УДК 539.375

ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЕ ПРИ СЖАТИИ НЕОГРАНИЧЕННОГО ХРУПКОГО ТЕЛА С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

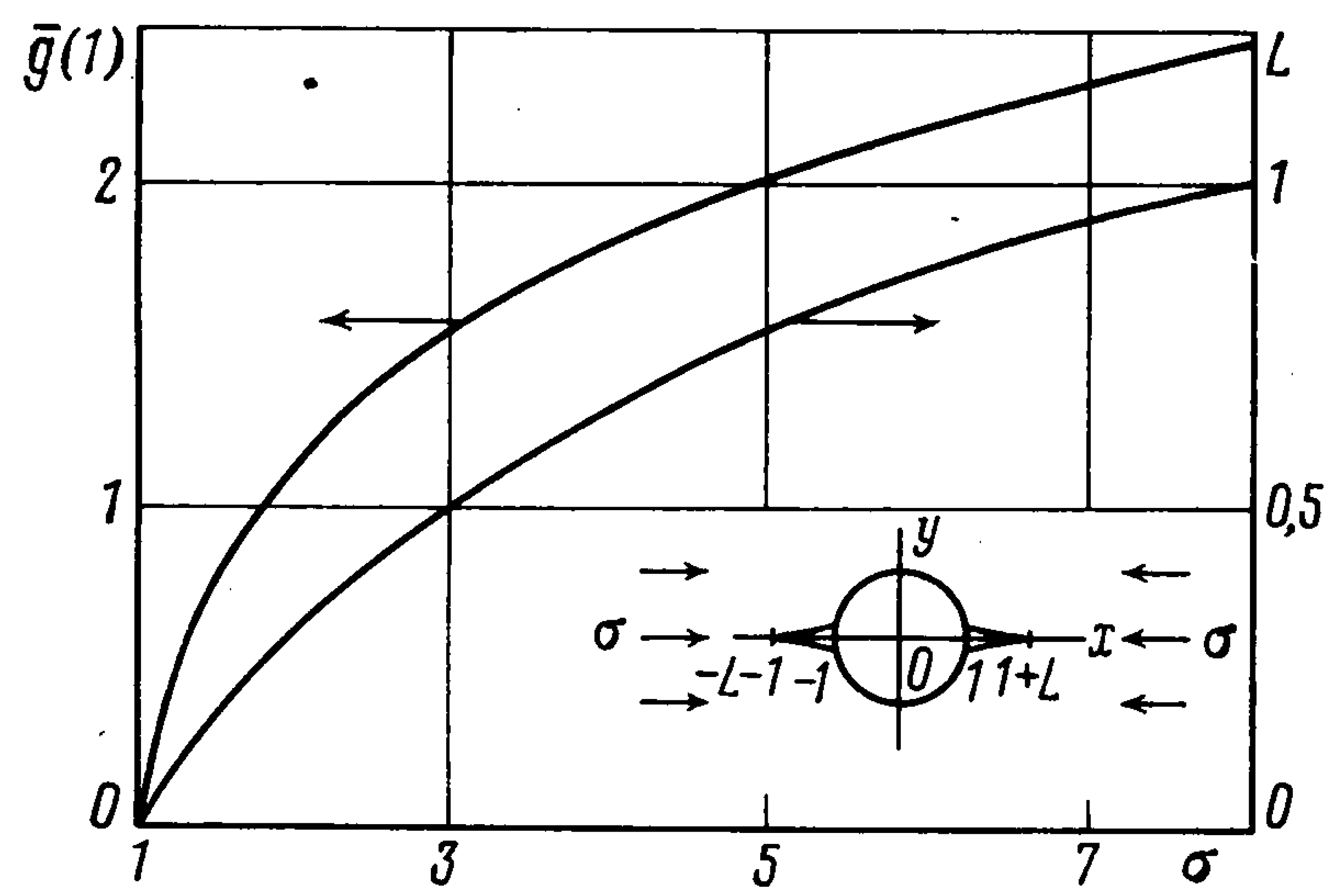
Галыбин А. Н.

В соответствии с упрощенной моделью хрупкого тела [1] рассматривается возникновение трещин от границы кругового отверстия в теле, которое находится в условиях плоской деформации при одноосном сжатии на бесконечности. Сингулярное интегральное уравнение задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма с вырожденным ядром. Получено решение в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра.

1. Постановка задачи. Основные соотношения. Пусть тело занимает внешность единичного круга, центр которого совпадает с началом координат Oxy и находится в условиях плоской деформации при заданных напряжениях на бесконечности $\sigma_x^\infty = -p$ $(p > 0)$, $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0$. Упругие напряжения определяются функциями Колосова [2]

$$\Phi(z) = -\frac{p}{4}\left(1 - \frac{2}{z^2}\right), \quad \Psi(z) = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^4}\right)$$

Здесь $z = x + iy$, $|z| \geqslant 1$. Растягивающие напряжения максимальны на контуре отверстия в точках $z = \pm 1$ и равны $\sigma_y(\pm 1, 0) = p$. Максимум сжимающих напряжений достигается в точках $z = \pm i$, $\sigma_x(0, \pm 1) = -3p$. Для ряда хрупких материалов отношение $\varkappa$ прочности при сжатии к прочности при растяжении значительно больше единицы. Отмечено [3, 4], например, для горных пород $\varkappa \sim 10^2$, для стекол и керамик $\varkappa \sim 10$. Примем для рассматриваемого тела $\varkappa > 3$, тогда при $p > \sigma_0$ (σ_0 — величина сопротивления отрыву) в теле вдоль оси Ox образуются две симметрично расположенные трещины отрыва (фигура).



Согласно упрощенной модели хрупкого тела [1], поверхности трещины притягиваются напряжениями σ_0, если интервал δ между ними не превосходит константы материала δ_* (зародышевые трещины или зона ослабленных связей), при $\delta > \delta_*$ поверхности трещины не взаимодействуют (развитые трещины). Обозначим через L длину зародышевой трещины. Полагая, что на отрезках действительной оси $1 \leqslant |x| \leqslant 1 + L$ упругие перемещения $u_y(x, 0)$ терпят некоторый разрыв $g(x) = u_y^+(x, 0) - u_y^-(x, 0)$ и используя известные [5] соотношения, запишем сингулярное интегральное уравнение для определения плотности разрыва перемещений

$$2D \int_1^{(1+L)^2} \left\{\frac{1}{t-r} + \frac{1}{tr} + \frac{r-t}{tr(tr-1)^2} + \frac{4(t-1)(r-1)}{(tr-1)^3}\right\} \mu(t)\, dt = \tag{1.1}$$

$$= \frac{p}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{r^2}\right) + \sigma_0, \quad D = \frac{G}{4\pi(1-\nu)}$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Ранее [5, 6] для решения уравнений с аналогичными ядрами использовались приближенные методы. Метод, применяемый ниже, сводит сингулярное интегральное уравнение (1.1) к интегральному уравнению Фредгольма с вырожденным ядром, решение которого в классе ограниченных функций ищется в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра.

2. Решение интегрального уравнения. Разделим (1.1) на σ_0 и перейдем к уравнению на отрезке $[0, 1]$ линейным преобразованием $t = \varepsilon\tau + 1$, $r = \varepsilon\xi + 1$. Явно выделив члены ядра, содержащие сингулярность, запишем ($\sigma = p/\sigma_0$ — безразмерное напряжение на бесконечности)

$$(2.1)\qquad \int_0^1 (S+F)\,\mu_0\,d\tau = 1+\frac{\sigma}{2}\left[\frac{1}{1+\varepsilon\xi}-\frac{3}{(1+\varepsilon\xi)^2}\right]$$

$$S=\frac{1}{\tau-\xi}+\frac{1}{\tau+\xi}+\frac{2\tau}{(\tau+\xi)^2}-\frac{4\tau^2}{(\tau+\xi)^3}$$

$$F=\varepsilon\left\{\frac{\tau-\xi}{\tau+\xi}\,\frac{1}{1+A}+\frac{\tau\xi(\tau-\xi)}{(\tau+\xi)^3}\left[\frac{1}{1+A}+\frac{1}{(1+A)^2}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{4(\tau\xi)^2}{(\tau+\xi)^4}\left[\frac{1}{1+A}+\frac{1}{(1+A)^2}+\frac{1}{(1+A)^3}\right]+\frac{1+\varepsilon(\tau-\xi)}{(1+\varepsilon\tau)(1+\varepsilon\xi)}\right\}$$

$$A=\frac{\varepsilon\tau\xi}{\tau+\xi},\quad \varepsilon=(1+L)^2-1,\quad \mu_0=\frac{2D\mu(1+\varepsilon\tau)}{\sigma_0}$$

Функция $F(\tau,\xi)$ ограничена при $0\leqslant\tau,\ \xi\leqslant 1$, следовательно, может быть с заданной точностью представлена отрезком ряда Фурье по сдвинутым полиномам Лежандра

$$F(\tau,\xi)=\sum_{k,l} a_{kl}R_k(\tau)\,R_l(\xi)$$

где коэффициенты a_{kl} определяются двойным интегралом

$$a_{kl}=(2k+1)(2l+1)\int_0^1\int_0^1 F(\tau,\xi)\,R_k(\tau)\,R_l(\xi)\,d\tau\,d\xi$$

Обозначив

$$(2.2)\qquad c_k=\int_0^1 \mu_0(\tau)\,R_k(\tau)\,d\tau$$

приведем (2.1) к виду

$$(2.3)\qquad \int_0^1 S(\tau,\xi)\,\mu_0(\tau)\,d\tau = f(\xi)-\sum_{k,l} a_{kl}c_kR_k(\xi)$$

Здесь $f(\xi)$ — правая часть уравнения (2.1).

Применив преобразование Меллина к (2.3), получим функциональное уравнение Винера — Хопфа в полосе $-1<\operatorname{Re} s<0$

$$(2.4)\qquad \Phi^-(s)=K(s)\,G(s)\,[Q(s)/(s+1)+\Phi^+(s)]$$

$$\Phi^-(s)=\int_0^1 \mu_0(\tau)\,\tau^s\,d\tau,\quad \Phi^+(s)=\int_1^\infty \sigma_y(\tau,0)\,\tau^s\,d\tau$$

$$K(s)=\operatorname{ctg}\frac{\pi s}{2},\quad G(s)=\frac{1}{\Delta(s)}\sin^2\frac{\pi s}{2}$$

$$Q(s)=1+\sigma w(s)-(s+1)\sum_{k,l} a_{kl}M(s,l)\,c_k$$

$$w(s)=0{,}5\,(1+\varepsilon)^{-1}\,[(1+3s)\,{}_2F_1(1,1,s+2,\ \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1})-3(s+1)]$$

$$M(s,l)=\Gamma^2(s+1)/[\Gamma(s+l+2)\,\Gamma(s-l+1)]$$

$$\Delta(s)=\sin^2\pi s/2-s^2$$

(${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса).

Используя результаты работы [7], в которой получено для случая $F(\tau,\xi)\equiv 0$ функциональное уравнение, аналогичное (2.4), запишем выражения для неизвестных функций $\Phi^\pm(s)$

$$\Phi^-(s)=\frac{-2\varphi^-(s)\,K^-(s)}{G^-(s)},\quad \Phi^+(s)=\frac{-s\varphi^+(s)}{K^+(s)\,G^+(s)}$$

$$K^\pm(s)=\frac{\Gamma(1\mp s/2)}{\Gamma(1/2\mp s/2)},\quad G^\pm(s)=\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\ln G(t)\,dt}{t-s}\right]$$

$$(2.5)\qquad \varphi^\pm(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)\,dt}{t-s},\quad \varphi(s)=\frac{K^+(s)\,G^+(s)\,Q(s)}{s(s+1)}$$

($\Gamma(s)$ — гамма-функция, C — прямая, лежащая в полосе $-1 < \operatorname{Re} s < 0$). Индексы плюс и минус означают, что функция аналитична и не имеет нулей в областях, соответственно, $\operatorname{Re} s < 0$ и $\operatorname{Re} s > -1$. В полосе $-1 < \operatorname{Re} s < 0$ имеют место соотношения

$$K(s) = 2K^+(s)K^-(s)/s, \quad G(s) = G^+(s)\,G^-(s)$$

Применяя теорему о вычетах к (2.5), найдем

$$\Phi^-(s) = \frac{K^-(s)}{2G^-(s)(s+1)} \sum_j \frac{L(s_j)\,[Q(s) - Q(s_j)]}{s - s_j} \tag{2.6}$$

$$L(s_j) = \frac{t_j G^-(s_j)\sin \pi s_j}{K^-(s_j)}$$

где s_j — корни уравнения $\Delta(s) = 0$, лежащие в правой полуплоскости, t_j — вычет функции $1/\Delta(s)$ в точке $s = s_j$. При получении выражения (2.6) использовано условие ограниченности напряжений в конце зародышевой трещины (либо эквивалентное $\mu_0(1) = 0$), которое согласно теореме абелева типа [8] имеет вид

$$\sum_j \frac{L(s_j)\,Q(s_j)}{1 + s_j} = 0 \tag{2.7}$$

Обратным преобразованием Меллина

$$\left(\mu_0(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Phi^-(s)\,\tau^{-s-1}\,ds\right)$$

получим

$$\mu_0(\tau) = \sum_{i,j} \frac{N(s_j)\,L(s_j)\,[Q(s_j) - Q(s_i)]}{s_i + s_j}\left(\tau^{s_j - 1} - 1\right) \tag{2.8}$$

$$N(s_i) = \frac{s_i t_i \sin \pi s_i}{8K^-(s_i)\,G^+(-s_i)\,(1 - s_i)}$$

Выражение (2.8) — интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, поскольку в $Q(s)$ входят c_k, определяемые интегралом (2.2). Будем разыскивать его решение в виде ряда Фурье по сдвинутым полиномам Лежандра, учитывая разложение

$$\tau^{s-1} - 1 = \sum_k (2k+1)\,\alpha_k R_k(\tau), \quad \alpha_k = M(s-1, k)$$

Для c_k получим систему линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i,j,l} E_{ijm} a_{kl}\,[(1 + s_j)\,M(s_j, l) - (1 - s_i)\,M(-s_i, l)]\,c_k - \tag{2.9}$$

$$- c_m + \sigma \sum E_{ijm}\,(w(s_j) - w(-s_i)) = 0$$

$m = 0, 1, \ldots, n$

$$E_{ijm} = N(s_i)\,L(s_j)\,M(s_i - 1, m)/(s_i + s_j)$$

Удобно считать заданной длину L зародышевой трещины, тогда, присоединяя к (2.9) условие (2.7), получим алгебраическую систему линейных $n + 2$ уравнений для определения c_k, σ ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Зависимости длины и раскрытия трещин от нагрузки σ показана на фигуре.

При $L \sim 1$ конечным приращениям σ соответствуют малые изменения L. Для реального материала решение имеет место при $\varkappa/3 > \sigma$. Это условие может быть уточнено, если учесть напряжения, вызванные на контуре отверстия наличием зародышевых трещин. Используя выражение (2.14) работы [5], получим

$$|\sigma_x(0, \pm 1)| = 4 \int_1^{1+L} \frac{(t^2 - 1)\,|\mu(t)|}{t\,(t^2 + 1)^2}\,dt \leqslant L^3(L + 2)\max_t |\mu(t)|$$

Например, для $L = 1$ имеем $|\sigma_x(0, \pm 1)| < 3 \cdot 10^{-2}$, т. е. вклад этих напряжений незначителен.

Раскрытие трещины определяется формулой

$$g(x) = \int_{1+L}^{x} \mu(t)\,dt$$

и достигает максимума на контуре отверстия ($x = 1$). Зависимость $\bar{g}(1) = 2D\sigma_0^{-1}g(1)\cdot 10^3$ от σ представлена на фигуре. Равенство $g(1) = \delta_*$ определяет критическую нагрузку σ_* образования развитой трещины.

Таким образом, полученное решение справедливо при $\sigma < \varkappa/3$, $\sigma < \sigma_*$.

Автор благодарит В. К. Вострова и Р. Л. Салганика за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов М. Я.* Элементы теории хрупкого разрушения.— ПМТФ, 1961, № 3, с. 85—92.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Поль Б.* Критерии пластического течения и хрупкого разрушения.— В кн.: Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975, с. 336—520.
4. *Павлов П. А.* Механические состояния и прочность материалов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 176 с.
5. *Витвицкий П. М., Леонов М. Я.* Растяжение за пределом упругости пластинки с круговым отверстием.— ПМТФ, 1962, № 1, с. 109—117.
6. *Панасюк В. В., Витвицкий П. М., Кутень С. И.* Упругопластическое равновесие пластинки с круговым отверстием и трещинами, выходящими на контур.— Физ.-хим. механ. матер., 1976, № 1, с. 60—64.
7. *Кулиев В. Д.* О пластической деформации на конце краевой трещины.— ПММ, 1979, т. 40, вып. 1, с. 160—166.
8. *Нобл Б.* Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.VI.1985