

УДК 624.073

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УТОЧНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ
ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ В ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ОСНОВАНИЙ**

Авилкин В. И., Александров В. М., Коваленко Е. В.

Приводится вывод уточненных уравнений осесимметричного деформирования тонкостенных упругих элементов (покрытий), основанный на асимптотическом анализе решения первой основной задачи теории упругости для слоя. Отличительной особенностью полученных соотношений от классических уравнений изгиба пластин Кирхгофа — Лява, Рейсснера — Тимошенко и их модификаций [1] является отсутствие сосредоточенных усилий на краю штампа при решении соответствующих контактных задач. Кроме того, выведенные формулы содержат в себе как частный случай уравнения классических теорий. Дается сравнение решений, полученных по различным прикладным теориям с соответствующим решением, найденным с использованием уравнений теории упругости, на примере осесимметричной контактной задачи о вдавливании кругового в плане штампа в слой, лежащий на основании Фусса — Винклера. Приводятся числовые расчеты характерных механических величин рассматриваемой задачи.

1. Известно [2], что в осесимметричных задачах решение уравнений теории упругости можно выразить через одну бигармоническую функцию $\chi(r, z)$

$$(1.1) \quad \Delta^2 \chi = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$(1.2) \quad 2Gu = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \quad 2Gw = \left[2(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \chi + D$$

$$(1.3) \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[2(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \chi, \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \chi$$

Рассмотрим первую краевую задачу о равновесии упругого слоя толщины $2h$, когда в результате приложения внешних нагрузок он деформируется симметрично оси z . Будем искать решение уравнения (1.1) в форме интеграла Ганкеля [3]

$$(1.4) \quad \chi = \int_0^\infty \xi \Phi(\xi, z) J_0(r\xi) d\xi, \quad \Phi = \int_0^\infty r \chi(r, z) J_0(r\xi) dr$$

Внося (1.4) в (1.1), после несложных математических выкладок найдем

$$(1.5) \quad \Phi(\xi, z) = (c_1 \operatorname{ch} \xi z + c_2 \xi z \operatorname{sh} \xi z + d_1 \operatorname{sh} \xi z + d_2 \xi z \operatorname{ch} \xi z) \xi^{-3}$$

где c_j и d_j ($j = 1, 2$) — функции от ξ , вид которых определяется из граничных условий поставленной задачи

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \sigma_z(r, h) &= \sigma_+(r), \quad \tau_{rz}(r, h) = \tau_+(r) \\ \sigma_z(r, -h) &= \sigma_-(r), \quad \tau_{rz}(r, -h) = \tau_-(r) \\ \sigma_z, \tau_{rz} &\rightarrow 0, \quad (r^2 + z^2) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Предположим, что функции $\sigma_\pm(r)$ и $\tau_\pm(r)$ в (1.6) удовлетворяют следующим условиям: во всяком конечном интервале $(0, R)$ $\sigma_\pm(r)$, $\tau_\pm(r)$ — функции ограниченной вариации и, кроме того, $r^3 \sigma_\pm(r)$, $r^2 \tau_\pm(r) \in L(0, \infty)$.

Тогда $\sigma_{\pm}(r)$, $\tau_{\pm}(r)$ можно представить в форме интегралов Ганкеля [3]

$$(1.7) \quad \sigma_{\pm}(r) = \int_0^{\infty} \xi \Sigma_{\pm}(\xi) J_0(r\xi) d\xi, \quad \tau_{\pm}(r) = \int_0^{\infty} \xi T_{\pm}(\xi) J_1(r\xi) d\xi$$

Подвергая далее (1.6) преобразованию Ганкеля, с учетом соотношений (1.2) — (1.5), (1.7) будем иметь

$$(1.8) \quad u_r' = -\frac{1}{2G} \int_0^{\infty} [(c_1 + c_2 + d_2 \xi z) \operatorname{sh} \xi z + \\ + (d_1 + d_2 + c_2 \xi z) \operatorname{ch} \xi z] J_0''(r\xi) \xi d\xi \\ w_r'' = -\frac{1}{2G} \int_0^{\infty} \{[d_1 - 2(1-2\nu)d_2 + c_2 \xi z] \operatorname{sh} \xi z + \\ + [c_1 - 2(1-\nu)c_2 + d_2 \xi z] \operatorname{ch} \xi z\} J_0''(r\xi) \xi^2 d\xi \\ c_j(\xi) = D_-^{-1} \{[\Sigma_+(\xi) - \Sigma_-(\xi)] C_j(\xi) + [T_+(\xi) + T_-(\xi)] S_j(\xi)\} \\ C_1(\xi) = -2\nu \operatorname{ch} \xi h - \xi h \operatorname{sh} \xi h, \quad C_2(\xi) = \operatorname{ch} \xi h \\ S_1(\xi) = (1-2\nu) \operatorname{sh} \xi h - \xi h \operatorname{ch} \xi h, \quad S_2(\xi) = \operatorname{sh} \xi h \\ d_j(\xi) = D_+^{-1} \{[\Sigma_+(\xi) + \Sigma_-(\xi)] S_j^*(\xi) + \\ + [T_+(\xi) - T_-(\xi)] C_j^*(\xi)\} \\ S_1^*(\xi) = -2\nu \operatorname{sh} \xi h - \xi h \operatorname{ch} \xi h, \quad S_2^*(\xi) = \operatorname{sh} \xi h \\ C_1^*(\xi) = (1-2\nu) \operatorname{ch} \xi h - \xi h \operatorname{sh} \xi h, \quad C_2^*(\xi) = \operatorname{ch} \xi h \\ D_{\pm}(\xi) = \operatorname{sh} 2\xi h \pm 2\xi h$$

Асимптотически с точностью до членов $O(\lambda^4)$ ($\lambda = ha^{-1} \rightarrow 0$), упрощая выражения (1.8), записанные в символах образов Ганкеля и возвращаясь затем к оригиналам в согласии с тем, что в контактных задачах $u \sim \tau h$, $w \sim \sigma h$ (см., например, вырожденные решения для слоя малой толщины [4]), запишем

$$(1.9) \quad 4Gh^2 \frac{1}{r} [r\Delta_1 u_{\pm}(r)]' = -\frac{(1-\nu)h}{r} \{[r(\tau_+ - \tau_-)]' - \\ - \frac{6h^2}{5} [r\Delta_1(\tau_+ - \tau_-)]'\} \mp 3(1-\nu)(\sigma_+ - \sigma_-) - \nu h^2 \Delta_0(\sigma_+ + \sigma_-) \pm \\ \pm (2-3\nu)h^2 \Delta_0(\sigma_+ - \sigma_-) \mp \frac{(1-\nu)h}{r} \{3[r(\tau_+ + \tau_-)]' - \\ - 2h^2 [r\Delta_1(\tau_+ + \tau_-)]'\} \\ 4Gh^3 \Delta_0^2 w_{\pm}(r) = 3(1-\nu) \left[\sigma_+ - \sigma_- - \frac{4h^2}{3} \Delta_0(\sigma_+ - \sigma_-) + \right. \\ \left. + \frac{11h^4}{15} \Delta_0^2(\sigma_+ - \sigma_-) \right] + \frac{3(1-\nu)h}{r} [r(\tau_+ + \tau_-)]' - \\ - \frac{(2-3\nu)h^3}{r} [r\Delta_1(\tau_+ + \tau_-)]' \pm \\ \pm \frac{\nu h^3}{r} [r\Delta_1(\tau_+ - \tau_-)]' \pm (1-\nu)h^4 \Delta_0^2(\sigma_+ + \sigma_-) \\ \Delta_i = d^2/dr^2 + r^{-1} d/dr - ir^{-2} \quad (i = 0, 1)$$

Отметим, что полученные уравнения (1.9) позволяют учесть как радиальные деформации растяжения и сдвига, так и деформации поперечного изгиба и сжатия упругой пластинки (покрытия).

Если при выводе уравнений (1.9) в силу малости параметра $\lambda = ha^{-1}$ провести усреднение перемещений по толщине, то придем к следующим упрощенным уравнениям деформирования пластинок:

$$(1.10) \quad 4Gh\Delta_1 u_* = -(1-\nu)(\tau_+ - \tau_-) + \frac{1-2\nu}{3} h^2 \Delta_1(\tau_+ - \tau_-) - \\ - \nu h(\sigma_+ + \sigma_-)'$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} Gh^3 \Delta_0^2 w_* &= (1 - \nu) (\sigma_+ - \sigma_-) - \frac{3 - 2\nu}{3} h^2 \Delta_0 (\sigma_+ - \sigma_-) + \\ &+ \frac{3 - 2\nu}{15} h^4 \Delta_0^2 (\sigma_+ - \sigma_-) + \frac{(1 - \nu) h}{r} \{ [r (\tau_+ + \tau_-)]' - \\ &- \frac{h^2}{3} [r \Delta_1 (\tau_+ + \tau_-)]' \} \end{aligned}$$

которые в отличие от (1.9) учитывают лишь радиальные деформации растяжения и поперечного изгиба. Здесь и ранее λ — безразмерный параметр, характеризующий относительную толщину слоя, a — радиус участка активного нагружения слоя, т. е. такого участка, где поверхностные нагрузки $\sigma_{\pm}(r)$ и $\tau_{\pm}(r)$ составляют, например, не менее 5% от их максимальных значений.

Полученные выражения (1.9), (1.10) представляют собой уточненные дифференциальные уравнения деформирования тонких покрытий. Пренебрегая во втором выражении (1.10) (либо (1.9)) в правой части слагаемыми порядка λ и выше, приходим к уравнению изгиба пластинки Кирхгофа — Лява [1]. Если же в (1.10) отбросить лишь слагаемое $O(\lambda^4)$, получим уравнение деформирования пластинки типа Рейсснера [1]. Опуская, наконец, в левой и правой частях второго равенства (1.9) слагаемые порядка λ^2 и выше, а в правой части первого соотношения члены порядка λ^3 (т. е. изгибной жесткостью покрытия пренебрегаем), будем иметь

$$(1.11) \quad \begin{aligned} 4Gh \Delta_1 u_{\pm} &= - (1 - \nu) (\tau_+ - \tau_-) - \nu h (\sigma_+ + \sigma_-)' \\ \sigma_+ - \sigma_- &= - hr^{-1} [r (\tau_+ + \tau_-)]' \end{aligned}$$

Выражения (1.11) представляют собой уравнения осесимметричного деформирования накладки Мелана. Из уравнений (1.9), (1.10) можно также получить уравнения оснований Фусса — Винклера и Пастернака — Власова.

Следует подчеркнуть, что при решении контактных задач использование уравнений (1.9), равно как и уравнений теории упругости, а также уравнений (1.10), не приводит к появлению на границах сопряжения участков сосредоточенных усилий. Этот недостаток, как известно [5—8], присущ дифференциальным уравнениям изгиба тонкостенных упругих элементов, полученных на основе гипотез Кирхгофа — Лява, Рейсснера — Тимошенко либо их модификаций.

Приведем ход доказательства отмеченного выше факта на примере уравнений (1.9). Возьмем круглую пластинку радиуса a толщины $2h$ со свободным от усилий торцом. Введем в рассмотрение осевое усилие, перерезывающую силу и изгибающий момент, действующие в сечении пластинки

$$(1.12) \quad T(r) = \int_{-h}^h \sigma_r dz, \quad Q(r) = \int_{-h}^h \tau_{rz} dz, \quad M(r) = \int_{-h}^h \sigma_{rz} dz$$

Используя условия равновесия пластины, можно показать, что $T(a) = Q(a) = M(a) = 0$, откуда уравнения (1.9) трансформируются в следующие:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} 4Gh^2 \Delta_1 u_{\pm} &= - \nu h^2 \Delta_1 P \pm 3(1 - \nu) Q \mp (2 - 3\nu) h^2 \Delta_1 Q + \\ &+ (1 - \nu) h \left\{ r^{-1} (rT)' - \frac{6h^2}{5} [r^{-1} (rT)'']' \right\} \mp \\ &\mp (1 - \nu) h \left\{ 3r^{-1} (rS)' - 2h^2 [r^{-1} (rS)'']' \right\} \\ 4Gh^3 (\Delta_0 w_{\pm})' &= - 3(1 - \nu) \left(Q - \frac{4h^3}{3} \Delta_1 Q + \frac{11h^4}{15} \Delta_1^2 Q \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3h(1-\nu)r^{-1}(rS)' - (2-3\nu)h^3[r^{-1}(rS)'']' \mp \\
& \mp \nu h^3[r^{-1}(rT)'']' \pm (1-\nu)h^4\Delta_1^2P \\
(1.14) \quad P(r) &= r^{-1} \int_0^r \rho(\sigma_+ + \sigma_-) d\rho, \quad S(r) = r^{-1} \int_0^r \rho(\tau_+ + \tau_-) d\rho
\end{aligned}$$

Решая систему четырех уравнений (1.13), убедимся, что функции (1.12), (1.14) будут непрерывными, если кусочно непрерывны функции $u_{\pm}(r)$ и $w_{\pm}(r)$.

Например, исключая из уравнений Q и S , получим

$$\begin{aligned}
& -\alpha_1^2\Delta_1[r^{-1}(rT)'] + r^{-1}(rT)' = \psi(r) \\
\alpha_1^2 &= \frac{6h^2}{5} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}; \quad \psi = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \left[h\Delta_1(u_+ + u_-) + \frac{\nu}{1-\nu}(w_+ - w_-)' \right] \\
\Delta_1P &= \frac{\nu}{(1-\nu)h} r^{-1}(rT)' + \frac{2G}{(1-\nu)h} (w_+ - w_-)'
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что T, P будут непрерывны, если u_{\pm}, w_{\pm} — кусочно-непрерывные функции.

Следовательно, сосредоточенные усилия будут отсутствовать при $r = a$. Важно также отметить, что если функции $u_{\pm}(r)$ и $w_{\pm}(r)$ в (1.9) имеют разрывы первого рода, то такого же типа разрывы будут иметь и напряжения $\sigma_{\pm}(r)$ и $\tau_{\pm}(r)$ и наоборот, причем эти разрывы взаимно связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
4Gu_{\pm} &= \frac{6h}{5}(1-\nu)(\tau_+ - \tau_-) \pm 2h(1-\nu)(\tau_+ + \tau_-) \\
4Gw_{\pm} &= \frac{11h}{5}(1-\nu)(\sigma_+ - \sigma_-) \pm h(1-\nu)(\sigma_+ + \sigma_-)
\end{aligned}$$

Таким же свойством обладают уравнения (1.10).

2. В качестве примера приложения выведенных выше уравнений рассмотрим осесимметричную задачу о вдавливании без трения силой P параболического штампа в упругий (G, ν) слой толщины $2h$, лежащий на основании Фусса — Винклера с коэффициентом постели l . Физико-механические свойства слоя будем описывать уравнениями: 1) теории упругости; 2) (1.9); 3) (1.10); 4) пластинок типа Рейсснера

$$(2.1) \quad 4Gh^3\Delta_0^2w_* = 3(1-\nu)(\sigma_+ - \sigma_-) - (3-2\nu)h^2\Delta_0(\sigma_+ - \sigma_-)$$

5) пластинок Кирхгофа — Лява

$$(2.2) \quad 4Gh^3\Delta_0^2w_* = 3(1-\nu)(\sigma_+ - \sigma_-)$$

Методом интегральных преобразований [4] изучаемые задачи могут быть сведены к нахождению неизвестных под штампом контактных давлений из следующего интегрального уравнения первого рода, записанного в безразмерном виде:

$$(2.3) \quad \int_0^1 \sigma(\rho) \rho k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) d\rho = \lambda(\delta - \gamma r^2) \quad (0 \leq r \leq 1)$$

$$k(\xi, z) = \int_0^{\infty} K(u) u J_0(u\xi) J_0(uz) du \quad \left(\xi = \frac{\rho}{\lambda}, z = \frac{r}{\lambda}\right)$$

$$\begin{aligned}
(2.4) \quad 1) \quad K(u) &= \frac{\operatorname{ch} 4u - 1 + nu(\operatorname{sh} 4u + 4u)}{[\operatorname{sh} 4u + 4u + nu(\operatorname{ch} 4u - 1 - 8u^2)]u} \\
2) \quad K(u) &= \frac{3(1+n) + 4(1+n)u^2 + \frac{16}{5}(\frac{11}{16} + n)u^4}{3 + 4u^2 + 4(\frac{4}{5} + n)u^4}
\end{aligned}$$

$$3) \quad K(u) = \frac{n [3 + mu^2 + (1/5) mu^4]}{3 + mu^2 + 4 [n + (1/20) m] u^4}$$

$$4) \quad K(u) = \frac{n (3 + mu^2)}{3 + mu^2 + 4nu^4}, \quad 5) \quad K(u) = \frac{3n}{3 + 4nu^4}$$

$$\lambda = ha^{-1}, \quad n = G [hl (1 - \nu)]^{-1}, \quad m = (3 - 2\nu) (1 - \nu)^{-1}$$

к которому необходимо добавить условие статики

$$(2.5) \quad P (1 - \nu) (Ga^2)^{-1} = R = 2\pi \int_0^1 \sigma(r) r dr$$

Используя далее подход, изложенный в [4], преобразуем уравнение (2.3), (2.4) в случае задачи 1) к эквивалентному ему интегральному уравнению первого рода с разностным ядром

$$(2.6) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\tau) k\left(\frac{\tau - t}{\lambda}\right) d\tau = \pi \lambda g(t) \quad (|t| \leq 1)$$

$$k(z) = \int_0^\infty L(u) \cos uz du, \quad K(u) = u^{-1} L(u)$$

$$(2.7) \quad g(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r(\delta - \gamma r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \delta - 2\gamma t^2$$

$$(2.8) \quad \sigma(r) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \left[r \int_r^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau \sqrt{\tau^2 - r^2}} \right]$$

Решение уравнения (2.6) получим в соответствии с формулой М. Г. Крейна [9]

$$(2.9) \quad \varphi(t) = \frac{1}{2M'(1)} \left[\frac{d}{db} \int_{-b}^b g(s, b) g(s) ds \right] g(t, 1) - \\ - \frac{1}{2} \int_{|t|}^1 g(t, \xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{M'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\xi}^{\xi} g(s, \xi) g(s) ds \right] d\xi \quad (b = 1, |t| \leq 1)$$

$$(2.10) \quad \int_{-s}^s g(\tau, s) k\left(\frac{\tau - t}{\lambda}\right) d\tau = \pi \lambda \quad (0 \leq s \leq 1)$$

$$M(\xi) = \int_0^\xi g(t, \xi) dt$$

Для определения неизвестной функции $q(t, s)$ из интегрального уравнения (2.10) аппроксимируем $L(u)$ в представлении его ядра (2.6), согласно первой формуле (2.4), выражением

$$(2.11) \quad L(u) = \frac{[(u^2 + \varepsilon^2)(u^2 + A^2 B^4)]^{1/2}}{u^2 + B^2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0, A = 1 + n)$$

Постоянная B находится таким образом, чтобы процентное расхождение аппроксимации (2.11) от функции $L(u) = uK(u)$ (2.4) при всех $0 \leq u < \infty$ было наименьшим.

Будем искать главный (нулевой) член асимптотики $q(t, s)$ при $\lambda \ll 1$ в виде [4]

$$(2.12) \quad q_\varepsilon(t, s) = \mu(\lambda) \omega\left(\frac{s+t}{\lambda}\right) \omega\left(\frac{s-t}{\lambda}\right) v^{-1}\left(\frac{t}{\lambda}\right)$$

причем $\omega(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют уравнениям (1.25), (1.26) работы [10] с заменой соответствующих функций во внутренних интегралах выраже-

нием (2.11). Внося полученные таким образом решения $\omega(t)$ и $v(t)$ в (2.12) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, запишем

$$(2.13) \quad g(t, s) = \mu(\lambda) \psi\left(\frac{s+t}{\lambda}\right) \psi\left(\frac{s-t}{\lambda}\right) \\ \psi(t) = \exp\left(-\frac{AB^2t}{2}\right) \left[I_0\left(\frac{AB^2t}{2}\right) (1+Bt) + Bt I_1\left(\frac{AB^2t}{2}\right) \right]$$

Здесь $I_\nu(t)$ — модифицированные функции Бесселя. Корректирующий множитель $\mu(\lambda)$ находится из первого соотношения (2.10) при $t=0$ и $s=1$ после подстановки в него равенства (2.13). Заметим, что выражение (2.11) аппроксимирует соответствующую функцию $L(u)$ при $n < 4$ с погрешностью не более 20%. Погрешность получаемого на этой основе решения не превосходит погрешности аппроксимации и уточняется введением корректирующего множителя $\mu(\lambda)$ [4].

Неизвестный радиус области контакта штампа со слоем определим из условия $\sigma(1) = 0$, которое согласно (2.7) — (2.9) можно представить в форме

$$(2.14) \quad \delta M_1'(1) - \gamma M_2'(1) = 0$$

$$(2.15) \quad M_1(x) = \frac{1}{2} \int_{-x}^x g(s, x) ds = \lambda \mu(\lambda) \left\{ \frac{x^2}{A\lambda^2} + \right. \\ \left. + \frac{2AB-1}{A^2B^2} \cdot \frac{x}{\lambda} + \frac{(1-AB)^2}{2A^3B^4} \left[1 - \exp\left(-\frac{AB^2x}{\lambda}\right) \right] \right\} \\ M_2(x) = \int_{-x}^x g(s, x) s^2 ds = \lambda^3 \mu(\lambda) \left\{ \frac{x^4}{2A\lambda^4} + \frac{2AB-1}{A^2B^4} \frac{x^3}{\lambda^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{AB^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{AB} + \frac{2}{A^2B^2} \right) \frac{x^2}{\lambda^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{A^2B^4} \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{AB} - \frac{3}{A^2B^2} \right) \frac{x}{\lambda} + \right. \\ \left. + \frac{1}{A^3B^6} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{AB} + \frac{9}{4A^2B^2} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{2AB^2x}{\lambda}\right) \right] + \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{2AB^2x}{\lambda}\right) \left[\frac{1}{A^2B^4} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{AB} - \frac{3}{2A^2B^2} \right) \frac{x}{\lambda} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{AB^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{AB} - \frac{1}{2A^2B^2} \right) \frac{x^2}{\lambda^2} \right] \right\}$$

Наконец, подстановка (2.8), (2.9), (2.13) в условие равновесия (2.5) дает

$$R = 4 [\delta M_1(1) - \gamma M_2(1)]$$

Рассмотрим теперь задачи 2) и 3). В силу того что для этих случаев символ ядра $K(u)$ (2.4) интегрального уравнения (2.3) представляет собой рациональную функцию, оно решается в замкнутом виде. Действительно, запишем ядро (2.3) в форме [4]

$$(2.16) \quad k(\zeta, z) = c\lambda^2 \delta^*(\zeta, z) + \sum_{k=1}^2 \gamma_k s_k \begin{cases} I_0(\zeta \gamma_k) K_0(z \gamma_k) & (\rho < r) \\ K_0(\zeta \gamma_k) I_0(z \gamma_k) & (\rho > r) \end{cases} \\ s_k = c \frac{(z_1^2 - \gamma_k^2)(z_2^2 - \gamma_k^2)}{(\gamma_j^2 - \gamma_k^2) \gamma_k} \quad (j=1, 2; k \neq j) \\ c = (4A - 5/4) (5A - 1)^{-1}, \quad A = 1 + n \quad (\text{задача 2}) \\ c = mA (20A + m)^{-1}, \quad A = n \quad (\text{задача 3})$$

Здесь $\gamma_k = -i\delta_k$, $z_k = -i\zeta_k$, δ_k и ζ_k — соответственно, полюсы и нули функций $K(u)$ (2.4) 2), 3), лежащие в верхней полуплоскости. Функция

$\delta^*(\zeta, z)$ в (2.16) соответствует сингулярной части ядра и равна

$$\delta^*(\zeta, z) = \int_0^\infty u J_0(u\zeta) J_0(uz) du$$

причем она обладает основным свойством дельта-функции:

$$\int_0^a \delta^*(\zeta, z) z \varphi(z) dz = \varphi(\zeta) \quad (0 \leq \zeta \leq a)$$

Будем искать решение уравнения (2.3) в виде

$$(2.17) \quad \sigma(r) = \lambda \lim [\delta\sigma(\varepsilon, r) + 2\gamma\partial^2\sigma(\varepsilon, r)/\partial\varepsilon^2] \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

где $\sigma(\varepsilon, r)$ — решение уравнения (2.3) с возмущенной правой частью $I_0(\varepsilon r)$, представимое в форме [4]

$$(2.18) \quad \sigma(\varepsilon, r) = X_0 J_0(\varepsilon r) + \sum_{j=1}^{21} X_j I_0\left(\frac{z_j r}{\lambda}\right)$$

Внося в интегральное уравнение (2.3) с правой частью $J_0(\varepsilon r)$ функции $k(\zeta, z)$ и $\sigma(\varepsilon, r)$ (2.16), (2.18) и приравнявая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при $J_0(\varepsilon r)$ и $I_0(z_j r/\lambda)$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно X_j

$$(2.19) \quad a_{1j}X_1 + a_{2j}X_2 = b_j X_0 \quad (j = 1, 2), \quad X_0 = \lambda^{-2} A^{-2}$$

$$a_{kj} = \frac{1}{z_k^2 - \gamma_j^2} [z_k K_0(g_j) I_1(p_k) + \gamma_j K_1(g_j) I_0(p_k)]$$

$$b_k = \frac{1}{\gamma_k^2 + \varepsilon^2 \lambda^2} [\gamma_k K_1(g_k) J_0(\varepsilon) - \lambda \varepsilon K_0(g_k) J_1(\varepsilon)]$$

$$g_k = \frac{\gamma_k}{\lambda}, \quad p_k = \frac{z_k}{\lambda_j}$$

Решая систему (2.19) и принимая в расчет формулы (2.17), (2.18), запишем

$$(2.20) \quad \lambda A \sigma(r) = \delta - \gamma r^2 + \frac{1}{D} \left\langle \left\{ \frac{\delta - \gamma}{\gamma_1} K_1(g_1) - \frac{2\gamma\lambda}{\gamma_1^2} \left[K_0(g_1) + \frac{2\lambda}{\gamma_1} K_1(g_1) \right] \right\} [a_{22} I_0(p_1 r) - a_{12} I_0(p_2 r)] + \left\{ \frac{\delta - \gamma}{\gamma_2} K_1(g_2) - \frac{2\gamma\lambda}{\gamma_2^2} \left[K_0(g_2) + \frac{2\lambda}{\gamma_2} K_1(g_2) \right] \right\} [a_{11} I_0(p_2 r) - a_{21} I_0(p_1 r)] \right\rangle, \quad D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Неизвестный радиус контакта штампа с пластинкой найдем из условия $w_+^{(4)}(1) = 0$, которое эквивалентно $\sigma(1) = 0$, а усилие, действующее на штамп, определим из соотношения (2.5), подставив в него значения напряжений (2.20).

Будем описывать теперь физико-механические свойства тонкого слоя при помощи уравнений пластинок типа Рейсснера (2.1). Тогда формулы (2.3), (2.4) дадут

$$(2.21) \quad k(\zeta, z) = \sum_{k=1}^2 \gamma_k s_k \begin{cases} I_0(\zeta \gamma_k) K_0(z \gamma_k) & (\rho < r) \\ K_0(\zeta \gamma_k) I_0(z \gamma_k) & (\rho > r) \end{cases}$$

$$(2.22) \quad s_k = \frac{m}{4} \frac{z_1^2 - \gamma_k^2}{(\gamma_j^2 - \gamma_k^2) \gamma_k} \quad (k, j = 1, 2; k \neq j)$$

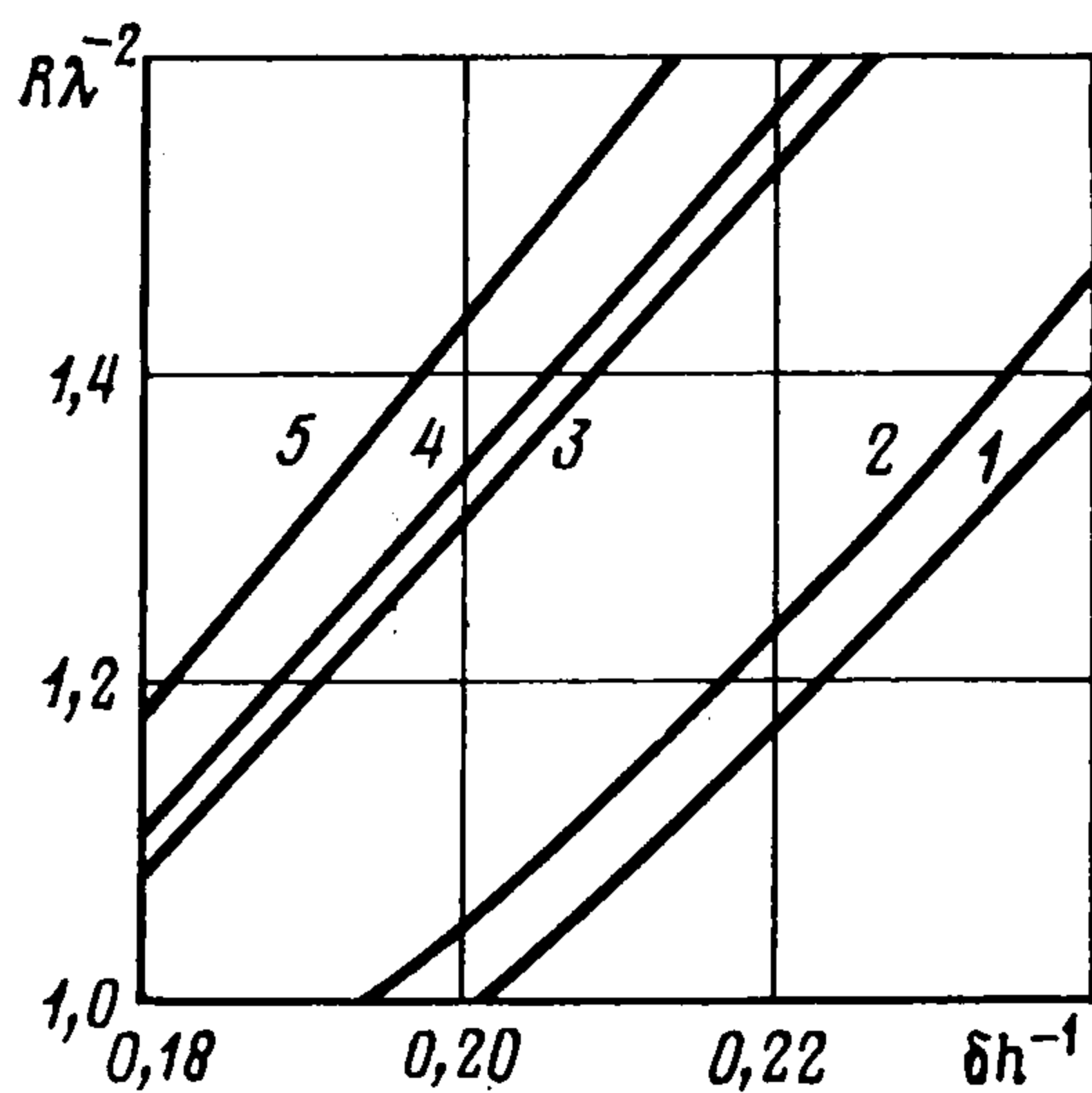
На основании (2.21), (2.22), как и выше, из интегрального уравнения (2.3) и условия статики (2.5) найдем

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \lambda n \sigma(r) = & \delta - \gamma r^2 + \frac{1}{a_{12}} I_0(p_1, r) \left\{ \frac{\delta - \gamma}{\gamma_2} K_1(g_2) - \right. \\ & \left. - \frac{2\gamma\lambda}{\gamma_2^2} \left[K_0(g_2) + \frac{2\lambda}{\gamma_2} K_1(g_2) \right] \right\} \\ \frac{\lambda n}{2\pi} R = & \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{a_{12} p_1} I_1(p_1) \left\{ \frac{\delta - \gamma}{\gamma_2} K_1(g_2) - \right. \\ & \left. - \frac{2\gamma\lambda}{\gamma_2^2} \left[K_0(g_2) + \frac{2\lambda}{\gamma_2} K_1(g_2) \right] \right\} \end{aligned}$$

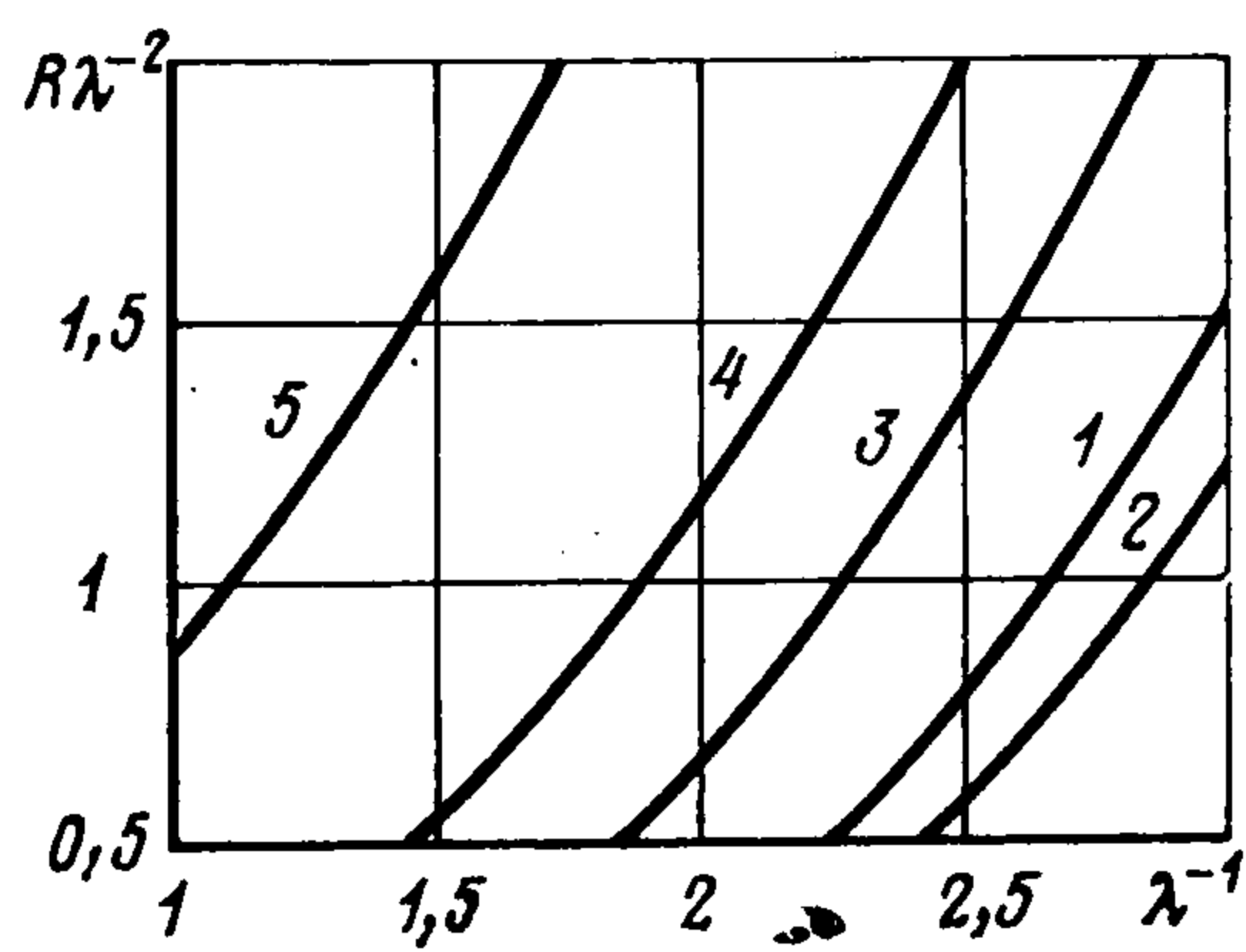
Для нахождения неизвестной области контакта в этом случае следует воспользоваться соотношением $w_*''(1) = 0$, которое равносильно отсутствию сосредоточенных усилий при $r = 1$ ($Q(1) = 0$, см. (1.12)). Из (2.3), (2.23) будем иметь

$$\sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{1}{a_{1j}} \left\{ \frac{\delta - \gamma}{\gamma_j} K_1(g_j) - \frac{2\gamma\lambda}{\gamma_j^2} \left[K_0(g_j) + \frac{2\lambda}{\gamma_j} K_1(g_j) \right] \right\} = 0$$

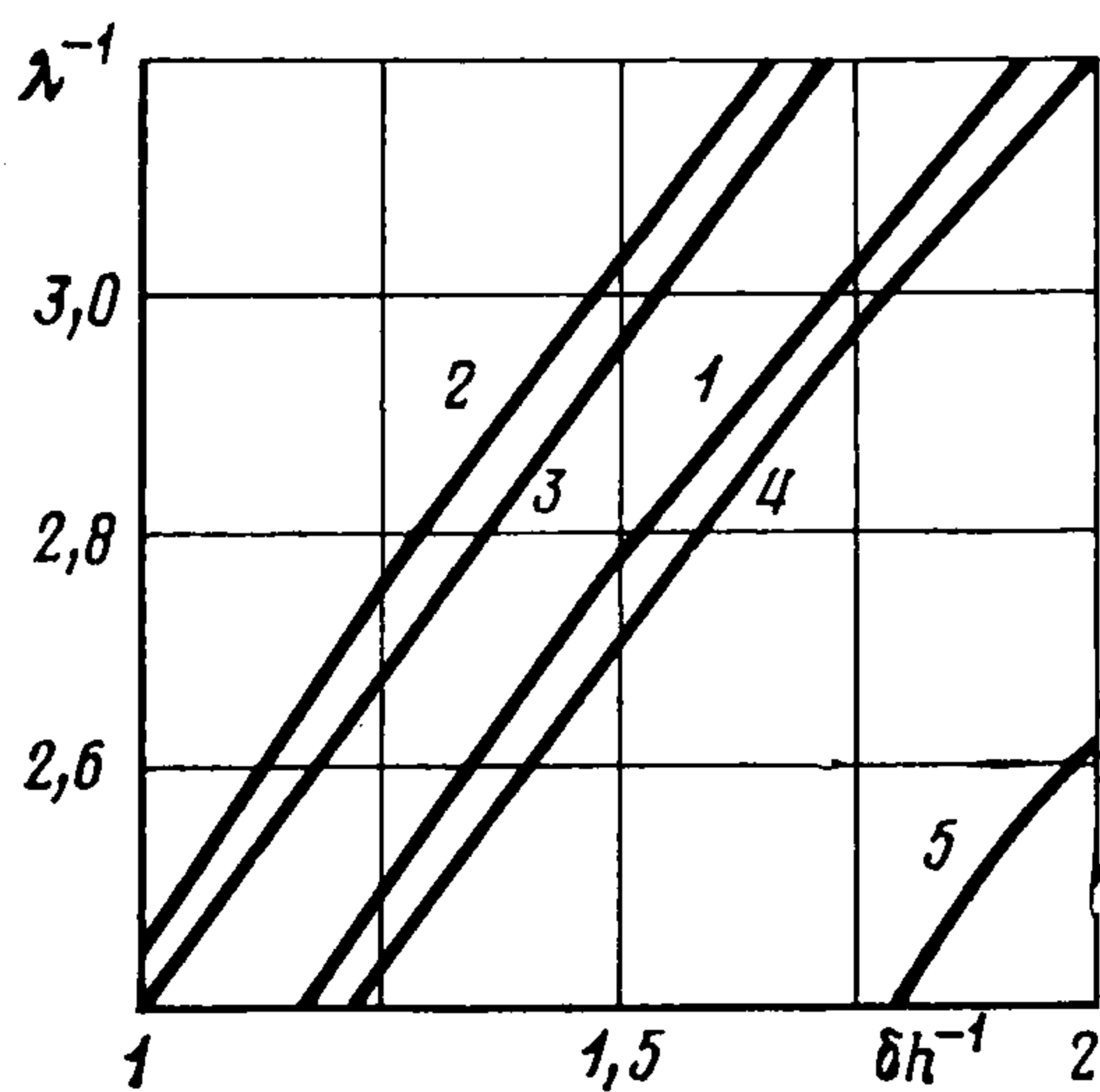
Наконец, рассмотрим решение поставленной задачи, когда механические свойства слоя моделируются уравнениями изгиба пластин Кирхго-



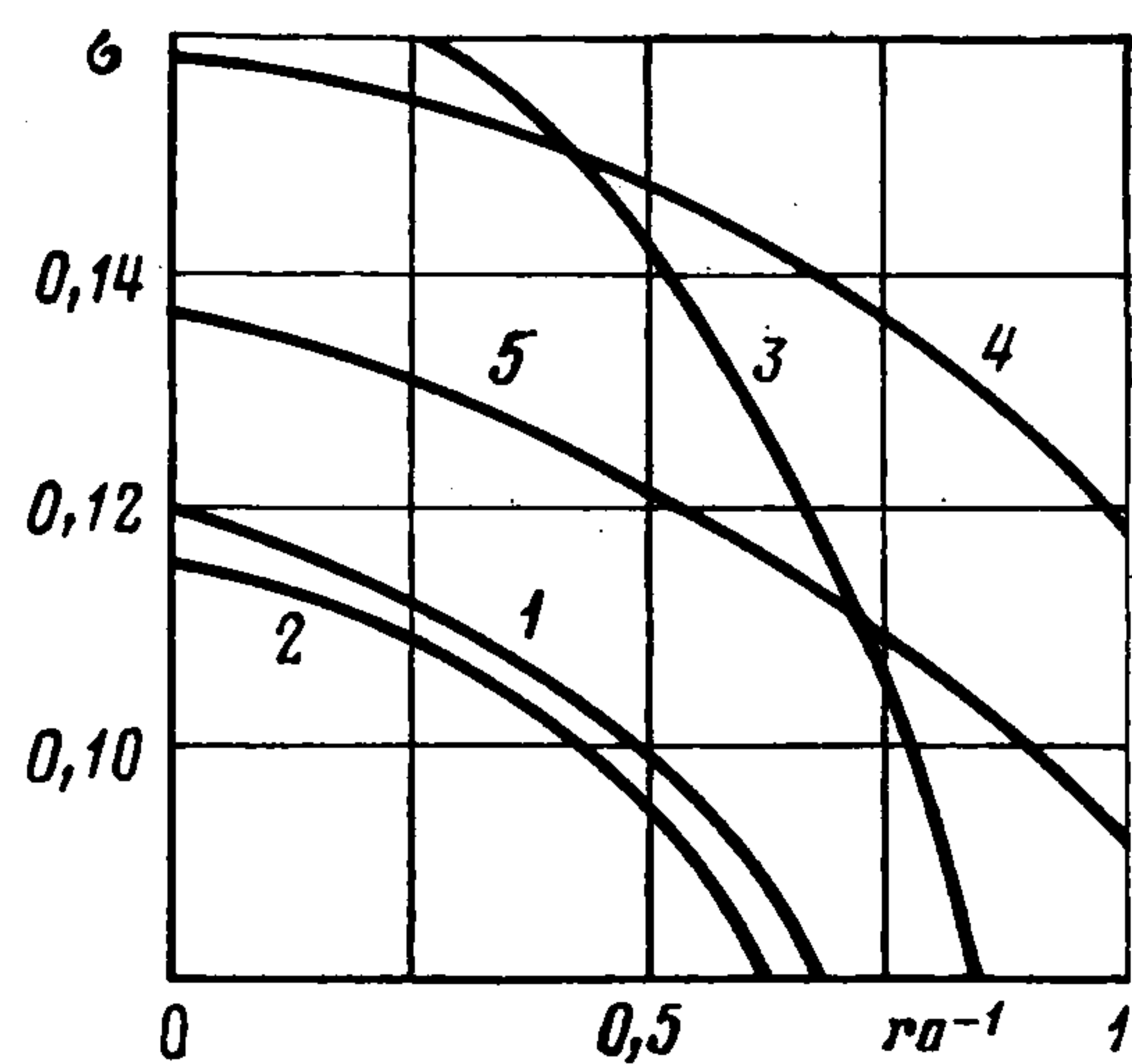
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

фа — Лява (2.2). Как показано в работе [6], контактные давления в этом случае будут иметь следующую структуру:

$$(2.24) \quad \sigma(r) = \sigma_*(r) + R_* \delta(r - 1)$$

т. е. складываются из распределенной нагрузки и сосредоточенных сил, действующих по краю линии контакта.

На основании формул (2.3), (2.4) 5) для ядра $k(\zeta, z)$ интегрального уравнения (2.3) получим представление (2.21), где $s_k = (-1)^{k+1} i \sqrt{3n} (4\gamma_k)^{-1}$.

Подставляя его в уравнение (2.3) и используя равенство (2.24), после преобразований приходим к выражениям

$$(2.25) \quad \lambda n \sigma_*(r) = \delta - \gamma r^2, \quad n R_* = (\delta - \gamma) \gamma_1^{-1} K_1(g_1) K_0^{-1}(g_1) - \\ - 2\gamma \lambda \gamma_1^{-2} [1 + 2\lambda \gamma_1^{-1} K_1(g_1) K_0^{-1}(g_1)], \\ R = 2\pi \left[R_* + \frac{1}{\lambda n} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{4} \right) \right]$$

Неизвестную область контакта здесь нужно уже определять из условия $w_*''(1) = -2\gamma$ [6, 7], эквивалентного отсутствию изгибающих моментов на краю области контакта ($M(1) = 0$, см. (1.12))

$$(\delta - \gamma) \left[\frac{1}{\gamma_1} K_1(g_1) K_0^{-1}(g_1) - \frac{1}{\gamma_2} K_1(g_2) K_0^{-1}(g_2) \right] - \\ - 2\gamma \lambda \left[\frac{1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{2\lambda}{\gamma_1^3} K_1(g_1) K_0^{-1}(g_1) - \frac{2\lambda}{\gamma_2^3} K_1(g_2) K_0^{-1}(g_2) \right] = 0$$

3. Приведем примеры расчета механических характеристик поставленной задачи при $\nu = 0,3$; $\gamma \lambda = 1,5 \cdot 10^{-2}$; $n = 0,5^p$ ($p = \text{const}$).

На фиг. 1 показаны зависимости внедрения штампа от действующей силы при $p = -3$ (здесь и далее номер кривой соответствует номеру рассмотренной задачи). Зависимость области контакта от действующего усилия приведена на фиг. 2 ($p = -1$), откуда видно, что для прикладных теорий, не учитывающих эффект поперечного обжатия, значения λ^{-1} будут занижены. Связь между внедрением штампа и величиной области контакта при $p = 2$ отражена на фиг. 3. Распределение контактных давлений (для задачи 5 — распределенной нагрузки) при $p = 0$, $R\lambda^{-2} = 2,4$ показано на фиг. 4. Отметим, что теории 4 и 5 на краю области контакта дают ненулевые значения контактных давлений, а в задаче 5, кроме того, будут возникать сосредоточенные усилия.

Таким образом, полученные результаты показывают, что лучшее приближение к задаче 1 по совокупности исследованных характеристик на рассмотренном диапазоне изменения параметра p будет давать решение задачи 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1966. 635 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.
4. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Попов Г. Я., Толкачев В. М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами. — Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 4, с. 192—206.
6. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек. — Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 4, с. 782—785.
7. Авилякин В. И., Коваленко Е. В. Об одной динамической контактной задаче для составного основания. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 847—856.
8. Боев С. И., Коваленко Е. В. Исследование характеристик излучения вибрирующего упругого стержня, контактирующего с пластиной, покрывающей слой жидкости. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1982, т. 35, № 4, с. 41—55.
9. Гохберг П. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
10. Александров В. М., Чебаков М. И. Смешанные задачи механики сплошных сред, связанные с интегральными преобразованиями Ханкеля и Мелера—Фока. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 3, с. 494—504.