Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 539.3

КОНТИНУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИСЛОКАЦИЙ И ДИСКЛИНАЦИЙ В ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ

Повстенко Ю. З.

Получена система уравнений, описывающая подвижные дефекты в двумерном континууме Коссера, т. е. в среде, движение которой определяется как полем перемещения, так и независимым от него полем вращения.

Для трехмерной среды известны основные уравнения статической [1—5] и динамической [6—12] континуальной теории дефектов (дислокаций и дисклинаций), полученные при помощи разных подходов. Предложена [2, 13] дислокационная модель поверхностей рассогласования, использовавшаяся для описания мартенситных превращений. Дислокационные представления использовались [14—16] для описания границ зерен, рассматривались [17, 18] разностные дислокации в границах раздела. Дислокационная структура внутренних границ раздела описывалась [19, 20] с привлечением дифференциально-геометрических характеристик (тензоров кручения и кривизны, объекта неголономности) трехмерных сред. Рассматривались [21] поверхностные дислокации и дисклинации типа отдельных дисторсий Вольтерры; в качестве области приложения этих понятий указывались жидкие кристаллы и различные биологические объекты.

1. Поверхностный набла-оператор. Поверхность, вложенная в трехмерное евклидово пространство, определяется уравнениями $x^i = x^i(y^1, y^2)$, где y^α — криволинейные координаты на поверхности. В дальнейшем латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; греческие — 1, 2. Рассматривая радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки на поверхности как функцию координат y^α, введем векторы локального касательного базиса $\mathbf{a}_\alpha = \partial\mathbf{r}/\partial y^\alpha$ и нормали $\mathbf{n} = {}^1/_2\, \varepsilon^{\alpha\beta}\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta$, где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — компоненты поверхностного тензора Леви-Чевиты $\boldsymbol{\varepsilon}_\Sigma = \varepsilon^{\alpha\beta}\mathbf{a}_\alpha\mathbf{a}_\beta$.

Поверхностный набла-оператор [22]

$$\nabla_\Sigma = \mathbf{a}^\alpha \partial/\partial y^\alpha$$

позволяет для тензора $\mathbf{T}_\Sigma$, заданного на поверхности, определить операции поверхностного градиента, дивергенции и ротора

$$\mathrm{grad}_\Sigma\, \mathbf{T}_\Sigma \equiv \nabla_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma, \quad \mathrm{div}_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma \equiv \nabla_\Sigma \cdot \mathbf{T}_\Sigma, \quad \mathrm{rot}_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma \equiv \nabla_\Sigma \times \mathbf{T}_\Sigma$$

Правила действия поверхностного набла-оператора на произведения величин аналогичны правилам действия пространственного набла-оператора $\nabla = \mathbf{э}^k \partial/\partial x^k$ (например, [23]). Существенные отличия, обусловленные кривизной поверхности, появляются при повторном применении двумерного набла-оператора. Например, справедливы соотношения

$$\nabla_\Sigma \times (\nabla_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma) = \boldsymbol{\varepsilon}_\Sigma \cdot \mathbf{b} \cdot \nabla_\Sigma \mathbf{T}_\Sigma \tag{1.1}$$

$$\nabla_\Sigma \cdot (\nabla_\Sigma \times \mathbf{T}_\Sigma) = -2H\mathbf{n} \cdot (\nabla_\Sigma \times \mathbf{T}_\Sigma) + \nabla_\Sigma \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_\Sigma \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{T}_\Sigma) \tag{1.2}$$

тогда как в трехмерном случае

$$\nabla \times (\nabla \mathbf{T}) = 0, \ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{b} = b_{\alpha\beta}\mathbf{a}^\alpha\mathbf{a}^\beta$ — тензор второй квадратичной формы поверхности, $H = {}^1/_2 b_\alpha{}^\alpha$.— средняя кривизна поверхности.

2. Дефекты в трехмерном континууме Коссера. Чтобы облегчить изложение соответствующих результатов для двумерного континуума Коссера, приведем основные уравнения для трехмерной среды (например, [24—26]).

Несимметричные тензоры полной деформации γ и изгиба — кручения $\varkappa$ выражаются через векторы перемещения $\mathbf{u}$ и поворота $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\varkappa} = \nabla\boldsymbol{\omega}$$

и удовлетворяют условиям совместности, следующим из первой формулы (1.3)

$$\nabla \times \gamma - \varkappa^* + (\mathrm{tr}\,\varkappa)\,\mathbf{g} = 0 \quad (\mathrm{tr}\,\varkappa \equiv \mathbf{g} : \varkappa), \quad \nabla \times \varkappa = 0$$

Звездочка означает транспонирование, $\mathbf{g}$ — метрический тензор.

Представим величины γ и $\varkappa$ в виде суммы упругой и пластической составляющих, отмечаемых, соответственно, индексами e и p, и введем тензоры плотности дислокаций α и дисклинаций θ

(2.1) $$\alpha = -\nabla \times \gamma^p + \varkappa^{p*} - (\mathrm{tr}\,\varkappa^p)\,\mathbf{g}, \quad \theta = -\nabla \times \varkappa^p$$

удовлетворяющие на основании второго соотношения (1.3) условиям (ε — трехмерный тензор Леви-Чивиты)

(2.2) $$\nabla \cdot \alpha - \varepsilon : \theta = 0, \ \nabla \cdot \theta = 0$$
$$(\nabla_k \alpha^{km} - \varepsilon^{mij} \theta_{ij} = 0, \ \ \nabla_k \theta^{km} = 0)$$

Эти условия означают, что дисклинации не оканчиваются внутри тела, а дислокации могут оканчиваться на дисклинациях, плотность которых — асимметричный тензор [26].

В линайной теории (точка означает дифференцирование по времени)

(2.3) $$\gamma^{\cdot} = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{g} \times \mathbf{w}, \quad \varkappa^{\cdot} = \nabla \mathbf{w} \ (\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\cdot}, \ \mathbf{w} = \omega^{\cdot})$$

Тензоры потока дислокаций $\mathbf{J}$ и потока дисклинаций $\mathbf{S}$ вводятся следукшим сбразом [11]:

(2.4) $$\mathbf{J} = \gamma^{\cdot p} - \nabla \mathbf{v}^p - \mathbf{g} \times \mathbf{w}^p, \quad \mathbf{S} = \varkappa^{\cdot p} - \nabla \mathbf{w}^p$$

а из формул (2.1), (2.3), (2.4) получаем кинематические уравнения

(2.5) $$\alpha^{\cdot} = -\nabla \times \mathbf{J} + \mathbf{S}^* - (\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\,\mathbf{g}, \quad \theta^{\cdot} = -\nabla \times \mathbf{S}$$
$$(\alpha^{\cdot km} = -\varepsilon^{kij} \nabla_i J_{j\cdot}^{\ m} + S^{mk} - S_{i\cdot}^{\ i} g^{km}, \quad \theta^{\cdot km} = -\varepsilon^{kij} \nabla_i S_{j\cdot}^{\ m})$$

3. Дефекты в двумерном континууме Коссера. Несимметричные тензоры полной деформации γ_Σ и изгиба — кручения $\varkappa_\Sigma$ выражаются через векторы перемещения $\mathbf{u}_\Sigma$ и поворота ω_Σ

(3.1) $$\gamma_\Sigma = \nabla_\Sigma \mathbf{u}_\Sigma + \mathbf{a} \times \omega_\Sigma, \quad \varkappa_\Sigma = \nabla_\Sigma \omega_\Sigma$$

и на основании формулы (1.1) удовлетворяют условиям совместности ($\mathbf{a}$ — метрический тензор на поверхности)

(3.2) $$\nabla_\Sigma \times \gamma_\Sigma - \varepsilon_\Sigma \cdot \mathbf{b} \cdot \gamma_\Sigma + \mathbf{nn}\,\mathrm{tr}_\Sigma\,\varkappa_\Sigma - \mathbf{nn} \cdot \varkappa_\Sigma^* = 0$$
$$\nabla_\Sigma \times \varkappa_\Sigma - \varepsilon_\Sigma \cdot \mathbf{b} \cdot \varkappa_\Sigma = 0 \quad (\mathrm{tr}_\Sigma\,\varkappa_\Sigma \equiv \mathbf{a} : \varkappa_\Sigma)$$

Тензоры плотности поверхностных дислокаций α_Σ и дисклинаций θ_Σ

(3.3) $$\alpha_\Sigma = -\nabla_\Sigma \times \gamma_\Sigma^{\ p} + \varepsilon_\Sigma \cdot \mathbf{b} \cdot \gamma_\Sigma^{\ p} - \mathbf{nn}\,\mathrm{tr}_\Sigma \varkappa_\Sigma^{\ p} + \mathbf{nn} \cdot \varkappa_\Sigma^{p*}$$
$$\theta_\Sigma = -\nabla_\Sigma \times \varkappa_\Sigma^{\ p} + \varepsilon_\Sigma \cdot \mathbf{b} \cdot \varkappa_\Sigma^{\ p}$$

на основании равенств (1.2) удовлетворяют условиям

(3.4) $$\nabla_\Sigma \cdot \alpha_\Sigma + 2H\mathbf{n} \cdot \alpha_\Sigma = 0, \quad \nabla_\Sigma \cdot \theta_\Sigma + 2H\mathbf{n} \cdot \theta_\Sigma = 0$$

Определим поверхностные тензоры потока дислокаций $\mathbf{J}_\Sigma$ и потока дисклинаций $\mathbf{S}_\Sigma$

(3.5) $$\mathbf{J}_\Sigma = \gamma_\Sigma^{\cdot p} - \nabla_\Sigma \mathbf{v}_\Sigma^{\ p} - \mathbf{a} \times \mathbf{w}_\Sigma^{\ p}, \quad \mathbf{S}_\Sigma = \varkappa_\Sigma^{\cdot p} - \nabla_\Sigma \mathbf{w}_\Sigma^{\ p}$$

Тогда для $\alpha_\Sigma^{\cdot}$ и $\theta_\Sigma^{\cdot}$ получим двумерные аналоги уравнений (2.5)

(3.6) $$\alpha_\Sigma^{\cdot} = -\nabla_\Sigma \times \mathbf{J}_\Sigma + \varepsilon_\Sigma \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}_\Sigma - \mathbf{nn}\,\mathrm{tr}_\Sigma\,\mathbf{S}_\Sigma + \mathbf{nn} \cdot \mathbf{S}_\Sigma^*$$
$$\theta_\Sigma^{\cdot} = -\nabla_\Sigma \times \mathbf{S}_\Sigma + \varepsilon_\Sigma \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{S}_\Sigma$$

или в компонентах

(3.7) $$\alpha^{\cdot(n)\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha J_{\beta\cdot}^{\ \gamma} - b_{\alpha\cdot}^{\ \gamma} J_{\beta(n)}) + S^{\gamma(n)}$$
$$\alpha^{\cdot(n)(n)} = -\varepsilon^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha J_{\beta(n)} + b_{\alpha\gamma} J_{\beta\cdot}^{\ \gamma}) - S_{\alpha\cdot}^{\ \alpha}$$
$$\theta^{\cdot(n)\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha S_{\beta\cdot}^{\ \gamma} - b_{\alpha\cdot}^{\ \gamma} S_{\beta(n)})$$
$$\theta^{\cdot(n)(n)} = -\varepsilon^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha S_{\beta(n)} + b_{\alpha\gamma} S_{\beta\cdot}^{\ \gamma})$$

Отметим, что у тензоров γ_Σ, $\varkappa_\Sigma$, $\mathbf{J}_\Sigma$ и $\mathbf{S}_\Sigma$ первый индекс — поверхностный, второй общем случае,— пространственный, тогда как у тензоров α_Σ и θ_Σ первый индекс всегда относится к нормали к поверхности, а второй — пространственный.

С учетом указанной структуры тензоров α_Σ и θ_Σ заключаем, что уравнения (3.4) будут удовлетворяться тождественно: для двумерного континуума линии дислокаций и линии дисклинаций направлены по нормали к поверхности и естественно не оканчиваются внутри тела.

4. Векторы Бюргерса и Франка поверхностных дислокаций и дисклинаций. Векторы Бюргерса $\mathbf{b}_\Sigma$ и Франка $\mathbf{\Omega}_\Sigma$ определяются следующим образом:

$$[\mathbf{u}_\Sigma] = \oint\limits_{C_\Sigma} d\mathbf{u}_\Sigma = \mathbf{b}_\Sigma + \mathbf{\Omega}_\Sigma \times \mathbf{r}_{0\Sigma}, \quad [\mathbf{\omega}_\Sigma] = \oint\limits_{C_\Sigma} d\mathbf{\omega}_\Sigma = \mathbf{\Omega}_\Sigma \tag{4.1}$$

где C_Σ — контур Бюргерса, лежащий на поверхности, $\mathbf{r}_{0\Sigma}$ — радиус-вектор начала и конца отсчета на контуре C_Σ.

Поскольку $d\mathbf{u}_\Sigma = d\mathbf{r}\cdot\nabla_\Sigma\mathbf{u}_\Sigma$, $d\mathbf{\omega}_\Sigma = d\mathbf{r}\cdot\nabla_\Sigma\mathbf{\omega}_\Sigma$, то, используя формулы (3.1) и формулу Стокса, получаем

$$\mathbf{b}_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{n}\cdot[\nabla_\Sigma\times\gamma_\Sigma - (\nabla_\Sigma\times\varkappa_\Sigma)\times\mathbf{r} - \mathbf{nn}\cdot\varkappa_\Sigma{}^* + \mathbf{nn}\,\mathrm{tr}_\Sigma\,\varkappa_\Sigma]\,d\Sigma, \quad \mathbf{\Omega}_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{n}\cdot(\nabla_\Sigma\times\varkappa_\Sigma)\,d\Sigma \tag{4.2}$$

Подставляя в равенства (4.2) выражения (3.3) и учитывая, что $\mathbf{n}\cdot\mathbf{\varepsilon}_\Sigma\cdot\mathbf{b}\cdot\gamma_\Sigma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{\varepsilon}_\Sigma\cdot\mathbf{b}\cdot\varkappa_\Sigma = 0$, получаем двумерные аналоги соответствующих трехмерных формул для векторов Бюргерса и Франка поверхностных дефектов

$$\mathbf{b}_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{n}\cdot(\alpha_\Sigma - \theta_\Sigma\times\mathbf{r})\,d\Sigma, \quad \mathbf{\Omega}_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{n}\cdot\theta_\Sigma\,d\Sigma \tag{4.3}$$

Следуя терминологии работы [21], дислокации с векторами Бюргерса, лежащими в касательной плоскости (нормальными к поверхности), и дисклинации с векторами Франка, нормальными к поверхности (лежащими в касательной плоскости), назовем внутренними (внешними) дефектами.

5. Связь с неримановой геометрией. Трехмерный континуум. В пространстве аффинной связности для тензора $\mathbf{T}$ с компонентами $T^k_{.m}(\xi^i, \tau)$ определяется тензор $D\mathbf{T}$ с компонентами

$$(D\mathbf{T})^k_{.m} = \nabla_i T^k_{.m}\,d\xi^i$$

где ковариантная производная подсчитывается при помощи коэффициентов аффинной связности $\Gamma_{ij}{}^k$

$$\nabla_i T^k_{.m} = \partial T^k_{.m}/\partial\xi^i + \Gamma^k_{iq}T^q_{.m} - \Gamma^q_{im}T^k_{.q}$$

Величины $\Gamma_{ij}{}^k$, вообще говоря, несимметричны по нижним индексам, и антисимметричная часть $\Gamma^k_{[ij]}$ определяет тензор кручения $\Gamma^k_{[ij]} = S_{ij.}{}^k$.

Для тензора $\mathbf{V} = D'D\mathbf{T} - DD'\mathbf{T}$ справедливо соотношение ($R_{rsp.}{}^k$ — компоненты тензора кривизны)

$$V^k_{.m} = (R_{rsp.}{}^k T^p_{.m} - R_{rsm.}{}^p T^k_{.p})\,d\xi'^r\,d\xi^s \tag{5.1}$$

$$R_{rsp.}{}^k = 2\,(\partial_{[r}\Gamma^k_{s]p} + \Gamma^k_{[r|q|}\Gamma^q_{s]p}) \tag{5.2}$$

Тензоры кривизны и кручения удовлетворяют тождествам Бианки — Падова [27].

В геометрической теории дефектов тензору кручения $S_{pq.}{}^k$ ставится в соответствие тензор плотности дислокаций α^{mk} [1, 2], а тензору кривизны R_{pqrs} — тензор плотности дислокаций θ^{mk} [5]

$$\alpha^{mk} = \varepsilon^{mpq}S_{pq.}{}^k, \quad \theta^{mk} = {}^1\!/_4\varepsilon^{mpq}\varepsilon^{jrs}R_{pqrs}$$

и из тождеств Бианки — Падова следуют уравнения [5]

$$\nabla_k\alpha^{km} - \varepsilon^{mij}\theta_{ji} = \varepsilon_{ijk}\alpha^{ij}\alpha^{km}, \quad \nabla_k\theta^{km} = \varepsilon_{ijk}\alpha^{ij}\theta^{km}$$

представляющие собой нелинейное обобщение уравнений (2.2).

Следуя работе [12], введем тензор $D^\tau \mathbf{T}$ с компонентами

$$(D^\tau \mathbf{T})^k_{.m} = \nabla^\tau T^k_{.m}\, d\tau$$

$$\nabla^\tau \mathbf{T}^k_{.m} = T^{\cdot k}_{.m} + h_{q.}^{\ k} T^q_{.m} - h_{m.}^{\ q} T^k_{.q}$$

Компоненты тензора $h_{q\cdot}^{k}$ можно рассматривать как компоненты производных по времени векторов локального базиса в касательном пространстве в соответствующей точке. Чтобы не нагромождать обозначения, в данной работе компоненты тензоров в лагранжевом представлении записаны без «крышек».

Тензор $\mathbf{W} = D^\tau D\mathbf{T} - DD^\tau \mathbf{V}$ имеют следующие компоненты

$$W^k_{.m} = (P_{sq.}^{\ \ k} T^q_{.m} - P_{sm.}^{\ \ q} T^k_{.q})\, d\tau\, d\xi^s \tag{5.3}$$

где

$$P_{ik.}^{\ \ m} = \Gamma^{\cdot m}_{ik} - \nabla_i h_{k.}^{\ m} \tag{5.4}$$

Таким образом, в пространстве аффинной связности, свойства которого изменяются во времени, наряду с тензорами кривизны и кручения появляются две новые характеристики — тензоры $h_{k\cdot}^{m}$ и $P_{sk\cdot}^{\ \ m}$.

Из формул (5.2) и (5.4) получаем эволюционные уравнения для компонент тензоров кручения и кривизны

$$S^{\cdot}_{ik.}{}^{m} = \nabla_{[i} h_{k].}^{\ \ m} + P_{[ik].}^{\ \ \ m} \tag{5.5}$$

$$R^{\cdot}_{rsk.}{}^{m} = 2\,[\nabla_{[r} P_{s]k.}^{\ \ \ m} + \nabla_{[r}\nabla_{s]} h_{k.}^{\ m} + S_{rs\cdot}^{\ \ i}(P_{ik.}^{\ \ m} + \nabla_i h_{k.}^{\ m})]$$

В евклидовом пространстве $S_{ik\cdot}^{m} = 0$, $R_{rsk\cdot}^{m} = 0$, $P_{ik\cdot}^{m} = 0$, $h_{k\cdot}^{m} = \nabla_k v^m$, где v^m — компоненты вектора скорости, и из формулы (5.4) следует, что $\Gamma^{\cdot m}_{ik} = \nabla_i \nabla_k{}^m v$.

В общем случае, тензоры $h_{k\cdot}^{m}$ и $P_{sk\cdot}^{m}$ свяжем с потоком дислокаций $J_{k\cdot}^{m}$ и потоком дислокаций $S_{k\cdot}{}^{m}$.

$$J_{k.}^{\ m} = \nabla_k v^m - h_{k.}^{\ m}, \quad S_{k.}^{\ m} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{mpq} P_{kpq} \tag{5.6}$$

Выбор знака в этих формулах — вопрос условности. В данной работе, в отличие от 12], знак выбран так, чтобы знак величин $\mathbf{J}$ и $\mathbf{S}$ в последних формулах совпадал со знаком соответствующих величин в (2.4).

Из эволюционных уравнений (5.5) получим нелинейные уравнения континуальной теории подвижных дефектов [12]. При пренебрежении нелинейными слагаемыми из этих уравнений следуют уравнения (2.5).

6. Связь с неримановой геометрией. Двумерный континуум. Пусть на поверхности Σ с нормалью $\mathbf{n}$ задан тензор $\mathbf{T}_\Sigma$ с компонентами $T^\alpha_{\cdot\beta}(\eta^\gamma, \tau)$. Компоненты тензора $D\mathbf{T}_\Sigma$ имеют вид

$$(D\mathbf{T}_\Sigma)^\alpha_{\cdot\beta} = \nabla_\gamma T^\alpha_{\cdot\beta}\, d\eta^\gamma, \ (D\mathbf{T}_\Sigma)^{\alpha(n)} = T^\alpha_{\cdot\beta} b_{\gamma\cdot}^{\ \beta}\, d\eta^\gamma$$

$$(D\mathbf{T}_\Sigma)_{(n)\beta} = T^\alpha_{\cdot\beta} b_{\gamma\alpha}\, d\eta^\gamma$$

где ковариантная производная

$$\nabla_\gamma T^\alpha_{\cdot\beta} = \partial T^\alpha_{\cdot\beta}/\partial\eta^\gamma + G^\alpha_{\gamma\rho} T^\rho_{\cdot\beta} - G^\rho_{\gamma\beta} T^\alpha_{\cdot\rho}$$

подсчитывается при помощи несимметричных коэффициентов связности $G^\gamma_{\alpha\beta}$; коэффициенты второй квадратичной формы поверхности $b_{\alpha\beta}$ также, вообще говоря, несимметричны.

Определим тензор $D^\tau \mathbf{T}_\Sigma$ с компонентами

$$(D^\tau \mathbf{T}_\Sigma)^\alpha_{\cdot\beta} = \nabla^\tau T^\alpha_{\cdot\beta}\, d\tau, \ (D^\tau \mathbf{T}_\Sigma)^{\alpha(n)} = T^\alpha_{\cdot\beta} h^{\beta(n)}\, d\tau$$

$$(D^\tau \mathbf{T}_\Sigma)_{(n)\beta} = T^\alpha_{\cdot\beta} h_{\alpha(n)}\, d\tau$$

где

$$\nabla^\tau T^\alpha_{\cdot\beta} = T^{\cdot\alpha}_{\cdot\beta} + h^\alpha_{\rho\cdot} T^\rho_{\cdot\beta} - h^\rho_{\beta\cdot} T^\alpha_{\cdot\rho}$$

причем компоненты $h_{\alpha\cdot}^{\beta}$, $h^{\alpha(n)}$ тензора $\mathbf{h}_\Sigma$ можно рассматривать как компоненты производных по времени векторов локального касательного базиса и нормали к поверхности.

В случае римановой поверхности, вложенной в евклидово пространство, компоненты тензора $\mathbf{h}_\Sigma$ выражаются через компоненты вектора скорости [28]

$$h_{\alpha\cdot}^{\beta} = \nabla_\alpha v^\beta - b_{\alpha\cdot}^{\beta} v^{(n)}, \quad h_{\alpha(n)} = \nabla_\alpha v^{(n)} + b_{\alpha\beta} v^\beta$$

Для компонент тензора $\mathbf{W}_\Sigma = D^\tau D \mathbf{T}_\Sigma - DD^\tau \mathbf{T}_\Sigma$ справедливы выражения

(6.1)
$$W_{\cdot\beta}^{\alpha} = (P_{\gamma\rho\cdot}^{\ \ \alpha} T_{\cdot\beta}^{\rho} - P_{\gamma\beta\cdot}^{\ \ \rho} T_{\cdot\rho}^{\alpha})\, d\tau\, d\eta^\gamma$$
$$W^{\alpha(n)} = P_{\gamma\beta(n)} T^{\alpha\beta}\, d\tau\, d\eta^\gamma, \qquad W_{(n)\beta} = P_{\gamma\alpha(n)} T_{\cdot\beta}^{\alpha}\, d\tau\, d\eta^\gamma$$

где компоненты тензора $\mathbf{P}_\Sigma$ определяются соотношениями

(6.2)
$$P_{\alpha\beta\cdot}^{\ \ \gamma} = G_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} - \nabla_\alpha h_{\beta\cdot}^{\gamma} + b_{\alpha\cdot}^{\gamma} h_{\beta(n)} - b_{\alpha\beta} h^{\gamma(n)}$$
$$P_{\alpha\beta(n)} = b^{\cdot}_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha h_{\beta(n)} - b_{\alpha\rho} h_{\beta\cdot}^{\rho}.$$

Из формул (6.2) и выражения, аналогичного выражению (5.2), следуют эволюционные уравнения для компонент тензоров кручения и кривизны

(6.3)
$$S^{\cdot}_{\alpha\beta\cdot}{}^{\gamma} = P_{[\alpha\beta]\cdot}^{\ \ \gamma} + \nabla_{[\alpha} h_{\beta]\cdot}^{\gamma} - b_{[\alpha\cdot}^{\gamma} h_{\beta](n)} + b_{[\alpha\beta]} h^{\gamma(n)}$$
$$R^{\cdot}_{\alpha\beta\gamma\cdot}{}^{\delta} = 2\,[\nabla_{[\alpha} P_{\beta]\gamma\cdot}^{\ \ \delta} + \nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} h_{\gamma\cdot}^{\delta} - \nabla_{[\alpha} (b_{\beta]\cdot}^{\delta} h_{\gamma(n)}) + \nabla_{[\alpha} (b_{\beta]\gamma} h^{\delta(n)}) +$$
$$+ S_{\alpha\beta\cdot}^{\ \ \rho} (P_{\rho\gamma\cdot}^{\ \ \delta} + \nabla_\rho h_{\gamma\cdot}^{\delta} - b_{\rho\cdot}^{\delta} h_{\gamma(n)} + b_{\rho\gamma} h^{\delta(n)})]$$

Определим компоненты тензоров поверхностной плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha}_\Sigma$ и дисклинаций $\boldsymbol{\theta}_\Sigma$ следующим образом:

(6.4)
$$\alpha^{(n)\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta\cdot}^{\ \ \gamma}, \quad \alpha^{(n)(n)} = \varepsilon^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$$
$$\theta^{(n)\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} \nabla_\alpha b_{\beta\delta} + \varepsilon^{\gamma\beta} b_{\alpha\beta} \alpha^{(n)\alpha}$$
$$\theta^{(n)(n)} = {}^1/_3 \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} (R_{\alpha\beta\gamma\delta} - b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma} + b_{\beta\delta} b_{\alpha\gamma})$$

а величины $\mathbf{h}_\Sigma$ и $\mathbf{P}_\Sigma$ свяжем с тензорами поверхностных потоков дислокаций $\mathbf{J}_\Sigma$ и дисклинаций S_Σ

(6.5)
$$J_{\alpha\cdot}^{\beta} = \nabla_\alpha v^\beta - b_{\alpha\cdot}^{\beta} v^{(n)} - h_{\alpha\cdot}^{\beta}$$
$$J_{\alpha(n)} = \nabla_\alpha v^{(n)} + b_{\alpha\beta} v^\beta - h_{\alpha(n)}$$
$$S_{\alpha\cdot}^{\beta} = -\varepsilon^{\beta\gamma} P_{\alpha\gamma(n)}, \quad S_{\alpha(n)} = -{}^1/_2 \varepsilon^{\beta\gamma} P_{\alpha\beta\gamma}$$

Из уравнений (6.2), (6.3) с учетом формул (6.4), (6.5) получим нелинейные уравнения континуальной теории подвижных дефектов в двумерной среде

(6.6)
$$\alpha^{\cdot(n)\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha J_{\beta\cdot}^{\gamma} - b_{\alpha\cdot}^{\gamma} S_{\beta(n)}) + S^{\gamma(n)} - \alpha^{(n)\gamma} h_{\beta\cdot}^{\beta} -$$
$$- \alpha^{(n)\beta} (\nabla_\beta v^\gamma - b_{\beta\cdot}^{\gamma} v^{(n)}) + \varepsilon^{\beta\gamma} v_\beta \theta^{(n)(n)} - \varepsilon^{\beta\gamma} \theta_{(n)\beta} v^{(n)} + \alpha^{(n)(n)} h^{\gamma(n)}$$
$$\alpha^{\cdot(n)(n)} = -\varepsilon^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha J_{\beta(n)} + b_{\alpha\gamma} J_{\beta\cdot}^{\gamma}) - S_{\alpha\cdot}^{\alpha} - \alpha^{(n)(n)} h_{\beta\cdot}^{\beta} -$$
$$- \alpha^{(n)\beta} (\nabla_\beta v^{(n)} + b_{\beta\gamma} v^\gamma) + \varepsilon_{\beta\gamma} \theta^{(n)\beta} v^\gamma$$
$$\theta^{\cdot(n)\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha S_{\beta\cdot}^{\gamma} - b_{\alpha\cdot}^{\gamma} S_{\beta(n)}) - \theta^{(n)\gamma} h_{\beta\cdot}^{\beta} - \theta^{(n)\beta} h_{\beta\cdot}^{\gamma} -$$
$$- \alpha^{(n)\beta} S_{\beta\cdot}^{\gamma} + \theta^{(n)(n)} h^{\gamma(n)}$$
$$\theta^{\cdot(n)(n)} = -\varepsilon^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha S_{\beta(n)} + b_{\alpha\gamma} S_{\beta\cdot}^{\gamma}) - \alpha^{(n)\gamma} S_{\gamma(n)} -$$
$$- \theta^{(n)(n)} h_{\beta\cdot}^{\beta} - \theta^{(n)\alpha} h_{\alpha(n)}$$

При пренебрежении нелинейными слагаемыми из (6.6) следуют линейные уравнения (3.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kondo K.* On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding.— In: Proc. 2nd Jap. Nat. Congr. Appl. Mech. Tokyo: Sci. Council of Japan, 1952, p. 41—47.
2. *Bilby B. A., Bullough R., Smith E.* Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry.— Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1955, v. 231, No. 1185, p. 263—273.

3. *Kröner E.* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. B.: Springer, 1958. 179 S.
4. *Победря Б. Е.* О геометрической трактовке теории дислокаций.— Вестн. МГУ. Матем., механ., 1964, № 1, с. 69—75.
5. *Anthony K.-H.* Die theorie der disklinationen.— Arch. Ration. Mech. Analysis, 1970, v. 39, No. 1, p. 43—88.
6. *Косевич А. М.* Динамическая теория дислокаций.— Успехи физ. наук, 1964, т. 84, № 4, с. 579—609.
7. *Günther H.* Zur nichtlinearen kontinuumstheorie bewegter versetzungen. B.: Akademie-Verlag, 1967. 75 S.
8. *Бердичевский В. Л., Седов Л. И.* Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 6, с. 981—1000.
9. *Kluge G.* Zur Dynamik der allgemeinen Versetzungstheorie bei Berücksichtigung von Momentenspannungen.— Intern. J. Engng Sci., 1969, v. 7, No. 2, p. 169—182.
10. *Günther H.* Zur Kinematik von Disklinationen.— Phys. Stat. Solidi. Ser.B, 1972, v. 49, No. 2, p. 551—559.
11. *Kossecka E., deWit R.* Disclination kinematics.— Arch. Mech., 1977, v. 29, No. 5, p. 633—651.
12. *Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Об одном варианте нелинейных уравнений континуальной теории подвижных дефектов.— Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 2, с. 315—316.
13. *Bullough R., Bilby B. A.* Continuous distributions of dislocations: surface dislocations and the crystallography of martensitic transformations.— Proc. Phys. Soc. Sec. B, 1956, v. 69, No. 444, p. 1276—1286.
14. *Marcinkowski M. J., Sadananda K.* Unification of the coincidence-site-lattice and continuum theories of grain boundaries.— Acta Cryst. Ser. A., 1975, v. 31, No. 3, p. 280—292.
15. *Marcinkowski M. J.* Unified theory of grain boundaries.— Phys. Stat. Solid. Ser. A, 1982, v. 73, No. 2, p. 409—419.
16. *Marcinkowski M. J.* A new approach to the theory of grain boundaries.— J. Mater. Sci., 1983, v. 18, No. 3, p. 827—839.
17. *Брайнин Г. Э., Лихачев В. А., Стрельцов В. А.* Разностные дислокации в межфазных границах мартенситного типа.— Изв. вузов. Физика, 1981, № 6, с. 76—79.
18. *Брайнин Г. Э., Волков А. Е., Лихачев В. А.* Континуальное описание наследования дислокаций и образования разностных дислокаций при движении внутренних границ раздела.— Поверхность. Физика, химия, механика, 1983, № 7, с. 34—38.
19. *Marcinkowski M. J.* The differential geometry of grain boundaries: tilt boundaries.— Acta Cryst. Ser. A, 1977, v. 33, No. 6, p. 865—872.
20. *Marcinkowski M. J.* The differential geometry of internal surfaces.— Arch. Mech., 1979, v. 31, No. 6, p. 763—781.
21. *Harris W. F.* The geometry of disclinations in crystals.— In: Surface and Defect Properties of Solids, 1974, v. 3, p. 57—92.
22. *Weatherburn C. E.* Differential geometry of three dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. 268 p.
23. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
24. *Schaefer H.* Eine feldtheorie der versetzungen im cosserat-kontinuum.— Z. angew. Math. Phys., 1969, B. 20, No. 6, S. 891—899.
25. *Kluge G.* Über den Zusammenhang der allgemeinen versetzungstheorie mit dem cosserat-kontinuum.— Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg, 1969, B. 13, No. 5, S. 377—380.
26. *DeWit R.* Linear theory of static disclinations.— In: Fundamental aspects of dislocation theory. Washington: U. S. Government Printing Office, 1970, v. 1, p. 651—673.— Рус. перев.: М.: Мир, 1977, с. 7—31.
27. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.
28. *Повстенко Ю. З., Подстригач Я. С.* Дифференцирование по времени тензоров, заданных на поверхности, движущейся в трехмерном евклидовом пространстве.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 1038—1044.

Львов

Поступила в редакцию
22.X.1984