

3. Лушников А. А., Пискунов В. Н. Формирование стационарных распределений в коагулирующих системах с распадающимися частицами.— Коллоид. ж., 1977, т. 39, № 5, с. 857—862.
4. Домиловский Е. Р., Лушников А. А., Пискунов В. Н. Стационарные распределения частиц по размерам в конечных коагулирующих системах с распадами.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 4, с. 697—701.
5. Vagrow J. D. Coagulation with fragmentation.— J. Phys. A: Math. and Gen., 1981, v. 14, No. 3, p. 729—733.
6. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 320 с.
7. Hidy G. M. On the theory of the coagulation of noninteracting particles in Brownian motion.— J. Colloid Sci., 1965, v. 20, No. 2, p. 123—144.
8. Лушников А. А., Пискунов В. Н. Сингулярные асимптотические распределения в коагулирующих системах.— Докл. АН СССР. 1976, т. 231, № 5, с. 1166—1169.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.IV.1984

УДК 539.3 : 534.1

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ КОЛЕБАНИЯ

Боев С. И., Сумбатян М. А.

Рассматриваются высокочастотные гармонические колебания жесткого штампа, соединенного без трения с упругой полуплоскостью. Основная трудность построения высокочастотной асимптотики состоит в осуществлении эффективной факторизации символа ядра основного интегрального уравнения. Предлагается функция, учитывающая все свойства символа, позволяющая осуществить его равномерную аппроксимацию и легко факторизуемая. Такое решение проблемы приближенной факторизации позволяет в простом явном виде выписать главный член асимптотики решения. Исследуется характер распределения контактных напряжений под штампом, податливость основания и сдвиг фаз между приложенной силой и перемещениями штампа.

Для невысоких частот эта задача рассматривалась ранее в работах [1—4] и других. В [5] строились решения трех классов — низкочастотное, эффективное на средних частотах и высокочастотное. Однако высокочастотное решение [5] не улавливает истинных корневых особенностей контактного напряжения в окрестности острых кромок штампа.

1. Как известно [4, 5], рассматриваемая задача сводится к следующему интегральному уравнению:

$$(1.1) \quad \int_{-1}^1 \varphi(t) K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dt = \frac{G}{a} W, \quad |x| \leq 1$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} L_*(u) e^{-iux} du, \quad \lambda^2 = \frac{G}{\rho \kappa^2 a^2}, \quad \beta^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

$$L_*(u) = \frac{\sqrt{u^2 - \beta^2}}{4u^2 \sqrt{u^2 - \beta^2} \sqrt{u^2 - 1} - (2u^2 - 1)^2}$$

Зависимость от времени всех величин принимается в виде $f(x, t) = \operatorname{Re} [f(x) e^{-i\kappa t}]$. В уравнении (1.1) $\varphi(x)$ — амплитуда контактного напряжения, W — амплитуда колебаний штампа, λ — параметр, который на высоких частотах мал, G, ν — упругие постоянные, a — полуширина штампа, κ — частота колебания.

Исходное уравнение (1.1) эквивалентно двум [6]:

$$(1.2) \quad \int_0^{\infty} \omega(t) K(x-t) dt = \frac{1}{\lambda} + \int_0^{\infty} \left[\omega\left(\frac{2}{\lambda} + \tau\right) - \nu(\tau) \right] K(x+\tau) d\tau$$

$$(1.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \nu(t) K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dt = 1$$

если

$$(1.4) \quad \varphi(x) = \frac{G}{a} W \left[\omega \left(\frac{1+x}{\lambda} \right) + \omega \left(\frac{1-x}{\lambda} \right) - v(x) \right]$$

Рассматриваемая задача является типичной задачей с сингулярными возмущениями по малому параметру λ .

Часто при построении главного члена асимптотики решения при $\lambda \rightarrow 0$ последний интеграл в (1.2) можно отбросить, и уравнение (1.2) превращается в уравнение Винера—Хопфа на полуоси [6, 7]. Обычно это дает погрешность порядка $\exp(-\varepsilon/\lambda)$ ($\varepsilon > 0$) равномерно по x . Иногда эта погрешность носит степенной характер, т. е. является более существенной. Ниже будет показано, что в данной задаче невязка за счет отбрасывания указанного члена — малая степенного порядка. Именно, имеет место оценка

$$(1.5) \quad \int_0^{\infty} \left[\omega \left(\frac{2}{\lambda} + \tau \right) - v(\tau) \right] K(x + \tau) d\tau = O(\lambda^{1/2}), \quad \lambda \rightarrow 0$$

равномерно по x .

В дальнейшем ставим целью построение главного члена асимптотики решения. Оценка (1.5) приводит к тому, что главный член (1.4) определяется решением задач для двух полубесконечных штампов (1.2) и одного бесконечного (1.3). Физически это означает, что высокочастотные колебания обладают настолько малой длиной волны, что возмущения от правого конца штампа в главном практически не влияют на волновой процесс у левой кромки, и обратно.

Решение уравнения на оси (1.3) строится применением преобразования Фурье и имеет вид

$$(1.6) \quad v(x) = -i(\beta\lambda)^{-1} \equiv v$$

Для успешного решения уравнения на полуоси

$$(1.7) \quad \int_0^{\infty} \omega(t) K(x-t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

необходимо факторизовать символ ядра. Поскольку решение уравнения (1.7) обладает устойчивостью к малым возмущениям символа на вещественной оси [4], осуществим его приближенную факторизацию.

2. Символ ядра $L_*(u)$ представляет собой комбинацию четырех радикалов $\sqrt{u+\beta}$, $\sqrt{u+1}$, $\sqrt{u-\beta}$, $\sqrt{u-1}$, имеющих точки ветвления. Проведем в плоскости комплексного переменного u разрезы, соединяющие точки $-\beta$ и -1 с бесконечностью в полуплоскости, а точки β и 1 — с бесконечностью в верхней полуплоскости. Кроме точек ветвления на вещественной оси у символа есть два полюса Релея: $u = \pm u_1$, $u_1 > 1$. Согласно принципу предельного поглощения, контур σ в (1.1) совпадает с вещественной осью, обходя положительные особенности снизу, а отрицательные — сверху.

Функция $L_*(u)$ обладает качественно различным поведением на разных отрезках вещественной оси. При $|u| \geq 1$ она вещественная, при $\beta < |u| < 1$ — комплекснозначная, при $|u| \leq \beta$ принимает мнимые значения.

Аппроксимируем символ $L_*(u)$ выражением

$$(2.1) \quad L_* = \sqrt{u^2 - \beta^2} \frac{4u^2 \sqrt{u^2 - \beta^2} \sqrt{u^2 - 1} + (2u^2 - 1)^2}{16u^4 (u^2 - \beta^2) (u^2 - 1) - (2u^2 - 1)^4} \approx$$

$$\approx \frac{A \sqrt{u^2 - \beta^2}}{(u^2 - u_1^2) (u^2 - z^2) (u^2 - \bar{z}^2)} M_+(u) M_-(u) = L(u)$$

$$\text{Im } z > 0, \quad A > 0, \quad B > 0$$

$$M_{\pm}(u) = Bu \sqrt{u \pm \beta} \sqrt{u \pm 1} + (\sqrt{2} u \pm 1)^2$$

Функция $L(u)$, как и $L_*(u)$, четна, имеет два полюса Релея $u = \pm u_1$ и обладает таким же качественным поведением на различных отрезках вещественной оси. При этом она точно улавливает поведение в нуле и на бесконечности. Кроме того, она везде имеет истинный знак мнимой части, что важно для выполнения теоремы единственности [4]. Выражение $M_+(u)$ имеет нуль в верхней полуплоскости, который должен быть

погашен нулем знаменателя $u = -\bar{z}$. Заметим, что точка $u = -z$ является его вторым нулем.

С учетом сказанного факторизация функции $L(u)$ осуществляется в виде

$$(2.2) \quad L_+(u) = \frac{A\sqrt{u+\beta}}{(u+u_1)(u+z)(u+\bar{z})} M_+(u)$$

3. Реализация метода Винера—Хопфа для уравнения (1.7) с учетом факторизации (2.2) приводит к следующему выражению для образа Фурье функции $\omega(x)$:

$$(3.1) \quad \Omega_+(u) = \frac{C}{u} \frac{(u+u_1)(u+z)(u+\bar{z})}{\sqrt{u+\beta} M_+(u)} = \frac{C}{u} \frac{(u+u_1)(u+z)(u+\bar{z})}{\sqrt{u+\beta} \Delta(u)} \times$$

$$\times [Bu\sqrt{u+\beta}\sqrt{u+1} - (\sqrt{2}u+1)^2], \quad C = \frac{u_1|z|^2}{A\lambda\sqrt{\beta}}$$

$$(3.2) \quad \Delta(u) = B^2u^2(u+\beta)(u+1) - (\sqrt{2}u+1)^4 = b(u+z)(u+\bar{z})(u+\eta)(u+\bar{\eta}), \quad b = B^2 - 4$$

Таким образом

$$(3.3) \quad \Omega_+(u) = \frac{C(u+u_1)}{bu(u+\eta)(u+\bar{\eta})\sqrt{u+\beta}} [Bu\sqrt{u+\beta}\sqrt{u+1} - (\sqrt{2}u+1)^2] =$$

$$= \frac{C}{b} \left[a_1 \frac{\sqrt{u+1}}{u+\eta} + a_2 \frac{\sqrt{u+1}}{u+\bar{\eta}} + \frac{a_3}{u\sqrt{u+\beta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_4}{(u+\eta)\sqrt{u+\beta}} + \frac{a_5}{(u+\bar{\eta})\sqrt{u+\beta}} \right]$$

$$a_1 = B \frac{u_1 - \eta}{\bar{\eta} - \eta}, \quad a_2 = \bar{a}_1, \quad a_3 = -\frac{u_1}{| \eta |^2}, \quad a_4 = \frac{(u_1 - \eta)(\sqrt{2}\eta - 1)^2}{\eta(\bar{\eta} - \eta)}$$

$$a_5 = \bar{a}_4$$

Это позволяет выписать функцию $\omega(x)$ в явном виде, поскольку имеют место следующие формулы обращения:

$$(3.4) \quad \frac{1}{(u+\eta)\sqrt{u+\beta}} \leftarrow -i \frac{e^{i\eta x}}{\sqrt{\beta-\eta}} \operatorname{erf} \sqrt{-ix(\beta-\eta)}$$

$$\frac{\sqrt{u+1}}{u+\eta} \leftarrow \frac{e^{-i(\pi/4-x)}}{\sqrt{\pi x}} - ie^{i\eta x} \sqrt{1-\eta} \operatorname{erf} \sqrt{-ix(1-\eta)}, \quad x > 0$$

Из явного вида функции $\omega(x)$, как и непосредственно из формулы (3.1), получается оценка

$$(3.5) \quad \omega(x) \sim v + ae^{i\beta x} x^{-1/2}, \quad x \rightarrow +\infty$$

которая говорит о том, что погранслоное решение, как и следовало ожидать, во внешней зоне переходит в решение задачи о бесконечном штампе (1.6). Однако этот процесс происходит очень медленно.

Если к оценке (3.5) добавить еще очевидную оценку

$$(3.6) \quad K(x) \sim c_1 e^{iu_1 x} + c_2 e^{i\beta x} x^{-3/2} + c_3 e^{ix} x^{-3/2}, \quad x \rightarrow +\infty$$

то можно убедиться в истинности соотношения (1.5).

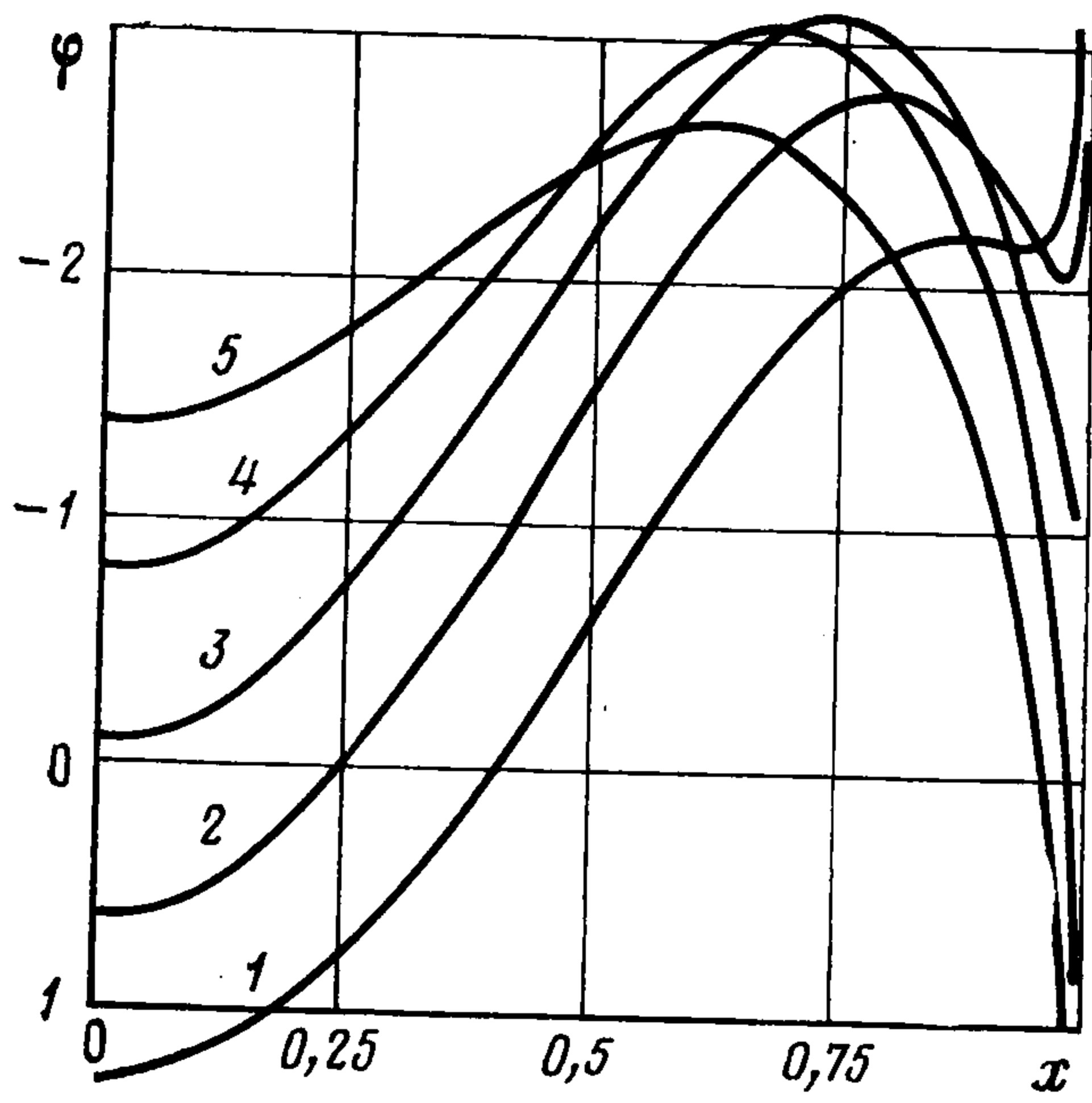
Найдем связь между силой, действующей на штамп, и его осадкой (считаем штамп невесомым)

$$(3.7) \quad P = a \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = GW \int_{-1}^1 \left[\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - v \right] dx =$$

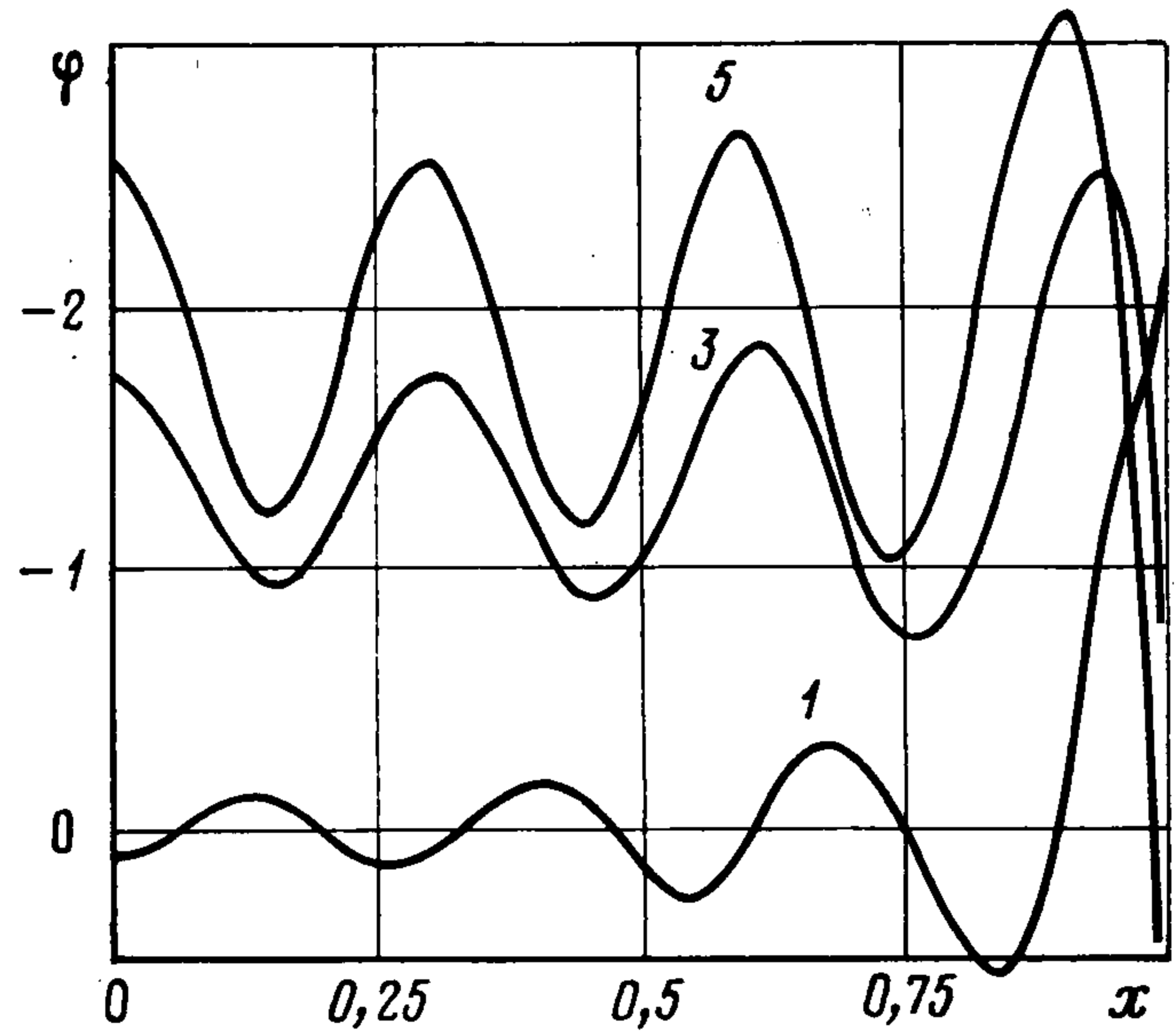
$$= GW \left\{ 2v + 2 \int_{-1}^{\infty} \left[\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) - v \right] dx \right\}$$

Последнее равенство выполняется в силу оценки (3.5) с погрешностью $O(\lambda^{1/2})$, равной погрешности построенного решения уравнения (1.1). Далее, поскольку

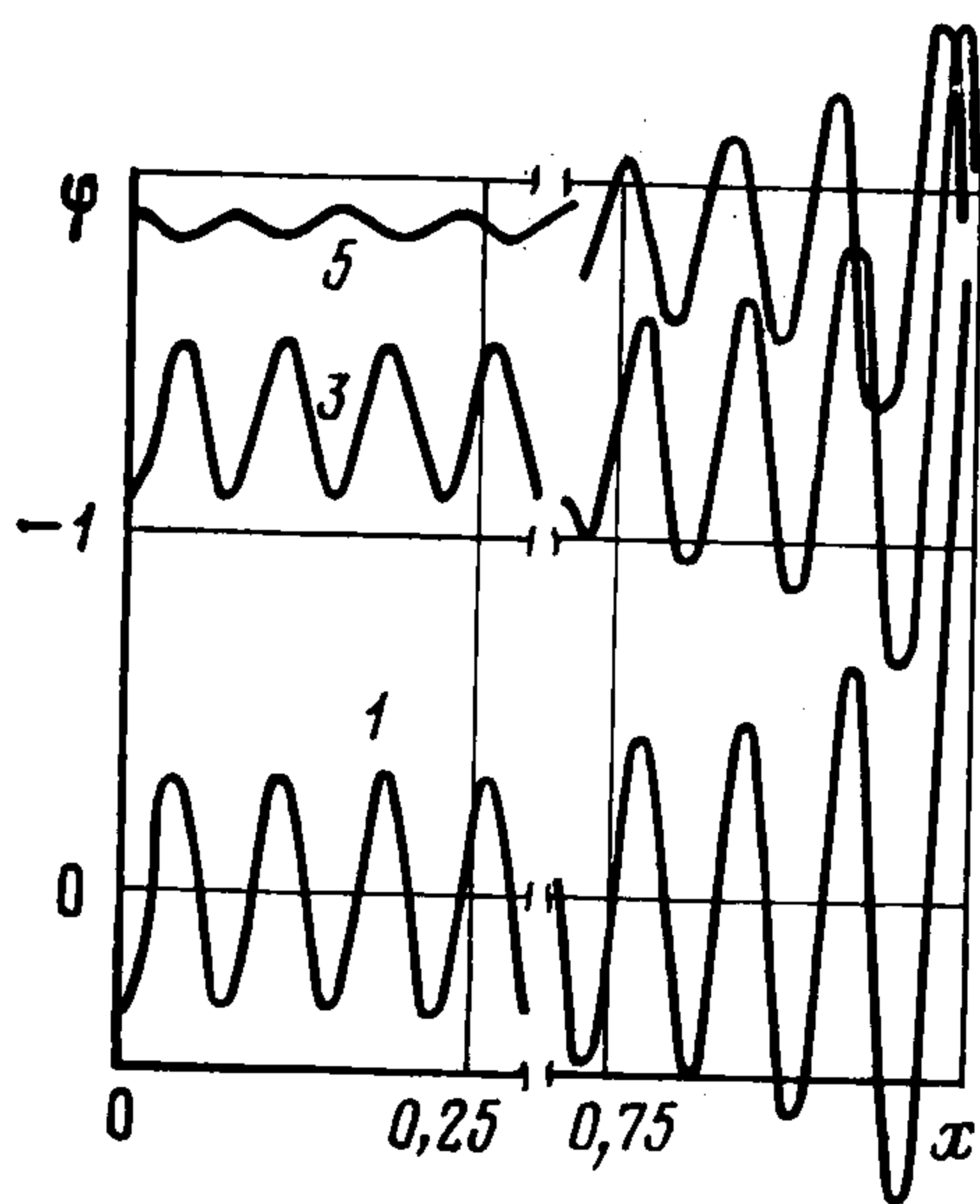
$$(3.8) \quad \int_{-1}^{\infty} \left[\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) - v \right] dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [\omega(t) - vH(t)] dt = \lambda [\Omega_+(u) - V_+(u)]_{u=0}$$



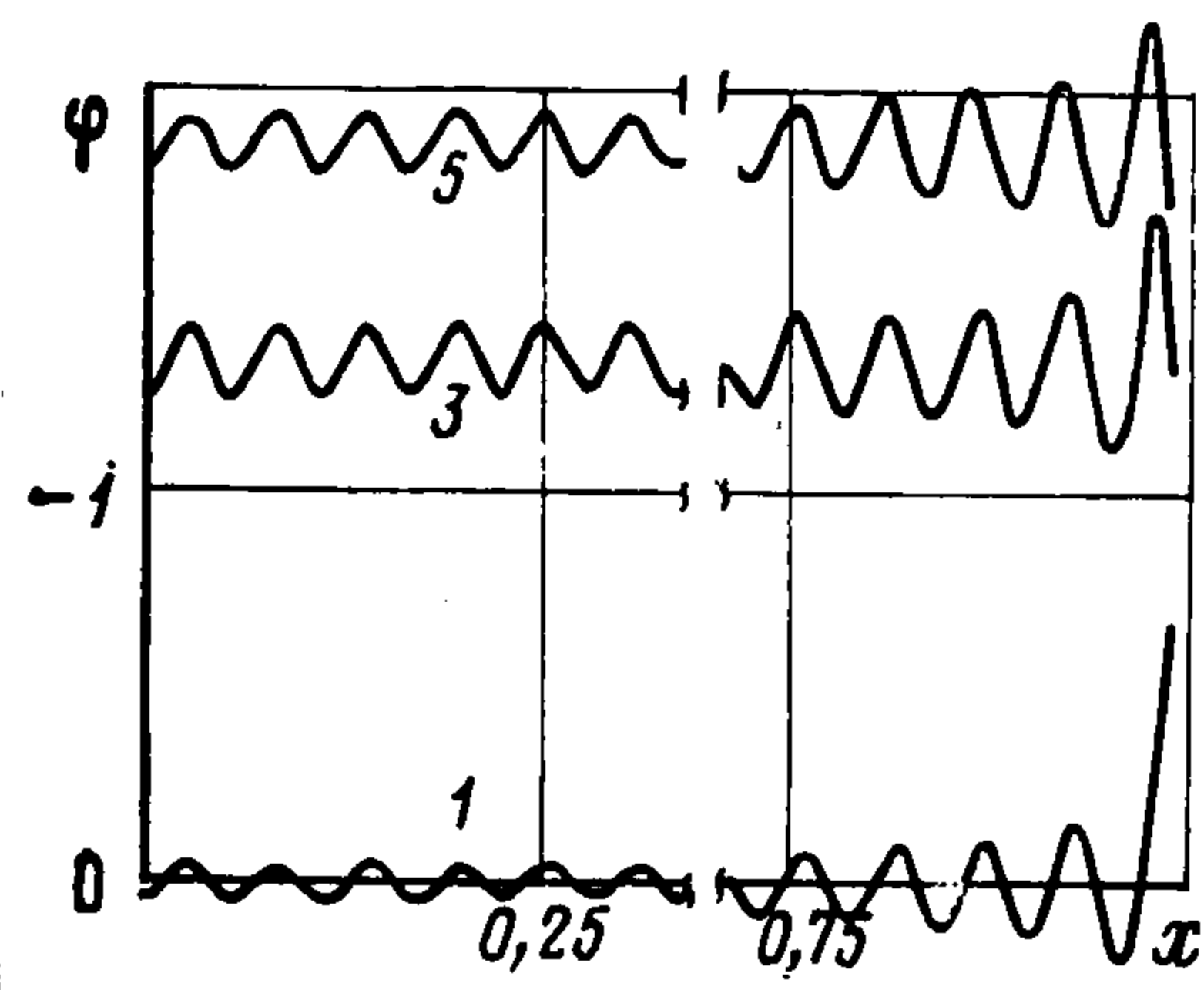
Фиг. 1



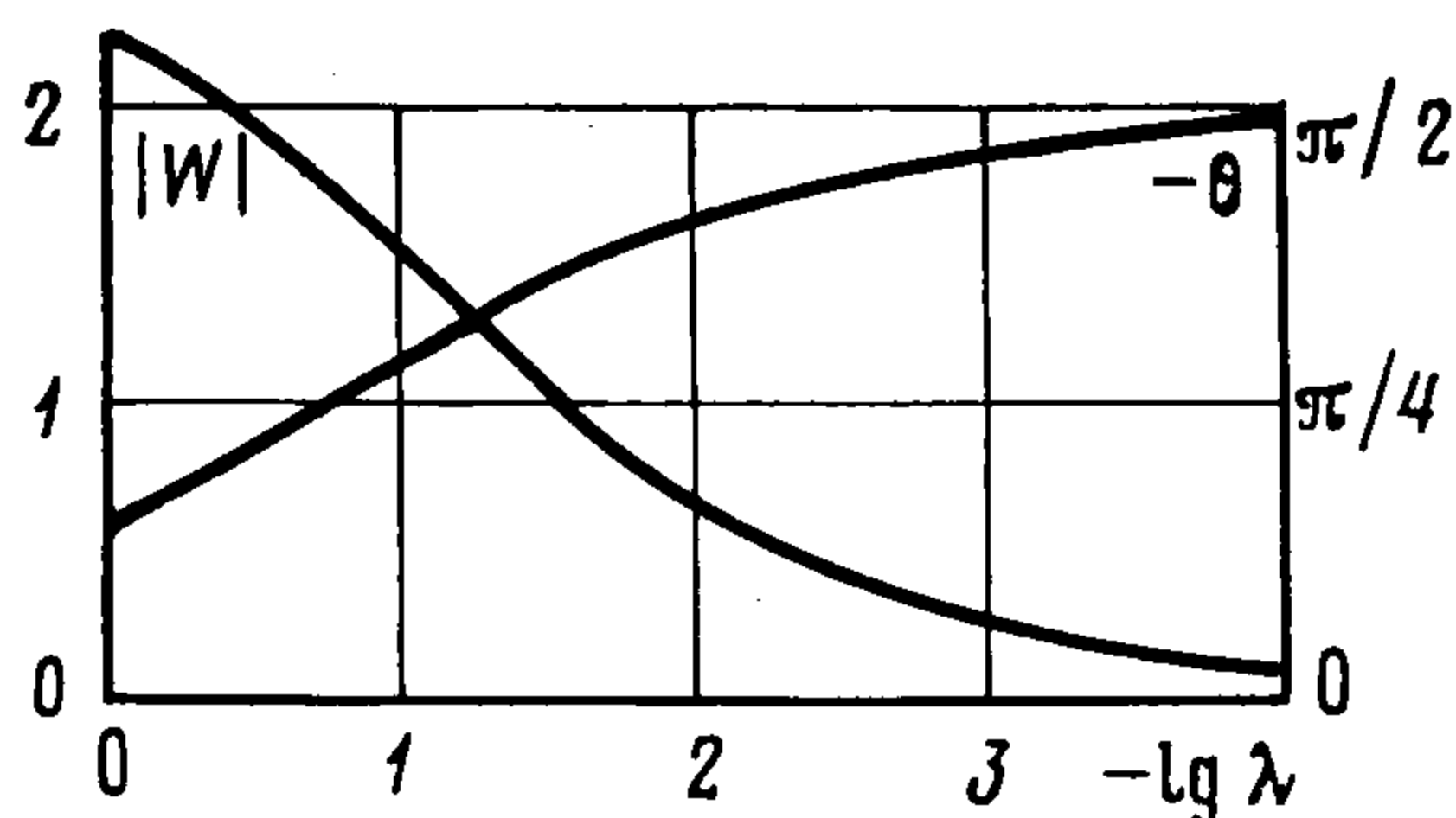
Фиг. 2



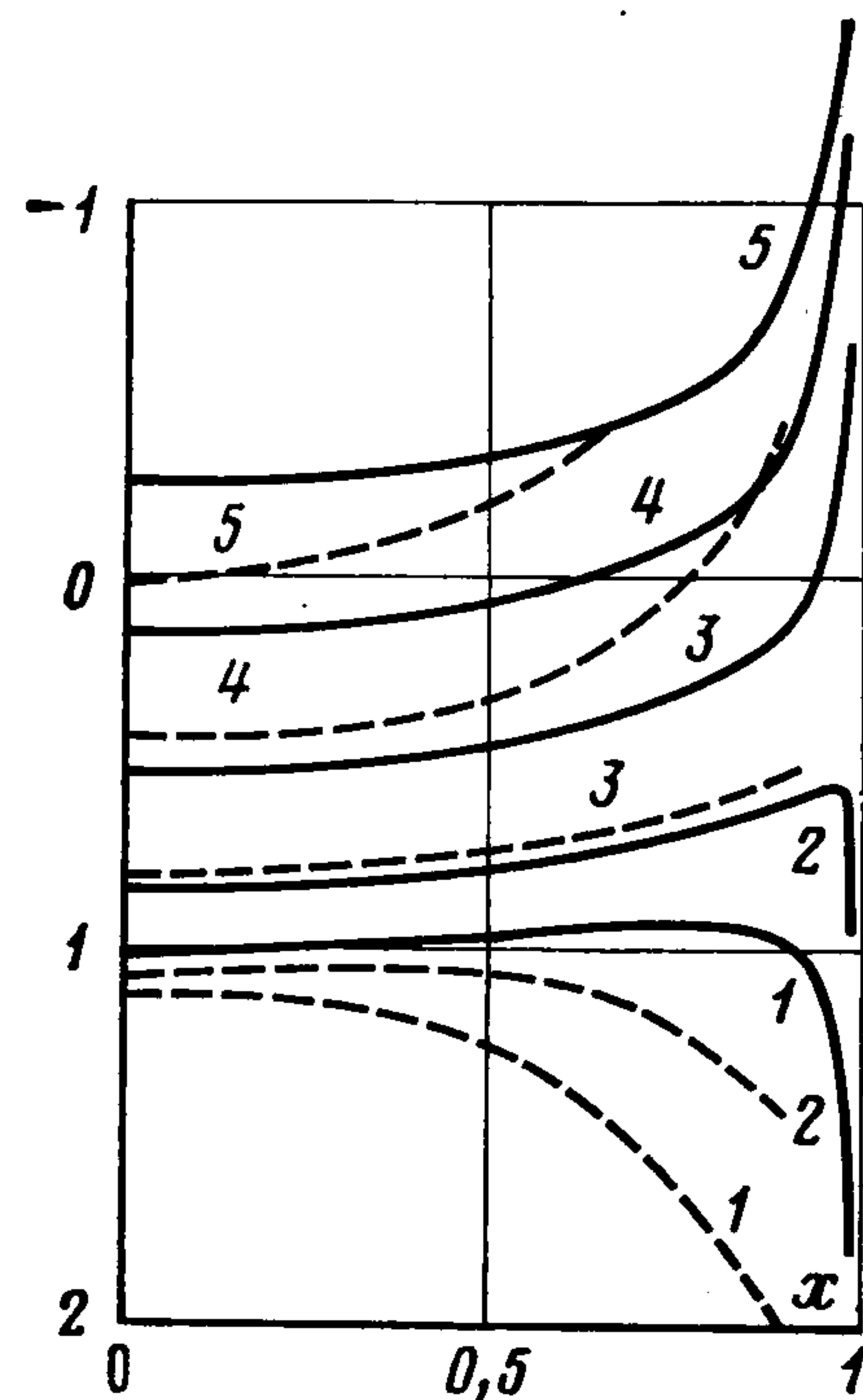
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

($H(t)$ — функция Хевисайда), то окончательно получаем следующее выражение для податливости основания:

$$(3.9) \quad W = \frac{P}{2G} \frac{\lambda}{-i\beta^{-1} + \lambda CD}$$

$$D = \frac{1}{b} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\eta} \left(a_1 + \frac{a_4}{\sqrt{\beta}} \right) \right] - \frac{a_3}{2\beta^{3/2}} \right\}$$

Заметим, что в (3.9) постоянные C и D вещественны, поэтому, например, сдвиг фаз между осадкой и приложенной силой дается формулой

$$(3.10) \quad \theta = -\operatorname{arctg} (\beta CD\lambda)^{-1}$$

Легко также выписывается формула для амплитуды осадки.

Очевидно, что решение задачи для невесомого штампа можно пересчитать на штамп с любой массой. Это достигается умножением на некоторый комплексный множитель.

4. Все расчеты проводились для $\nu = 0,3$. В этом случае $u_1 = 1,07827$. Найденные значения коэффициентов $A = 0,075330$; $B = 1,04835$; $z = 0,50252 + 0,044849 i$ обеспечивают равномерную аппроксимацию (2.1) с точными значениями в нуле и на бесконечности и с максимальной относительной погрешностью менее 10%. При этом в наиболее «критической» точке — полюсе Релея $u = u_1$ — погрешность не превышает 2%, а в точках ветвления $u = \beta$, $u = 1$ она не превышает 9%. Значение постоянной в (3.2) $\eta = 1,15679 + 0,12688i$.

Вычисление контактного напряжения производилось по явным формулам (1.4), (3.4). На фиг. 1—4 приведены эпюры контактных напряжений, отнесенных к $GW/(a\lambda)$, соответственно для значений λ , равных $1/8$, $1/40$, $1/160$, $1/2560$. Кривые 1—5 отвечают моментам времени $t = 0$, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$, $\pi/2$, взятым в четвертьпериоде $0 \leq t \leq \pi/2$. Ясно усматривается качественное изменение характера распределения контактных напряжений под штампом. Для средних значений λ ($1/8$) эпюра имеет плавный характер. При умеренно малых λ ($1/40$ и $1/160$) во внешней зоне на основное (постоянное) значение наложены осцилляции (см. (3.5)), причем для этих значений λ они еще существенны. Для очень малых λ ($1/2560$) эффект осцилляции во внешней зоне очень незначителен и сохраняется лишь в малом погранслое.

На фиг. 5 изображены зависимости модуля амплитуды $|W|$, отнесенного к $P/(2G)$, и сдвига фаз (3.10) от λ . Заметим, что вырожденное решение (1.6) давало бы для сдвига фаз постоянное значение $\theta = -\pi/2$.

На фиг. 6 отражена попытка сравнить пересчитанные для $m_0 = 0,4$ напряжения $\rho a \dot{w}(x)/P$ в рамках предлагаемого метода (сплошные линии) для большого значения $\lambda = 1$ с решением [3], с. 74 (штриховые линии), полученным методом ортогональных многочленов, в котором бралось 2—3 члена. При этом учтено, что в [3] зависимость от времени, по-видимому, взята в виде $f(x, t) = \operatorname{Im} [f(x) e^{ixt}]$. Можно усмотреть качественное совпадение характера хода кривых контактного напряжения. Это свидетельствует о том, что предлагаемый в данной работе метод, по-видимому, может быть применен уже для средних значений λ — порядка нескольких десятых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флитман Л. М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, с. 697—705.
2. Бородачев Н. М. Об определении напряжений под колеблющимся фундаментом. — Основания, фундаменты и механика грунтов, 1962, № 3, с. 4—7.
3. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.
4. Ворovich И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
5. Александров В. М., Буряк В. Г. О некоторых динамических смешанных задачах теории упругости. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 114—121.
6. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. — ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, с. 672—683.
7. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.