

УДК 539.376 + 532.135

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ТЕЛ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ**

Манжиров А. В.

Изучается двумерное интегральное уравнение, возникающее в осесимметричных контактных задачах для тел со сложной реологией. Предлагается метод построения решения этого уравнения, основанный на исследовании неклассических спектральных свойств интегрального оператора. В качестве примера приложений решается контактная задача для неоднородно-стареющего вязкоупругого основания.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$(1.1) \quad c(t) (\mathbf{I} - \mathbf{L}_1) q(r, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) \mathbf{F}q(r, t) = \delta(t) - g(r)$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{L}_k) f(t) = f(t) - \int_1^t f(\tau) K_k(t, \tau) d\tau \quad (k = 1, 2)$$

$$\mathbf{F}v(r) = \int_{\varepsilon}^1 v(\rho) k(\rho, r) \rho d\rho, \quad 0 \leq \varepsilon < 1$$

$$c(t) > 0, \delta(t) \in C[1, T]; g(r) \in L_2(\Omega);$$

$$q(r, t) \in L_2(\Omega) \times C[1, T]$$

при дополнительном условии

$$(1.2) \quad P(t) = \int_{\varepsilon}^1 q(r, t) r dr, \quad P(t) \in C[1, T]$$

Здесь  $K_k(t, \tau)$  — вольтерровские ядра [1], оператор  $\mathbf{F}$  — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из  $L_2(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$ ,  $\Omega$  — область, ограниченная окружностями радиусов  $\varepsilon$  и 1 (при  $\varepsilon = 0$   $\Omega$  — круг единичного радиуса), причем

$$(1.3) \quad \int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 k^2(\rho, r) r \rho dr d\rho < \infty$$

Заметим, что ядро интегрального оператора  $\mathbf{F}$  допускает представление [2]

$$(1.4) \quad k(r, \rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn} P_m^*(r) P_n^*(\rho)$$

где  $P_m^*(r)$  — полная ортонормированная в  $L_2(\Omega)$  система функций. Выберем ее следующим образом ( $P_m(x)$  — полином Лежандра):

$$(1.5) \quad P_m^*(r) = \sqrt{\frac{4m+2}{1-\varepsilon^2}} P_m\left(\frac{\varepsilon^2+1-2r^2}{1-\varepsilon^2}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\int_{\varepsilon}^1 P_m^*(r) r dr = \begin{cases} [(1-\varepsilon^2)/2]^{1/2}, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$

Кроме того, в силу (1.3) и равенства Парсеваля

$$(1.6) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}^2 < \infty$$

2. Найдем в (1.1), (1.2)  $q(r, t)$  и  $\delta(t)$ , считая оставшиеся функции заданными.

Введем пространство функций, принадлежащих  $L_2(\Omega)$ , таких, что интеграл от них по области  $\Omega$  равен нулю. Обозначим его  $L_2^\circ(\Omega)$ .

*Теорема 1.* Пространство  $L_2^\circ(\Omega)$  — полное гильбертово пространство, любая функция которого представима рядом по ортонормированной системе функций (1.5), начиная с первой.

Рассмотрим фундаментальную последовательность  $\{f_n\} \in L_2^\circ(\Omega)$ . В силу того что  $L_2^\circ(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ , последовательность  $\{f_n\}$  сходится по крайней мере к  $f \in L_2(\Omega)$ , т. е.

$$(2.1) \quad \|f - f_n\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon_0, \quad n > N$$

где  $\varepsilon_0$  — сколь угодно малое наперед заданное положительное число. Покажем, что  $f \in L_2^\circ(\Omega)$ . Имеем

$$(2.2) \quad \left| \int_{\Omega} f d\omega \right| = \left| \int_{\Omega} (f - f_n) d\omega + \int_{\Omega} f_n d\omega \right| \leq \\ \leq \int_{\Omega} |f - f_n| d\omega \leq \sqrt{\pi(1 - \varepsilon^2)} \|f - f_n\|_{L_2(\Omega)}$$

Но  $f$  от  $n$  не зависит, а тогда с учетом (2.1), (2.2) получим

$$\int_{\Omega} f d\omega = 0, \quad f \in L_2^\circ(\Omega)$$

Утверждение о представлении функций  $L_2^\circ(\Omega)$  следует из свойств  $P_m^*(r)$  (см. (1.5)).

*Теорема 2.* Ядро  $k(\rho, r)$  представимо в виде

$$k(\rho, r) = k^\circ(\rho, r) + [2/(1 - \varepsilon^2)]^{1/2} k^1(r) + [2/(1 - \varepsilon^2)]^{1/2} k^1(\rho) + \\ + [2/(1 - \varepsilon^2)] D$$

$$k^\circ(\rho, r) = k^\circ(r, \rho), \quad \int_{\varepsilon}^1 k^\circ(\rho, r) \rho d\rho = 0$$

$$k^1(r) \in L_2^\circ(\Omega), \quad D = \text{const}$$

Доказательство теоремы можно построить используя разложение (1.4), соотношения (1.5), равенство Парсеваля, оценку (1.6) и теорему 1.

Заметим только, что

$$(2.3) \quad k^\circ(\rho, r) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} r_{mn} P_m^*(\rho) P_n^*(r) \\ k^1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{0n} P_n^*(r), \quad D = r_{00}$$

*Теорема 3.* Оператор

$$F^\circ : F^\circ f(r) = \int_{\varepsilon}^1 f(\rho) k^\circ(\rho, r) \rho d\rho$$

вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из  $L_2^\circ(\Omega)$  в  $L_2^\circ(\Omega)$ .

Оператор  $F^\circ$  самосопряженный в силу (2.3), его полная непрерывность следует из оценки (см. (1.6))

$$\int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 [k^\circ(\rho, r)]^2 \rho r d\rho dr = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} r_{mn}^2 < \infty$$

а положительная определенность — из соотношения

$$(F^\circ f, f)_{L_2^\circ(\Omega)} = (Ff, f)_{L_2(\Omega)}, \quad f \in L_2^\circ(\Omega)$$

**Теорема 4.** Последовательность собственных функций  $\varphi_i^\circ$ , соответствующих собственным числам  $\alpha_i^\circ$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) оператора  $F^\circ$ , составляет ортонормированный базис в  $L_2^\circ(\Omega)$ .

Эта теорема является следствием общей теории операторов в гильбертовых пространствах [3].

**Теорема 5.** Последовательность  $\{\varphi_i^\circ\}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\varphi_0^\circ = [2/(1 - \varepsilon^2)]^{1/2}$ ) составляет ортонормированный базис в  $L_2(\Omega)$ .

Имеем

$$(2.4) \quad f(r) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i P_i^*(r) = f_0 P_0^*(r) + \sum_{i=1}^{\infty} f_i P_i^*(r)$$

В соответствии с теоремами 1,4 и (2.4)

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i P_i^*(r) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^\circ \varphi_i^\circ(r) \in L_2^\circ(\Omega)$$

$$f(r) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^\circ \varphi_i^\circ(r), \quad \varphi_0^\circ(r) = P_0^*(r), \quad f_0^\circ = f_0$$

что и требовалось доказать.

Представим решение в виде

$$(2.5) \quad q(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i(t) \varphi_i^\circ(r)$$

$$g(r) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i^\circ \varphi_i^\circ(r), \quad k^1(r) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \varphi_i^\circ(r)$$

Подставляя (2.5) в (1.1), (1.2), с учетом теорем 1—5 получим

$$z_i(t) = f_i(t) + \int_1^t f_i(\tau) R_i^\circ(t, \tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$f_i(t) = -[k_i(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) z_0(t) + g_i^\circ] / [c(t) + \alpha_i^\circ]$$

$$\delta(t) = [2/(1 - \varepsilon^2)]^{1/2} [c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1) z_0(t) +$$

$$+ D(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) z_0(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2) \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) k_i + g_0^\circ]$$

$$z_0(t) = [2/(1 - \varepsilon^2)]^{1/2} P(t)$$

где  $R_i^\circ(t, \tau)$  — резольвента ядра

$$K_i^\circ(t, \tau) = [c(t) K_1(t, \tau) + \alpha_i^\circ K_2(t, \tau)] / [c(t) + \alpha_i^\circ]$$

3. Допустим, что теперь заданы все функции, кроме  $q(r, t)$  и  $P(t)$ . Найдем их. Для этого воспользуемся классическим методом спектральной теории операторов [1—3].

Представим решение в виде

$$(3.1) \quad q(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(t) \varphi_i(r)$$

$$g(r) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \varphi_i(r), \quad 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \varphi_i(r)$$

где  $\varphi_i(r)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) — собственные функции оператора  $F$ , соответствующие его собственным числам  $\alpha_i$ .

Подставляя (3.1) в (1.1), (1.2), найдем

$$\omega_i(t) = \psi_i(t) + \int_1^t \psi_i(\tau) R_i(t, \tau) d\tau$$

$$\psi_i(t) = \frac{\delta_i \delta(t) - g_i}{c(t) + \alpha_i}, \quad P(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(t) \delta_i$$

где  $R_i(t, \tau)$  — резольвента ядра

$$K_i(t, \tau) = [c(t) K_1(t, \tau) + \alpha_i K_2(t, \tau)] / [c(t) + \alpha_i]$$

Можно доказать следующую теорему.

**Теорема 6.** В выбранном классе функций решение уравнения (1.1) при условии (1.2) существует, единственно и может быть найдено с наперед заданной степенью точности изложенными методами.

В отличие от известных методов представления решения в виде ряда по ортогональной системе полиномов или собственных функций оператора  $F$  метод п. 2 позволяет как избежать необходимости решения бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра, так и точно удовлетворить дополнительному условию. При заданном дополнительном условии (1.2) метод п. 2 позволяет строить решение уравнения (1.1) (при  $t = 1$  — уравнения Фредгольма второго рода) на спектре оператора  $F$  (по крайней мере, когда все его собственные числа простые). Последнее утверждение вытекает из формул п. 2, где в разложениях решения присутствуют только  $\alpha_i^0$ , отличные от собственных чисел  $\alpha_i$  оператора  $F$ . При произвольно заданной правой части уравнения (1.1) в полном соответствии с теорией интегральных уравнений построение решения на спектре  $F$  невозможно (см. формулы п. 3).

При непосредственной реализации алгоритмов пп. 1 и 2 удобно пользоваться представлением собственных функций в виде ряда по системе полиномов (1.5) с последующим их нахождением методом Бубнова — Галеркина [4].

Следует отметить, что родственные уравнения возникали в [5].

4. Перейдем к вопросам приложений. В теории ползучести неоднородно-стареющих тел [6, 7] ряд осесимметричных контактных задач приводит к интегральному уравнению (1.4) при дополнительном условии (1.2). Рассмотрим одну из них.

Допустим, что в поверхность двухслойного основания, состоящего из неоднородно-стареющего тонкого слоя [8] и однородно-стареющего слоя произвольной толщины  $H$ , вдавливается без трения силой  $P(t)$  жесткий штамп. Область контакта со временем не меняется и ограничена окружностями радиусов  $b$  и  $a$  ( $a > b$ ), форма основания штампа задается функцией  $g(r)$ . Тонкий слой толщины  $h$  лежит без трения на однородно-стареющем, покоящемся на недеформируемом основании. Используя результаты работ [8—11], с учетом замены переменных

$$(4.1) \quad \begin{aligned} t^* &= t\tau_1^{-1}, \quad \tau^* = \tau\tau_1^{-1}, \quad r^* = ra^{-1}, \quad \varepsilon = ba^{-1} \\ \kappa^*(z) &= \kappa(z) \tau_1^{-1}, \quad c(t) = 0,5 ha^{-1} \theta_2 (t - \tau_2) \theta_1^{-1}(t) \\ q^*(r^*, t^*) &= q(r, t) \theta_2^{-1}(t - \tau_2), \quad \delta^*(t^*) = \delta(t) a^{-1} \\ g^*(r^*) &= g(r) a^{-1}, \quad \lambda = Ha^{-1}, \quad k^*(\rho^*, r^*) = \\ &= k(rH^{-1}, \rho H^{-1}) \lambda^{-1}, \quad P^*(t^*) = [2\pi a^2 \theta_2 (t - \tau_2)]^{-1} P(t) \\ K_2^*(t^*, \tau^*) &= K_2(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_1, \quad K_1^*(t^*, \tau^*) = \\ &= \theta_2 (\tau - \tau_2) \theta_1(t) \theta_2^{-1}(t - \tau_2) \theta_1^{-1}(\tau) \tau_1 K_1^1(t, \tau) \end{aligned}$$

$$K_1^{-1}(t, \tau) = h^{-1} \int_0^h K_1(t + \kappa(z), \tau + \kappa(z)) dz$$

$$K_i(t, \tau) = E_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_i(\tau)} + C_i(t, \tau) \right] \quad (i = 1, 2)$$

$$[E_1^{-1}(t)]^{-1} = h^{-1} \int_0^h E_1^{-1}(t + \kappa(z)) dz$$

$$\theta_1(t) = 0,5 E_1^{-1}(t) / (1 - \nu_1^2), \quad \theta_2(t) = 0,5 E_2(t) / (1 - \nu_2^2)$$

( $t$  — текущий момент времени,  $\tau$  — переменная интегрирования в реальном масштабе времени,  $r$  — радиальная координата,  $\kappa(z)$  — функция неоднородного старения по глубине тонкого слоя,  $\tau_1$  — возраст элементов его нижней грани в момент приложения нагрузки,  $\rho$  — переменная интегрирования в реальном масштабе длин,  $q(r, t)$  — функция контактных давлений,  $\delta(t)$  — функция осадки,  $K_i(t, \tau)$ ,  $C_i(t, \tau)$ ,  $E_i(t)$ ,  $\nu_i$  — ядра и меры ползучести, модули упругомгновенной деформации и коэффициенты Пуассона верхнего ( $i = 1$ ) и нижнего ( $i = 2$ ) слоев,  $\tau_2$  — момент изготовления нижнего слоя,  $k(rH^{-1}, \rho H^{-1})$  — фредгольмово ядро контактной задачи), опуская звездочки в обозначениях, придем к исходной задаче п. 2. Следует отметить, что для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований [8, 11] задачи о внедрении круговых и кольцевых жестких штампов необходимо ведут к решению (1.1), (1.2).

В качестве иллюстрации метода решим поставленную контактную задачу в предположении, что пакет слоев изготовлен из бетона, а его нижняя грань сцеплена с жестким основанием. Считая упругие характеристики постоянными, возьмем следующие значения функций и параметров [10]:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau), \quad \varphi(\tau) = C_0 + A e^{-\beta_1 \tau}, \quad \beta = \beta_1 \tau_1$$

$$f(t - \tau) = (1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}), \quad \lambda = \lambda_1 \tau_1, \quad g(r) = 0, \quad \varepsilon = 0$$

$$c(t) = 0,2, \quad \lambda = 2, \quad C_0 E = 0,5522, \quad A E = 4$$

$$\tau_2 = 0, \quad \nu = 0,3, \quad \beta_1 = 0,031 \text{ сут}^{-1}, \quad \gamma_1 = 0,06 \text{ сут}^{-1}$$

Заметим, что при задании меры ползучести в форме [10] функции  $z_i(t)$  и  $\omega_i(t)$  отыскиваются в явном виде при помощи резольвенты ядра Н. Х. Арутюняна. Вид ядра контактной задачи при сцеплении по нижней грани основания и формула для коэффициентов его разложения получены в [11].

Рассмотрим случай естественного и искусственного неоднородного старения основания, введя параметр неоднородного старения [11] (далее приводятся безразмерные значения величин в соответствии с (4.1))

$$\mu = h^{-1} \int_0^h e^{-\beta \kappa(z)} dz$$

1. Естественное неоднородное старение (возраст элементов верхнего слоя уменьшается по высоте)

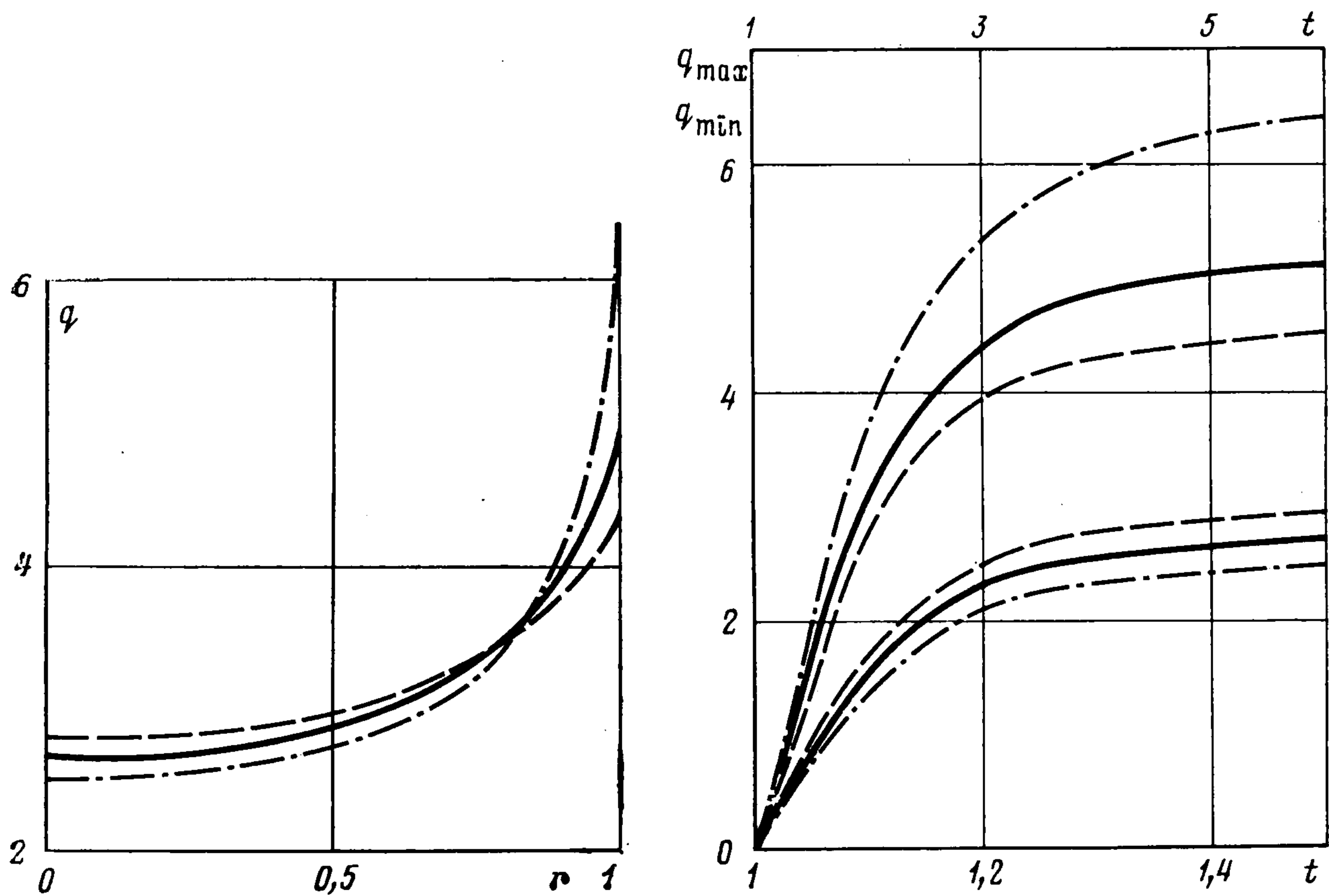
$$1 \leq \mu < e^\beta, \quad \tau_1 = 100 \text{ сут}, \quad P(t) = 1 - e^{10(1-t)}$$

2. Искусственное неоднородное старение (возраст элементов верхнего слоя растет по высоте)

$$0 < \mu \leq 1, \quad \tau_1 = 10 \text{ сут}, \quad P(t) = 1 - e^{(1-t)}$$

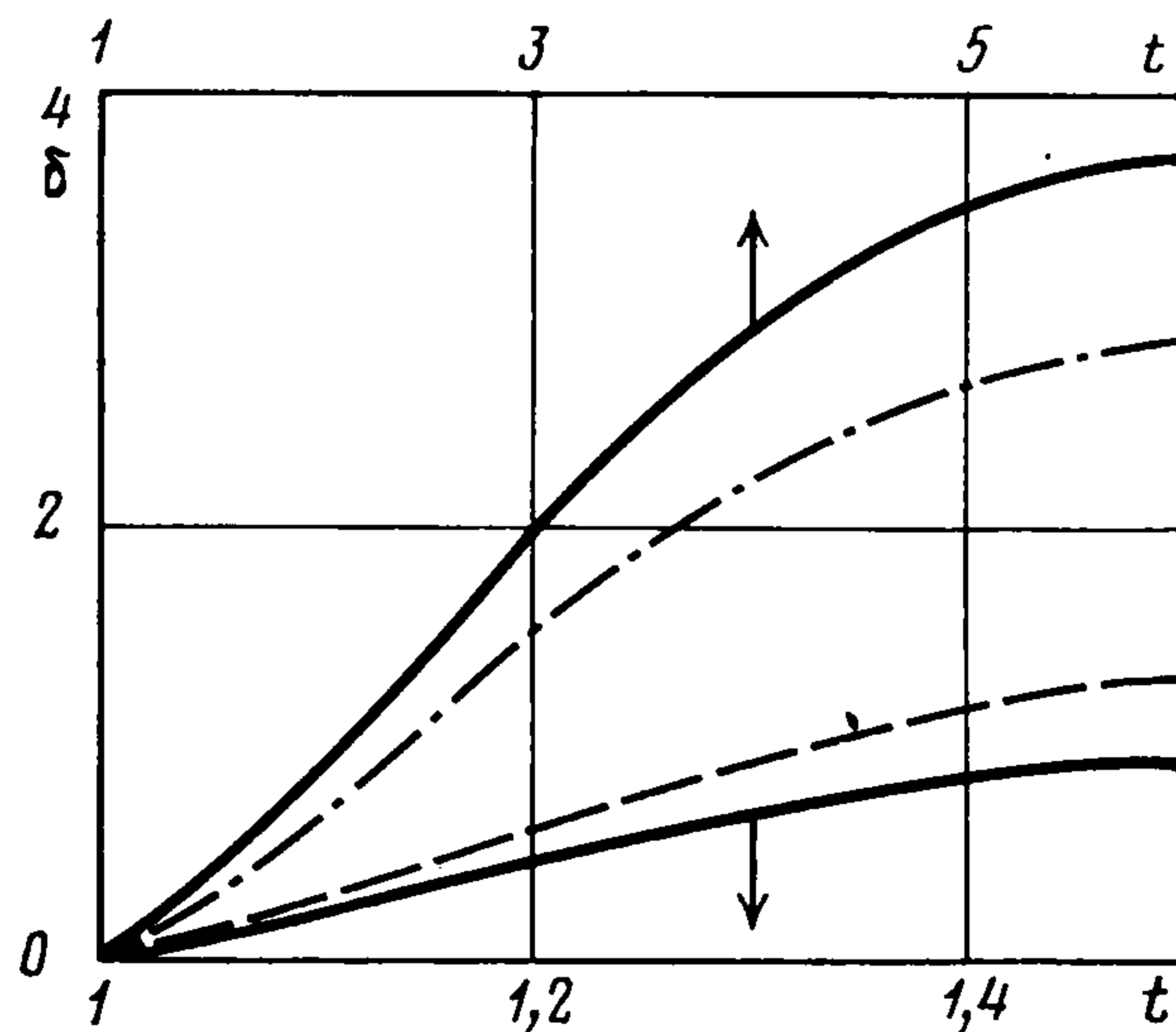
Отметим, что оба варианта включают, как предельные, случаи однородного старения пакета ( $\mu = 1$ ), которые характеризуются его возрастом в момент приложения нагрузки  $\tau_1$ .

На графиках, приводимых ниже, будем обозначать зависимости при  $\mu = 1$  (однородное старение) сплошными линиями, при  $\mu = 10$  (естественное неоднородное старение) — штриховыми линиями, а при  $\mu = 0, 1$  (искусственное неоднородное старение) —



Фиг. 1

Фиг. 2



Фиг. 3

штрихпунктирными. Штриховым линиям будет всегда соответствовать нижняя шкала безразмерного времени, а штрихпунктирным — верхняя.

На фиг. 1 показаны зависимости контактных напряжений  $q(r, t)$  от  $r$  для  $\mu = 10$ ,  $t = 1,5$ ;  $\mu = 0,1$ ,  $t = 6$ ;  $\mu = 1$  и тех же двух значений  $t$ . Последний случай описывается на фиг. 1 одной сплошной кривой; это говорит о том, что однородное старение пакета не влияет на распределение контактных давлений под штампом с плоским основанием. Напряжения не зависят от  $\tau_1$  и определяются функцией действующей силы  $P(t)$ , т. е. в моменты времени, в которые  $P(t)$  имеет одинаковые значения, распределения контактных напряжений совпадают.

Изменения максимальных и минимальных контактных напряжений по времени в зависимости от типа старения приведены на фиг. 2. Сплошные кривые по уже указанным причинам справедливы в обеих шкалах времени.

На фиг. 3 приведены зависимости осадки под штампом  $\delta(t)$  от времени  $t$  для различных случаев старения. Наличие двух сплошных кривых свидетельствует о существенном влиянии  $\tau_1$  на осадку  $\delta(t)$  при  $\mu = 1$ .

Результаты, приведенные для случая однородного старения, можно получить непосредственным применением принципа соответствия [10]. Здесь они рассмотрены только для более полной и ясной картины явления, а также с целью сравнения.

Сформулируем основные выводы этого пункта. Напряженное состояние под штампом в случае естественного неоднородного старения пакета слоев с течением времени становится все более равномерным по сравнению со случаем его однородного старения,

т. е. с точки зрения концентрации напряжений оно улучшается по времени. Осадка в случае естественного неоднородного старения всегда больше осадки для однородного варианта. Сравнивая однородное и искусственное неоднородное старение основания, следует отметить, что второе характеризуется более неравномерным (неблагоприятным с точки зрения концентрации) распределением контактных напряжений и меньшими значениями осадки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. Александров В. М., Коваленко Е. В. Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 58—66.
6. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
7. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3, с. 153—164.
8. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой.— ПМТФ, 1983, № 5, с. 153—158.
9. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
10. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
11. Манжиров А. В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 684—693.

Москва

Поступила в редакцию  
26 XII.1983