

НЕСТАЦИОНАРНОЕ КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ДИСКА

Амромин Э. Л., Бушковский В. А.

Предлагается метод расчета нестационарного кавитационного обтекания тел без использования упрощающих предположений об их форме, форме каверн за ними, скорости движения тела или давления в жидкости. Проводятся расчеты осесимметричных нестационарных каверн за диском для разных режимов его движения и изменений давления в каверне.

Расчеты нестационарных кавитационных течений производились ранее лишь при существенных упрощающих предположениях как в плоском [1], так и в осесимметричном потоках (в последнем случае — лишь для тонких [2—5] или бесконечных [6, 7] каверн).

1. Диск движется со скоростью V в покоившейся среде. Жидкость идеально невязкая и несжимаема, течение безвихревое. Вне тела с каверной можно ввести скалярный потенциал скорости Φ — гармоническую функцию, удовлетворяющую условию скольжения

$$(1.1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial N} + (N, V_S) = 0$$

на $S = S_b \cup S_c \cup S_f$. Здесь N — орт внешней нормали к поверхности S , состоящей из смоченной поверхности диска S_b , поверхности каверны S_c и поверхности замыкающего каверну фиктивного диска [8] S_f ; V_S — скорость движения точки на S : $V_S|_{S_b} = V$.

Наличие фиктивного тела позволяет ограничиться изучением реакции каверны на изменение условий обтекания тела, не рассматривая пульсации ее хвоста, наблюдаемые даже в стационарном потоке.

На S_c выполняется записанное при помощи интеграла Коши — Лагранжа условие постоянства давления

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{v^2}{2}$$

ρ — плотность жидкости, v — ее скорость в абсолютной системе координат, p — разность давлений в каверне и в невозмущенном потоке).

Оказывается удобным, как и в [9], перейти к относительной (связанной с диском) системе координат и выбрать V единицей скорости. Обозначив через U скорость жидкости в относительной системе координат, условие постоянства давления в каверне можно переписать в виде

$$(1.2) \quad \sigma \equiv \frac{2p}{\rho V^2} = U^2 - 1 - \alpha \eta^2 \Phi + 2\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$$

$$\alpha = D V_0^{-2} dV/dt, \quad \eta = V_0 V^{-1}, \quad V_0 = V(0), \quad \tau = t V_0 D^{-1}$$

(τ — безразмерное время, D — диаметр диска, σ — число кавитации, а потенциал скорости отнесен к произведению VD).

Пусть p , V — заданные функции τ . Если при расчетах кавитации использовать квазистационарный подход, т. е. пренебрегать в (1.2) двумя последними членами, то оказывается удобным при расчетах задавать последовательность длин каверн

$$(1.3) \quad \{L_1, L_2, \dots\}$$

и из решения задачи отыскивать соответствующую последовательность $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$. При использовании полного уравнения (1.2) в нем оказывается три параметра, каждый из которых влияет на длину каверны: σ , α , η . Однако все они зависят от τ , и поэтому при расчетах нестационарных осесимметричных каверн также оказывается удобным назначать последовательность значений (1.3), отыскивая по ним соответствующие значения $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$, причем последовательность (1.3) не может быть вполне произвольной, поскольку последовательность $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ должна оставаться монотонной.

Для каждой длины каверны определение ее формы оказывается нелинейной задачей, которая решается методом последовательных приближений, схожим с используемыми в [8, 10]. В каждом приближении решается задача Неймана для уравнения Лапласа относительно Φ с условием (1.1) вне S , затем проверяется невязка в (1.2), и, если эта невязка превосходит заранее заданное положительное число, корректируется фор-

ма каверны с использованием линеаризованных условий (1.1), (1.2)

$$(1.4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial N} + \frac{\partial U h}{\partial T} + \eta \frac{h}{\tau_*} = 0$$

$$(1.5) \quad U \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \Phi w + \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\Phi_- \eta}{\tau_*} - \Phi_0 w \right) \tau' = \\ = \frac{U^2 - 1 - \sigma}{2} + \Phi_0 w - \eta \frac{\Phi_-}{\tau_*}, \quad w = \alpha \eta^2 + \frac{\eta}{\tau_*}.$$

Здесь λ , T — касательные к эквипотенциали и линии тока; $\tau' = \tau_+ - \tau_0$, $\tau_* = \tau_0 - \tau_-$; явно зависящие от времени величины с индексом нуль относятся к τ_0 , а с индексом минус — к τ_- ; точками обозначены производные упомянутых величин по τ ; h — расстояние между искомой и известной поверхностями, отложенное вдоль N ; Φ — возмущение Φ . Функционалы Φ , ϕ — потенциалы простого слоя.

Неизвестной функцией в (1.5) является плотность q потенциала ϕ и число τ' . Поскольку при $\tau = \tau_-$ (в предыдущей по времени расчетной точке) обтекание тела с каверной уже найдено, вычисление Φ_- не доставляет принципиальных трудностей. При выводе (1.5) также предполагалось, что искомое время τ_+ (соответствующее длине каверны L_K) мало отличается от своего приближенного значения τ_0 (т. е. $|\tau'/\tau_*| \ll 1$). При каждой длине L_K значение τ_0 в начальном приближении подбирается так, чтобы минимизировать максимум невязки в (1.2), не уточняя еще формы S_c ; эта невязка в начальном приближении трактуется как функция только одного параметра τ_0 . В последующих приближениях к τ_0 прибавляются τ' .

Сингулярное интегральное уравнение (1.5) регуляризуется при помощи формулы Келдыша — Седова [11], из необходимого для ее использования дополнительного условия определяется τ' , а для построения нового приближения к границе каверны длины L_K используется (1.4) с условием $h(0) = 0$ на кавитаторе.

По сравнению с квазистационарным подходом объем вычислений растет как из-за необходимости при каждом $\tau > 0$ помнить не менее чем два поля Φ , так и из-за невозможности начинать расчет с любого τ — для того, чтобы определить Φ_- , приходится начинать расчет от некоторого стационарного кавитационного течения (тогда $\Phi_0 \equiv \Phi_-$).

2. Ниже приведены некоторые результаты расчетов обтекания диска при разных законах изменения $p(\tau)$ и $V(\tau)$. Рассмотрено три типа движений:

$$(2.1) \quad \alpha(\tau) = \beta, \quad \eta(\tau) = (1 + \beta\tau)^{-1}, \quad \sigma(\tau) = \sigma(0) \eta^2$$

$$(2.2) \quad \alpha(\tau) = 0, \quad \eta(\tau) = 1, \quad \sigma(\tau) = \sigma(0) (1 + \beta\tau)^{-2}$$

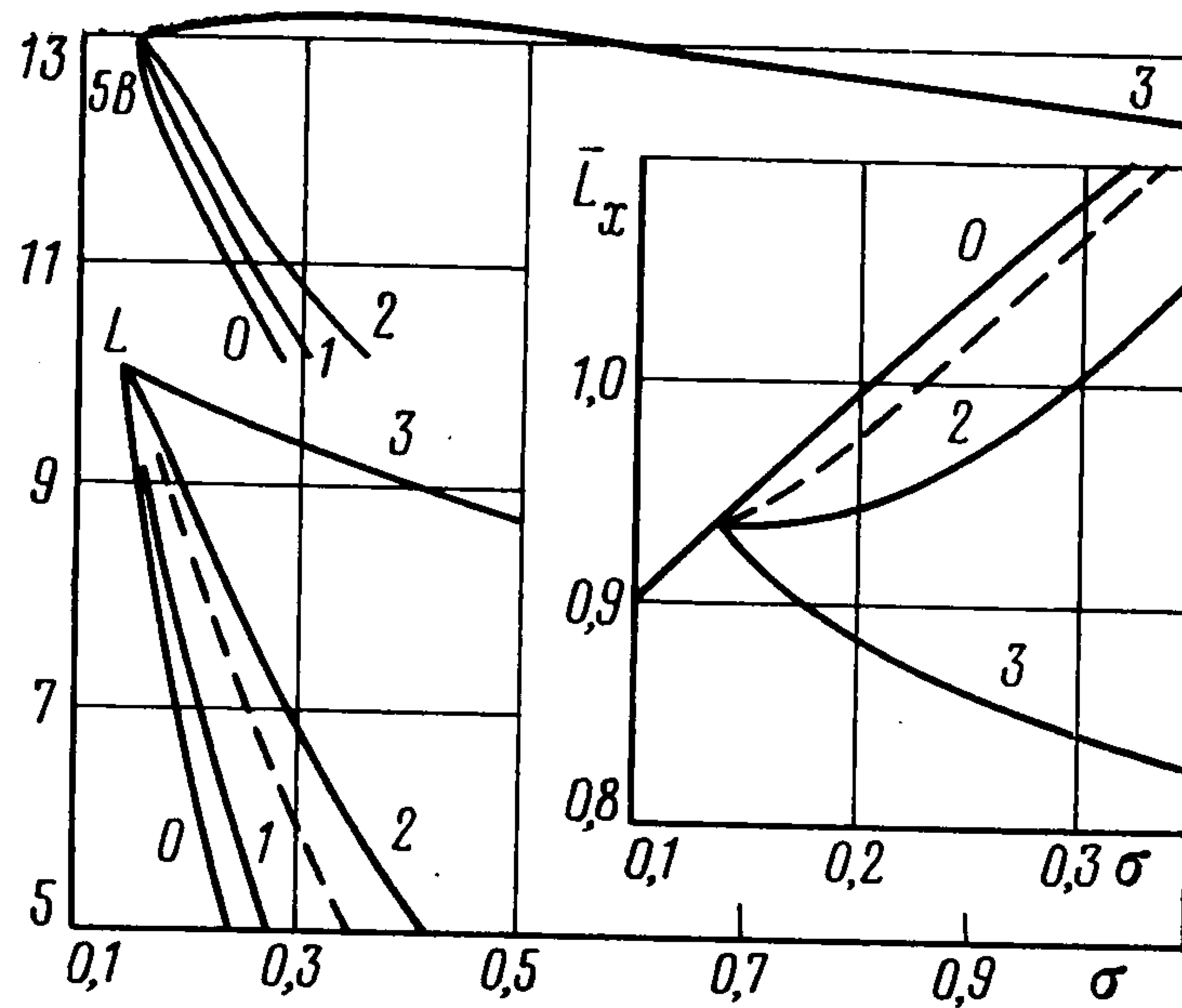
$$(2.3) \quad \alpha(\tau) = 0, \quad \eta(\tau) = 1, \quad \sigma(\tau) = \sigma(0) + A \sin(\omega\tau)$$

(β , A , ω — постоянные). При одинаковых β в движении (2.1) σ изменяется только за счет ускорения, а в (2.2) — только за счет изменения давления при постоянной скорости V . Во всех расчетах $\sigma(0) = 0,136$.

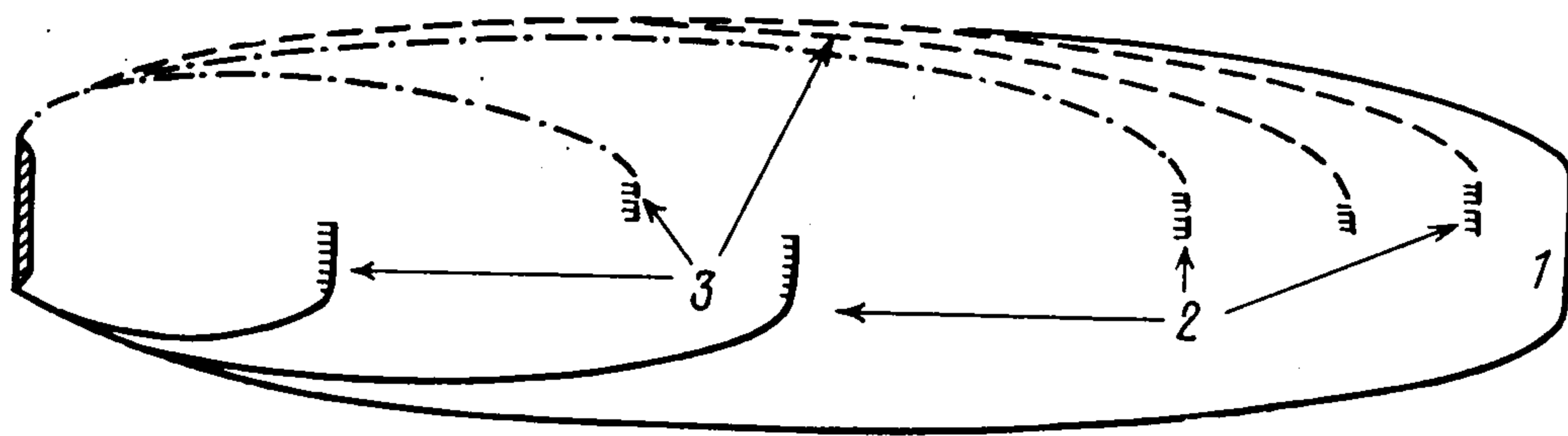
На фиг. 1 представлены зависимости длины каверны, ее ширины B и коэффициента сопротивления C_x от σ . Сплошные кривые 1, 2, 3 соответствуют торможению диска в режиме (2.1) при $\beta = -0,002$; $-0,02$; $-0,1$. Кривые 0 соответствуют результатам расчета по гипотезе квазистационарности. Штрихами приведены результаты для режима (2.2) при $\beta = -0,02$. Видно, что при режиме (2.2) каверны слабее отличаются от стационарных (при том же σ), причем незначительная разница в C_x объясняется слабым влиянием хвоста каверны на распределение давления по кавитатору. Ход представленных на фиг. 1 кривых $L(\sigma)$ и $B(\sigma)$ качественно соответствует результатам линейной теории [4, 5]; причем для рассчитанного в диссертации Г. И. Нестерука примера с $L/D > 10$ и $\beta = -0,1$ также имело место небольшое расширение каверны в начале движения (сопоставление каверн за разными телами при малых σ допустимо, поскольку форма каверн слабо зависит от формы кавитаторов).

На фиг. 2 сопоставлены формы каверн для режима (2.1) и одинаковых значений σ , но разных β : сплошные линии — стационарные каверны, штриховые — для $\beta = -0,1$, штрихпунктирные — для $\beta = -0,02$. Цифрам 1, 2, 3 соответствуют каверны при $\sigma = 0,136$, 0,25, 0,5.

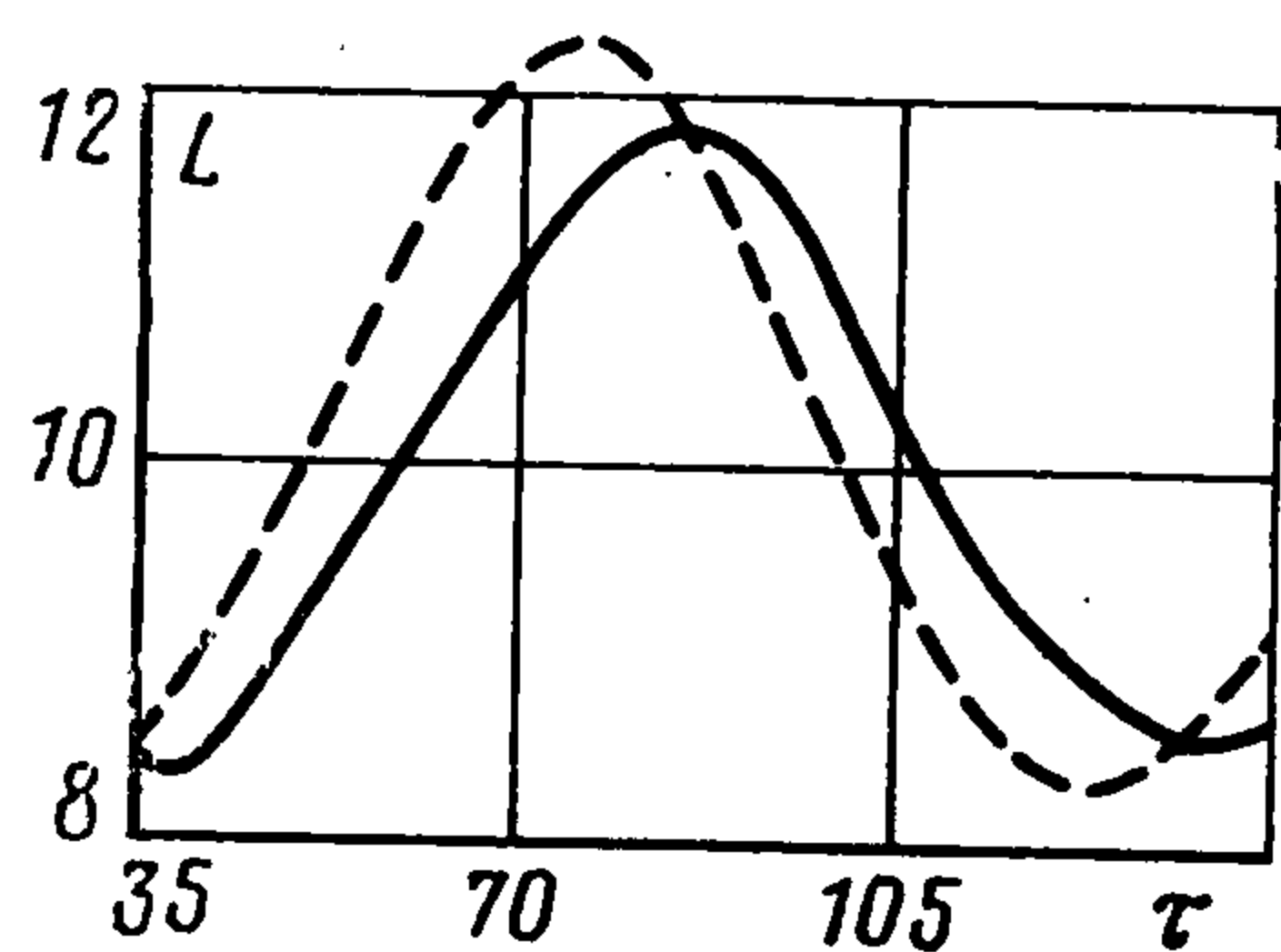
На фиг. 3 сплошной кривой представлены зависимости $L(\tau)$ для режима (2.3) при $A = 0,023$; $\omega = 0,063$, а штрихами нанесены результаты квазистационарного расчета при тех же $\sigma(\tau)$. На фиг. 4 приведены распределения величины $r = \frac{U^2}{1 + \sigma}$ вдоль



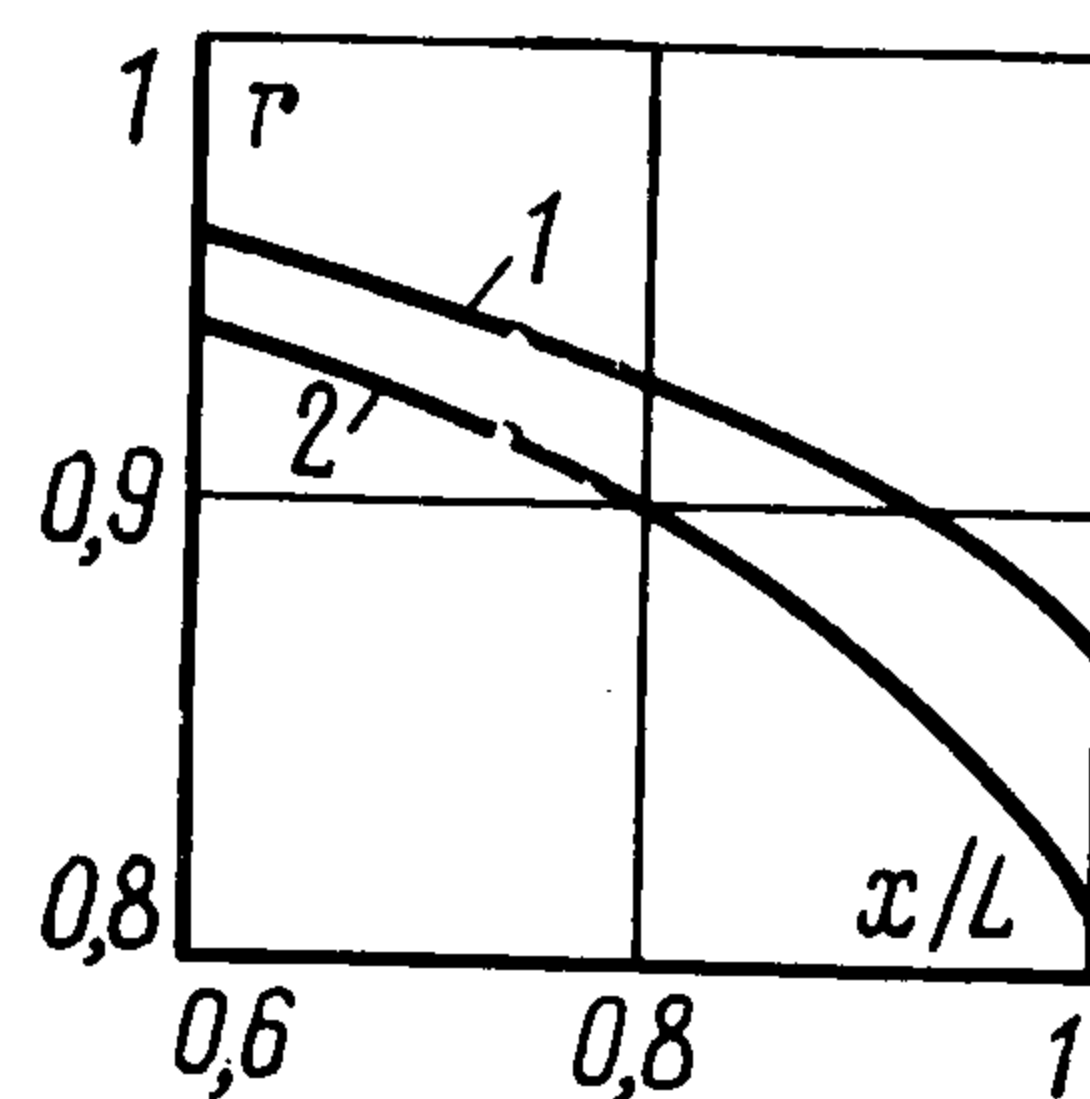
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

каверны для режима (2.1) при $\beta = -0,02$. Кривые 1, 2 соответствуют $\tau = 17$ и 23. Видимо, по значениям r удобнее всего судить о степени нестационарности каверн.

Надо добавить, что из-за уже упомянутой слабой зависимости форм каверн от форм кавитаторов представленные результаты расчетов нестационарных кавитационных течений допускают широкие обобщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А. В. Нестационарные возмущения течений жидкости со свободными границами. Казань: Изд-во Казанск. ун-та 1975, 144 с.
2. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными поверхностями. Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
3. Константинов Г. А., Якимов Ю. Л. Численный метод решения нестационарных осесимметричных задач гидромеханики идеальной жидкости со свободными поверхностями. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, с. 162—165.
4. Серебряков В. В. Расчет формы тонких осесимметричных каверн в нестационарном потоке для ряда характерных случаев обтекания. — Гидромеханика: сб. статей Киев: Наук. Думка, 1981, вып. 44, с. 86—94.
5. Нестерук Г. И. О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 4, с. 38—47.
6. Шимкович Д. М. Удар тела вращения, обтекаемого со срывом струй. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 6, с. 176—180.
7. Шифрин Э. Г., Шубников Г. В. Численный метод решения задачи нестационарного потенциального течения жидкости с перемещающимися границами. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982, т. 22, № 1, с. 163—170.
8. Иванов А. Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. Л: Судостроение, 1980. 237 с.

9. Поляков Н. Н. Теория нестационарных движений несущей поверхности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1960. 84 с.
10. Амромин Э. Л., Бушковский В. А., Дианов Д. И. Развитая кавитация за диском в вертикальной трубе. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, № 5, с. 181—184.
11. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.VIII.1984

УДК 532.529

СТАЦИОНАРНЫЕ СПЕКТРЫ ЧАСТИЦ В ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ С КООГУЛЯЦИЕЙ И РАСПАДОМ

Пискунов В. Н.

Рассматривается формирование стационарных распределений частиц по размерам (спектров частиц) в дисперсных системах с коагуляцией и распадом. Прослежена связь между различными вариантами кинетического уравнения, описывающего эти процессы. Получено аналитическое решение для параметрического семейства коэффициентов коагуляции и скоростей парного распада. Исследован стационарный спектр частиц в случае, когда распад носит множественный характер.

Кинетическое уравнение для коагуляции с распадом в случае, когда скорость поступления частиц в систему за счет распада линейна по их концентрации, впервые было сформулировано в работе [1]. Процесс распада может стабилизировать коагулирующую дисперсную систему и привести к формированию стационарных спектров. Некоторые аналитические результаты по поведению систем с коагуляцией и распадом получены в работах [2—5].

1. Изменение со временем t спектра частиц в пространственно-однородных системах с коагуляцией и распадом описывается кинетическим уравнением

$$(1.1) \quad \partial c(g, t) / \partial t = S(c; g, t) + Q(c; g, t)$$

где $c(g, t)$ — концентрация частиц массы g в единице объема (спектр частиц); оператор S описывает вклад в баланс процесса коагуляции, а оператор Q — вклад распада. Для коагуляции в результате бинарных столкновений, согласно теории Смолуховского (например, [6])

$$(1.2) \quad S(c; g, t) = \frac{1}{2} \int_0^g K(g-n, n) c(g-n) c(n) dn - c(g, t) \int_0^\infty K(g, n) c(n, t) dn$$

где $K(g, n)$ — коэффициенты коагуляции.

Для записи оператора Q существует две формы. Первая из них [1]

$$(1.3) \quad Q(c; g, t) = \int_g^\infty \gamma(g, n) c(n, t) dn - \frac{c(g, t)}{g} \int_0^g n \gamma(n, g) dn$$

Функция $\gamma(n, g)$ определяет скорость поступления в систему частиц массы n , образовавшихся при распаде частицы массы g . Ясно, что $\gamma(n, g) = 0$ при $n > g$. Величину $\gamma(n, g)$ удобно представить в виде [6]

$$(1.4) \quad \gamma(n, g) = \frac{\theta(n, g)}{\tau(g)}, \quad \int_0^g n \theta(n, g) dn = g$$

где $\tau(g)$ имеет смысл времени жизни частицы с массой g , а $\theta(n, g)$ определяет спектр частиц, образующихся при распаде. Интегральное условие в (1.4) — следствие сохранения суммарной массы в процессе распада. Другая форма записи оператора Q применима для распада на две частицы. Для дискретного варианта кинетического уравнения она предложена в [2], для непрерывного — в работе [5]

$$(1.5) \quad Q(c; g, t) = \int_g^\infty f(g, n-g) c(n, t) dn - \frac{c(g, t)}{2} \int_0^g f(g-n, n) dn$$