинейных форм, входящих в правую часть этой системы, и число n. Отсюда находим числа h, l.

2°. Выбираются значения k, m ($k < m$) из натурального ряда целых положительных чисел.

3°. Вычисляется N по формуле (1.5).

4°. Задается произвольно верхняя треугольная неособенная $(N \times N)$-матрица (4.3) вещественных чисел $c_{\alpha i_1 \ldots i_r}$, $\alpha = 1, \ldots, N$; $i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n$; $r = k, k + 1, \ldots, m$.

5°. Вычисляются N_0 и N_q по формуле (4.7) для всех q.

6°. Определяются все коэффициенты $A_{i_1 \ldots i_p}$ по формуле (4.5).

7°. Из системы линейных уравнений (4.9) определяются коэффициенты $B_{j_1 j_2}$ ($j_1, j_2 = 1, \ldots, N_0$).

8°. Определяются вещественные числа b_{ij} по формуле (4.10) и проверяется условие (4.11).

9°. Если все числа b_{ij} п. 8 существуют и удовлетворяют условию (4.11), то делается вывод: нулевое решение заданной системы (4.1) асимптотически устойчиво в целом.

В противном случае выбранная функция Ляпунова $v(x)$ (4.2) не позволяет установить устойчивость движения и следует возвратиться к п.2°, выбрать другие значения k, m и повторить процесс вычислений. Заметим, что элемент произвола содержат и пп. 4° и 7°, к которым также следует возвращаться по мере необходимости.

Пример. Исследуем устойчивость продольного движения летательного аппарата с учетом нелинейности аэродинамических коэффициентов и нелинейных связей между углом атаки $\alpha = x_1$ и скоростью тангажа $\omega_z = x_2$. Уравнения возмущенного движения рассмотрим в виде [7]

(4.13)
$$dx_\beta/dt = a_{\beta 1}x_1 + a_{\beta 2}x_2 + a_{\beta 11}x_1^2 + a_{\beta 12}x_1x_2 + a_{\beta 22}x_2^2 + \\ + a_{\beta 111}x_1^3 + a_{\beta 112}x_1^2x_2 + a_{\beta 122}x_1x_2^2 + a_{\beta 222}x_2^3, \quad \beta = 1, 2$$

Найдем условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (4.13) при постоянных значениях коэффициентов.

Следуя предложенному порядку исследования, находим $n = 2$, $h = 1$, $l = 2$, $s = 1, 2, 3$. Задаем $k = m = 1$, что соответствует квадратичной форме (4.2). Так как $r = k = 1$, то $N = C^r_{n+r-1} = 2$. $(N \times N)$-матрица (4.3) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{Vmatrix}$$

Вычислим N_q при $q = 1, 2$. Получим $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, тогда $N_0 = 5$. По формуле (4.5) при $p = 2, 3, 4$ и $\gamma_\beta = 1$ находим коэффициенты функции вида (2.1)

(4.14)
$$A_{1111} = -c_{11}^2a_{1111} - c_{11}c_{12}a_{2111}, \quad A_{1112} = -c_{11}^2a_{1112} - c_{11}c_{12}a_{1111} - \\ - c_{11}c_{12}a_{2112} - (c_{12}^2 + c_{22}^2)\,a_{2111}, \quad \ldots, \quad A_{111} = -c_{11}^2a_{111} - c_{11}c_{12}a_{211}, \ A_1 = \\ = -c_{11}^2a_{112} - c_{11}c_{12}a_{111} - c_{11}c_{12}a_{212} - (c_{12}^2 + c_{22}^2)\,a_{211}, \quad \ldots, A_{22} = \\ = -c_{11}c_{12}a_{12} - (c_{12}^2 + c_{22}^2)\,a_{22}$$

По уравнениям (4.9) находим коэффициенты $B_{j_1j_2}$ ($j_1, j_2 = 1, \ldots, 5$). Эти уравнения решены в п. 2. Решения $B_{j_1j_2}$ имеют вид (2.4) и выражены через коэффициенты (4.14).

По формулам (4.10) находим числа b_{ij}:

(4.15)
$$b_{11} = \pm B_{11}^{1/2}, \quad b_{12} = \frac{B_{12}}{b_{11}}, \quad b_{13} = \frac{B_{13}}{b_{11}}, \quad b_{14} = \frac{B_{14}}{b_{11}}, \quad b_{15} = \frac{B_{15}}{b_{11}}$$
$$b_{22} = \pm (B_{22} - b_{12}^2)^{1/2}, \quad b_{23} = \frac{1}{b_{22}}(B_{23} - b_{12}b_{13}), \quad b_{24} = \frac{1}{b_{22}}(B_{24} - b_{12}b_{14})$$
$$b_{25} = \frac{1}{b_{22}}(B_{25} - b_{12}b_{15}), \quad b_{33} = \pm (B_{33} - b_{13}^2 - b_{23}^2)^{1/2}$$
$$b_{34} = \frac{1}{b_{33}}(B_{34} - b_{13}b_{14} - b_{23}b_{24}), \quad b_{35} = \frac{1}{b_{33}}(B_{35} - b_{13}b_{15} - b_{23}b_{25})$$
$$b_{44} = \pm (B_{44} - b_{14}^2 - b_{24}^2 - b_{34}^2)^{1/2}$$
$$b_{45} = \frac{1}{b_{44}}(B_{45} - b_{14}b_{15} - b_{24}b_{25} - b_{34}b_{35})$$
$$b_{55} = \pm (B_{55} - b_{15}^2 - b_{25}^2 - b_{35}^2 - b_{45}^2)^{1/2}$$

Теперь необходимо проверить условие (4.11). При $N_1 = 2$ имеем порядок переменных (2.2) и условие (2.9). При $N_2 = 3$ имеем порядок переменных (2.10) и условие (2.12).

Существование чисел (4.15) при условии (2.9) либо (2.12) означает, что нулевое решение системы (4.13) асимптотически устойчиво в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов Н. П.* Пространственные матрицы и их приложения. М.: Физматгиз, 1960. 300 с.
2. *Ван-дер-Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
3. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Условия знакоопределенности четных форм и устойчивости в целом нелинейных однородных систем.— ПММ, 1984, т. 48, вып 3, с. 339—347.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ, 1957, № 4, с. 9—16.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
7. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 558 с.

Казань

Поступила в редакцию
26.XI.1984