

9. Поляков Н. Н. Теория нестационарных движений несущей поверхности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1960. 84 с.
10. Амромин Э. Л., Бушковский В. А., Дианов Д. И. Развитая кавитация за диском в вертикальной трубе.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, № 5, с. 181—184.
11. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.VIII.1984

УДК 532.529

СТАЦИОНАРНЫЕ СПЕКТРЫ ЧАСТИЦ В ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ С КООГУЛЯЦИЕЙ И РАСПАДОМ

Пискунов В. Н.

Рассматривается формирование стационарных распределений частиц по размерам (спектров частиц) в дисперсных системах с коагуляцией и распадом. Прослежена связь между различными вариантами кинетического уравнения, описывающего эти процессы. Получено аналитическое решение для параметрического семейства коэффициентов коагуляции и скоростей парного распада. Исследован стационарный спектр частиц в случае, когда распад носит множественный характер.

Кинетическое уравнение для коагуляции с распадом в случае, когда скорость поступления частиц в систему за счет распада линейна по их концентрации, впервые было сформулировано в работе [1]. Процесс распада может стабилизировать коагулирующую дисперсную систему и привести к формированию стационарных спектров. Некоторые аналитические результаты по поведению систем с коагуляцией и распадом получены в работах [2—5].

1. Изменение со временем t спектра частиц в пространственно-однородных системах с коагуляцией и распадом описывается кинетическим уравнением

$$(1.1) \quad \partial c(g, t) / \partial t = S(c; g, t) + Q(c; g, t)$$

где $c(g, t)$ — концентрация частиц массы g в единице объема (спектр частиц); оператор S описывает вклад в баланс процесса коагуляции, а оператор Q — вклад распада. Для коагуляции в результате бинарных столкновений, согласно теории Смолуховского (например, [6])

$$(1.2) \quad S(c; g, t) = \frac{1}{2} \int_0^g K(g-n, n) c(g-n) c(n) dn - c(g, t) \int_0^\infty K(g, n) c(n, t) dn$$

где $K(g, n)$ — коэффициенты коагуляции.

Для записи оператора Q существует две формы. Первая из них [1]

$$(1.3) \quad Q(c; g, t) = \int_g^\infty \gamma(g, n) c(n, t) dn - \frac{c(g, t)}{g} \int_0^g n \gamma(n, g) dn$$

Функция $\gamma(n, g)$ определяет скорость поступления в систему частиц массы n , образовавшихся при распаде частицы массы g . Ясно, что $\gamma(n, g) = 0$ при $n > g$. Величину $\gamma(n, g)$ удобно представить в виде [6]

$$(1.4) \quad \gamma(n, g) = \frac{\theta(n, g)}{\tau(g)}, \quad \int_0^g n \theta(n, g) dn = g$$

где $\tau(g)$ имеет смысл времени жизни частицы с массой g , а $\theta(n, g)$ определяет спектр частиц, образующихся при распаде. Интегральное условие в (1.4) — следствие сохранения суммарной массы в процессе распада. Другая форма записи оператора Q применима для распада на две частицы. Для дискретного варианта кинетического уравнения она предложена в [2], для непрерывного — в работе [5]

$$(1.5) \quad Q(c; g, t) = \int_g^\infty f(g, n-g) c(n, t) dn - \frac{c(g, t)}{2} \int_0^g f(g-n, n) dn$$

Здесь $f(g, n)$ определяет скорость распада частицы $(g + n)$ на частицы g и n . По своему смыслу функция f должна быть симметричной относительно аргументов, т. е. $f(g, n) = f(n, g)$.

Выражение (1.5) — частный случай (1.3). Чтобы убедиться в этом, преобразуем второй член в правой части (1.5), учитывая симметричность $f(g, n)$ и равенство $\gamma(n, g) = f(n, g - n)$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^g f(g-n, n) dn &= \frac{1}{2g} \int_0^g [(g-n)f(g-n, n) + nf(g-n, n)] dn = \\ &= \frac{1}{g} \int_0^g n\gamma(n, g) dn \end{aligned}$$

В свою очередь, если

$$(1.6) \quad \gamma(n, g) = \gamma(g-n, g)$$

то можно использовать форму записи оператора Q в виде (1.5).

Условие (1.6) означает, что при распаде частицы g образуется одинаковое число частиц n и $(g-n)$ (в частности, (1.6) выполняется для распада на две частицы). Таким образом, наиболее общая форма записи оператора Q имеет вид (1.3). В случае, когда $\gamma(n, g)$ обладает свойством симметрии (1.6), выражения (1.3) и (1.5) эквивалентны.

Наряду со скоростями процессов коагуляции $K(g, n)$ и распада $\gamma(n, g)$ одной из основных величин, определяющих решение задачи, является масса частиц в единице объема

$$(1.7) \quad \rho = \int_0^{\infty} gc(g, t) dg$$

Подставляя в (1.1) явные выражения для операторов S и Q , можно убедиться, что эта величина не меняется со временем. Стационарные спектры $c^s(g)$ в системах с коагуляцией и распадом находятся из (1.1) при $\partial c(g, t)/\partial t = 0$. Интегральное соотношение (1.7) служит дополнительным условием, которому должны удовлетворять стационарные спектры $c^s(g)$.

2. Ограничиваясь представлением оператора Q в виде (1.5), получим стационарные спектры в системе с модельными коэффициентами коагуляции и распада

$$(2.1) \quad K(g, n) = \alpha (gn)^\lambda, \quad f(g, n) = \beta (g+n)^\lambda; \quad \lambda < 2$$

Для этого случая время жизни $\tau(g)$ частицы массы g убывает с ростом g , а спектр $\theta(n, g)$ частиц, на которые она распадается, постоянен на промежутке $0 \leq n \leq g$:

$$(2.2) \quad \tau(g) = \frac{2}{\beta g^{\lambda+1}}; \quad \theta(n, g) = \frac{2}{g}, \quad n \leq g$$

Вводя функцию $v(g) = g^\lambda c^s(g)$, получим из (1.1) при $\partial c/\partial t = 0$ уравнение

$$\alpha \left[\int_0^g v(g-n)v(n) dn - 2v(g) \int_0^{\infty} v(n) dn \right] = \beta \left[gv(g) - 2 \int_g^{\infty} v(n) dn \right]$$

с решением $v(g) = \beta\alpha^{-1}e^{-\eta g}$. Значение постоянной η определяется из условия (1.7), которое выполнимо при $\lambda < 2$. Окончательное выражение для стационарных спектров $c^s(g)$ имеет вид

$$(2.3) \quad c^s(g) = \frac{\beta e^{-\eta g}}{\alpha g^\lambda}; \quad \eta = \left[\frac{\beta \Gamma(2-\lambda)}{\alpha \rho} \right]^{1/(2-\lambda)}, \quad \lambda < 2$$

Отметим, что при $\lambda \geq 1$ счетная концентрация частиц

$$(2.4) \quad N^s = \int_0^{\infty} c^s(g) dg$$

формально обращается в бесконечность. В частном случае $\lambda = 0$ решение, аналогичное (2.3), получено в работе [5] (где оно приведено с некоторыми ошибками). Для дискретного варианта кинетического уравнения решение, аналогичное (2.3), можно получить методом, описанным в [4].

3. Проанализируем стационарный спектр в системе с постоянными коэффициентами коагуляции $K(g, n) = \alpha$ и с множественным распадом, характеризующимся функцией $\gamma(n, g) = \beta/n$. Постоянные коэффициенты коагуляции хорошо аппроксимируют процесс броуновской коагуляции [7], а функция $\gamma = \beta/n$ описывает распад частиц со временем жизни, не зависящим от их размеров, и спектральной функцией $\theta(n, g)$, обеспечивающей преимущественное отщепление мелких частиц, которое энергетически наиболее выгодно [2]

$$(3.1) \quad \tau(g) = 1/\beta; \theta(n, g) = 1/n, n \leq g$$

Уравнение (1.1) для стационарных спектров в этом случае имеет вид

$$(3.2) \quad \alpha \left[\frac{1}{2} \int_0^g c^s(g-n) c^s(n) dn - c^s(g) \int_0^\infty c^s(n) dn \right] + \\ + \beta \left[\frac{1}{g} \int_g^\infty c^s(n) dn - c^s(g) \right] = 0$$

Для сингулярных распределений частиц по размерам, подобных (2.3) при $\lambda \geq 1$, интегралы в коагуляционном операторе S могут расходиться и выражение для $S(c^s; g)$ следует понимать как предел

$$(3.3) \quad S(c^s; g) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \int_\varepsilon^{g-\varepsilon} c^s(g-n) c^s(n) dn - c^s(g) \int_\varepsilon^\infty c^s(n) dn \right]$$

Чтобы избежать вопросов с расходимостями, воспользуемся следующей формой записи функции $gS(c^s; g)$ [8]:

$$(3.4) \quad gS(c^s; g) = \alpha \rho c^s(g) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha \frac{d^2}{dg^2} \left[\int_\varepsilon^{g-\varepsilon} \varphi_1(g-n) \varphi_0(n) dn \right] \\ \varphi_0(g) = \int_g^\infty c^s(n) dn, \quad \varphi_1(g) = \int_g^\infty n c^s(n) dn$$

Умножая (3.2) на g и интегрируя от g до ∞ с учетом (3.4), получим уравнение, в котором уже можно положить $\varepsilon = 0$:

$$(3.5) \quad -\alpha \frac{d}{dg} \left[\int_0^g \varphi_1(g-n) \varphi_0(n) dn \right] + \alpha \rho \varphi_0(g) - \beta g \varphi_0(g) = 0$$

Для решения уравнения (3.5) воспользуемся преобразованием Лапласа

$$-\alpha s L(\varphi_0, s) L(\varphi_1, s) + \alpha \rho L(\varphi_0, s) + \beta \frac{dL(\varphi_0, s)}{ds} = 0$$

Связь между $L(\varphi_0)$ и $L(\varphi_1)$ получим из соотношения $gd\varphi_0/dg = d\varphi_1/dg$, что приводит к замкнутому уравнению для $u(s) = L(\varphi_0, s)$

$$(3.6) \quad [\beta + \alpha s u(s)] \frac{du(s)}{ds} + \alpha u^2(s) = 0; \quad u(0) = \rho$$

Решением уравнения (3.6) является функция $u(s)$, определяемая из трансцендентного уравнения

$$(3.7) \quad u(s) \exp[\alpha \beta^{-1} s u(s)] = \rho$$

Пользуясь формулой Бурмана—Лагранжа [9], из (3.7) получим разложение $u(s)$ в ряд по степеням s

$$u(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{\alpha}{\beta} s m \right)^{m-1} \frac{\rho^m}{m!}$$

С другой стороны, коэффициенты этого ряда выражаются через моменты функции распределения $c^s(g)!$

$$u(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-s)^{m-1}}{m!} M_m; \quad M \equiv \int_0^\infty g^m c^s(g) dg$$

следовательно

$$(3.8) \quad M_m = (\alpha\beta^{-1}m)^{m-1}\rho^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Для поиска асимптотики $c^s(g)$ при $g \gg 1$ заметим, что особая точка s_0 функции $u(s)$ определяется согласно (3.6) из равенства $s_0 u(s_0) = -\beta\alpha^{-1}$, причем сама функция $u(s_0)$ конечна, но имеет бесконечную производную. Пользуясь решением (3.7), получим

$$s_0 = -\beta/(\alpha\rho e); \quad u(s_0) = \rho e$$

где e — основание натуральных логарифмов. Для нахождения типа особенности пренебрежем в (3.6) изменением s вблизи s_0 по сравнению с изменением $u(s)$:

$$[\beta + \alpha s_0 u(s)] \frac{du}{ds} + \alpha u^2(s) = 0; \quad \ln \frac{u(s)}{\rho e} + \frac{\rho e}{u(s)} = 2 + \frac{\alpha}{\beta} \rho e s$$

Разлагая в ряд по степеням $\varepsilon(s) = 1 - u(s)/(\rho e)$ и ограничиваясь старшими членами, находим

$$u(s) \underset{s \approx s_0}{\approx} \rho e [1 - 2^{1/2} (1 + \alpha\beta^{-1}\rho e s)^{1/2}]$$

Такому поведению изображения $L(\varphi_0, s)$ в ближайшей к нулю особой точке отвечает следующая асимптотика $c^s(g)$ при $g \gg 1$ [9]:

$$(3.9) \quad c^s(g) = -\frac{d\varphi_0(g)}{dg} \underset{g \gg 1}{\approx} \left(\frac{\beta\rho e}{2\pi\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{g\beta}{\alpha\rho e}\right) g^{-3/2}$$

Отметим, что асимптотическая формула (3.9) хорошо согласуется с выражением (3.8) для моментов

$$M_m^{as} = (\rho e)^m \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m-1} \frac{\Gamma(m-1/2)}{\sqrt{2\pi}} \underset{m \gg 1}{\approx} \left(\frac{\alpha}{\beta} m\right)^{m-1} \rho^m$$

так как моменты M_m с большим m должны определяться «хвостом» спектра $c^s(g)$.

Для оценки масштаба g_{as} , при котором начинает действовать асимптотика (3.9), воспользуемся тем, что при больших m величины M_m^{as} определяются в основном значениями спектра (3.9) в точке перевала $g_m = (m - 3/2) \alpha\beta^{-1}\rho e$. Относительное различие между M_m^{as} и M_m не превышает 10% при $m \geq 6$, следовательно, можно приближенно положить $g_{as} = 3/2 \alpha\beta^{-1}\rho e$.

Поведение стационарного спектра $c^s(g)$ при $g \rightarrow 0$ определим исходя из уравнения (3.5), которое представим в виде

$$(3.10) \quad \alpha \int_0^g (g-n) c^s(g-n) \varphi_0(n) dn = \beta g \varphi_0(g)$$

Подставляя $c^s(g) \underset{g \rightarrow 0}{\approx} A g^{-p}$, видим, что значения $p < 1$, обеспечивающие конечность величины

$$\varphi_0(0) = \int_0^\infty c^s(g) dg$$

не могут удовлетворять уравнению (3.10) при $g \rightarrow 0$. Сингулярные $c^s(g)$ с $p > 1$ также не согласуются с (3.10), т. е. единственное непротиворечивое значение $p = 1$. Подставляя $c^s(g) = A/g$, $\varphi_0(g) = -A \ln g$ в (3.10) и приравнивая коэффициенты при старших членах, получим в области малых масс частиц

$$(3.11) \quad c^s(g) \underset{g \rightarrow 0}{\approx} \beta/(\alpha g)$$

Интеграл для счетной концентрации (2.4) логарифмически расходится на нижнем пределе. Интересно отметить, что при $g \rightarrow 0$ в рассматриваемой модели формируется стационарный спектр, который не зависит от массы частиц в единице объема ρ , а определяется лишь отношением скоростей процессов распада и коагуляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melzak Z. A. A scalar transport equation.— Trans. Amer. Math. Soc., 1957, v. 85, No. 2, p. 547—560.
2. Мартынов Г. А., Муллер В. М. К теории устойчивости лиофобных коллоидов.— В кн.: Поверхностные силы в тонких пленках и дисперсных системах. М.: Наука, 1972, с. 7—34.

3. Лушников А. А., Пискунов В. Н. Формирование стационарных распределений в коагулирующих системах с распадающимися частицами.— Коллоид. ж., 1977, т. 39, № 5, с. 857—862.
4. Домиловский Е. Р., Лушников А. А., Пискунов В. Н. Стационарные распределения частиц по размерам в конечных коагулирующих системах с распадами.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 4, с. 697—701.
5. Varron J. D. Coagulation with fragmentation.— J. Phys. A: Math. and Gen., 1981, v. 14, No. 3, p. 729—733.
6. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 320 с.
7. Hidy G. M. On the theory of the coagulation of noninteracting particles in Brownian motion.— J. Colloid Sci., 1965, v. 20, No. 2, p. 123—144.
8. Лушников А. А., Пискунов В. Н. Сингулярные асимптотические распределения в коагулирующих системах.— Докл. АН СССР. 1976, т. 231, № 5, с. 1166—1169.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.IV.1984

УДК 539.3 : 534.1

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ КОЛЕБАНИЯ

Боев С. И., Сумбатян М. А.

Рассматриваются высокочастотные гармонические колебания жесткого штампа, соединенного без трения с упругой полуплоскостью. Основная трудность построения высокочастотной асимптотики состоит в осуществлении эффективной факторизации символа ядра основного интегрального уравнения. Предлагается функция, учитывающая все свойства символа, позволяющая осуществить его равномерную аппроксимацию и легко факторизуемая. Такое решение проблемы приближенной факторизации позволяет в простом явном виде выписать главный член асимптотики решения. Исследуется характер распределения контактных напряжений под штампом, податливость основания и сдвиг фаз между приложенной силой и перемещениями штампа.

Для невысоких частот эта задача рассматривалась ранее в работах [1—4] и других. В [5] строились решения трех классов — низкочастотное, эффективное на средних частотах и высокочастотное. Однако высокочастотное решение [5] не улавливает истинных корневых особенностей контактного напряжения в окрестности острых кромок штампа.

1. Как известно [4, 5], рассматриваемая задача сводится к следующему интегральному уравнению:

$$(1.1) \quad \int_{-1}^1 \varphi(t) K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dt = \frac{G}{a} W, \quad |x| \leq 1$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} L_*(u) e^{-iux} du, \quad \lambda^2 = \frac{G}{\rho \kappa^2 a^2}, \quad \beta^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

$$L_*(u) = \frac{\sqrt{u^2 - \beta^2}}{4u^2 \sqrt{u^2 - \beta^2} \sqrt{u^2 - 1} - (2u^2 - 1)^2}$$

Зависимость от времени всех величин принимается в виде $f(x, t) = \operatorname{Re} [f(x) e^{-i\kappa t}]$. В уравнении (1.1) $\varphi(x)$ — амплитуда контактного напряжения, W — амплитуда колебаний штампа, λ — параметр, который на высоких частотах мал, G, ν — упругие постоянные, a — полуширина штампа, κ — частота колебания.

Исходное уравнение (1.1) эквивалентно двум [6]:

$$(1.2) \quad \int_0^{\infty} \omega(t) K(x-t) dt = \frac{1}{\lambda} + \int_0^{\infty} \left[\omega\left(\frac{2}{\lambda} + \tau\right) - \nu(\tau) \right] K(x+\tau) d\tau$$

$$(1.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \nu(t) K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dt = 1$$