Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 6, 1985

УДК 539.3

О ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЯХ В НЕСИММЕТРИЧНО НАГРЕВАЕМОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Германович Л. Н., Ершов Л. В., Килль И. Д.

Рассматривается квазистатическая задача термоупругости для полупространства в случае конвективного теплообмена (граничное условие третьего рода). В случае граничных условий первого и второго рода все результаты получаются аналогичным образом. Точное решение задачи найдено в виде, позволяющем построить простое и удобное для численных расчетов приближенное решение, основанное на асимптотическом разложении температуры и напряжений при $t \to 0$. Задача сводится к вычислению однократных интегралов от простых функций, причем во многих случаях эти интегралы выражаются в элементарных функциях. Оценивается погрешность приближенного решения.

В отличие от результатов, полученных ранее [1—3], распределение температуры среды, граничащей с полупространством, не предполагается осесимметричным, т. е. рассматривается общее несимметричное распределение при некоторых несущественных с физической точки зрения ограничениях. Такие несимметричные распределения весьма распространены на практике [4]. Результаты работы могут быть использованы при исследовании разрушения хрупких материалов, которое может происходить под действием термоупругих напряжений [5].

Следует отметить, что применение численных методов, с успехом использованных для решения симметричных задач термоупругости [6], в отсутствие симметрии встречает очевидное затруднение, связанное с увеличением размерности задачи.

1. Упругое полупространство $z \geqslant 0$ и среда, заполняющая область $z < 0$, вначале находятся при температуре $T = 0$. В момент времени $t = 0$ температура среды мгновенно повышается и принимает распределение (r, φ, z — цилиндрические координаты)

$$\Theta = \Theta(r, \varphi), \quad \Theta(r, \varphi + 2\pi) = \Theta(r, \varphi) \tag{1.1}$$

причем функция $\Theta(r, \varphi)$ представима в виде ряда Фурье, коэффициенты которого допускают преобразование Ганкеля n-го порядка по r

$$\Theta(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [\vartheta_n(r) \cos n\varphi + \tau_n(r) \sin n\varphi], \quad \tau_0(r) \equiv 0 \tag{1.2}$$

$$\vartheta_n{}^H(\lambda) = H_\lambda[\vartheta_n(r)] = \int_0^\infty r\vartheta_n(r) J_n(\lambda r)\, d\lambda$$

$$\tau_n{}^H(\lambda) = H_\lambda[\tau_n(r)], \quad n = 0, 1, 2,$$

где J_n — функция Бесселя первого рода n-го порядка. В физических задачах условия существования представлений (1.2), как правило, выполняются.

Требуется найти температурное поле и поле напряжений внутри полупространства при условии теплообмена по закону Ньютона со средой, занимающей область $z < 0$.

2. Перейдем к безразмерным величинам, полагая $r' = r/\delta$, $z' = z/\delta$, $t' = at/\delta^2$, $h' = h\delta$, где a — температуропроводность, h — относительный коэффициент теплоотдачи, δ — некоторый характерный размер. Опуская для краткости штрихи при написании безразмерных величин, запишем

краевую задачу теплопроводности

$$(2.1)\qquad \frac{\partial T}{\partial t}=\Delta T\quad \left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$T\,|_{t=0}=0;\quad \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}=h\,(T\,|_{z=0}-\Theta);\quad T\,(\infty,\varphi,z,t)=$$
$$=T\,(r,\varphi,\infty,t)=0$$

Применив к этой задаче преобразования Лапласа по t, получим

$$(2.2)\qquad sT^*=\Delta T^*;\quad \left.\frac{\partial T^*}{\partial z}\right|_{z=0}=h\left(T^*\,|_{z=0}-\frac{\Theta}{s}\right)$$

$$T^*(r,\varphi,z,s)=L_s\,[T\,(r,\varphi,z,t)]=\int\limits_0^\infty T\,(r,\varphi,z,t)\,e^{-st}\,dt$$

Решение задачи (2.2) будем искать в виде

$$(2.3)\qquad T^*(r,\varphi,z,s)=\sum_{n=0}^{\infty}[u_n^*(r,z,s)\cos n\varphi+v_n^*(r,z,s)\sin n\varphi],\qquad v_0^*\equiv 0$$

Подставляя (1.2) и (2.3) в уравнение и граничное условие (2.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим

$$(2.4)\qquad \frac{\partial^2 u_n^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_n^*}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_n^*}{\partial z^2}-\frac{n^2}{r^2}u_n^*=su_n^*$$

$$\left.\frac{\partial u_n^*}{\partial z}\right|_{z=0}=h\left(u_n^*\,|_{z=0}-\frac{\vartheta_n}{s}\right),\quad n=0,1,2,\ldots$$

и аналогичные краевые задачи для определения v_n^*, $n=1,2,\ldots$

Применим к (2.4) преобразование Ганкеля n-го порядка по r. Тогда получим краевую задачу, решая которую и обращая преобразование Ганкеля, найдем

$$(2.5)\qquad u_n^*(r,z,s)=h\int\limits_0^\infty \lambda J_n(\lambda r)\,s\xi\vartheta_n^H(\lambda)\,d\lambda$$

$$\xi=\frac{\exp\left(-z\sqrt{s+\lambda^2}\right)}{s^2\left(\sqrt{s+\lambda^2}+h\right)},\quad n=0,1,2,\ldots$$

Определяя таким же образом $v_n^*\,(r,z,s)$ и подставляя в (2.3), получаем

$$(2.6)\qquad T^*(r,z,s)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n^*(r,z,s),\quad T_n^*=h\int\limits_0^\infty \lambda J_n(\lambda r)\,s\xi\omega_{1n}\,d\lambda$$

$$\omega_{1n}=\vartheta_n^H(\lambda)\cos n\varphi+\tau_n^H(\lambda)\sin n\varphi,\ n=0,1,2,\ldots$$

3. Найдем изображение термоупругого потенциала перемещений. Следуя [7], имеем (ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения)

$$(3.1)\qquad \Phi^*(r,z,s)=\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha}{s^2}\left(sT^*-\lim_{s\to 0}sT^*\right)=$$

$$=\alpha h\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^\infty \lambda J_n(\lambda r)\left[\xi-\frac{e^{-\lambda z}}{s^2(\lambda+h)}\right]\omega_{1n}\,d\lambda$$

Для вычисления изображений напряжений, соответствующих (3.1), используем формулы для напряжений из [8], преобразовав их предварительно к цилиндрическим координатам (μ — модуль сдвига)

$$(3.2)\qquad p_{rr}=2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-\Delta\Phi\right),\quad p_{\varphi\varphi}=2\mu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\Delta\Phi\right)$$

$$p_{zz}=2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\Delta\Phi\right),\quad p_{r\varphi}=2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)$$

$$p_{rz}=2\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z},\quad p_{\varphi z}=2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\,\partial z}$$

В результате получаем изображения напряжений p_{ij}^* $(i, j = r, \varphi, z)$. При этом оказывается, что на свободной поверхности $z = 0$ изображения p_{zz}^*, p_{rz}^* и $p_{\varphi z}^*$ отличны от нуля. Для устранения их следует ввести дополнительное «бестемпературное» решение, определяемое при помощи функции Галеркина G. Если вид изображения этой функции известен, то входящие в нее постоянные определяются из уравнений

$$(3.3)\qquad q_{zz}^*\big|_{z=0} = -p_{zz}^*\big|_{z=0},\quad q_{rz}^*\big|_{z=0} = -p_{rz}^*\big|_{z=0},\quad q_{\varphi z}^*\big|_{z=0} = -p_{\varphi z}^*\big|_{z=0}$$

где q_{ij}^*, $(i, j = r, \varphi, z)$ — изображения напряжений, соответствующих функции Галеркина и вычисляемых по формулам из [8].

После подстановки значений p_{ij}^* и q_{ij}^* в (3.3) последние два уравнения приводят к виду $\partial F^*/\partial r = 0$; $\partial F^*/\partial\varphi = 0$. Поэтому система (3.3) сводится к двум уравнениям

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} &\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\Delta G^* - \frac{\partial^2 G^*}{\partial z^2}\right] + (1-2\nu)\left(\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial z^2} - \Delta\Phi^*\right)\right\}\Big|_{z=0} = 0 \\ &\left\{(1-\nu)\Delta G^* - \frac{\partial^2 G^*}{\partial z^2} + (1-2\nu)\frac{\partial\Phi^*}{\partial z}\right\}\Big|_{z=0} = 0 \end{aligned}$$

Изображение функции Галеркина будем искать в виде

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} G^*(r, \varphi, z, s) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{&\cos n\varphi\int_0^{\infty}[A_n(s,\lambda) + zB_n(s,\lambda)]\,J_n(\lambda r)\,e^{-\lambda z}\,d\lambda + \\ &+ \sin n\varphi\int_0^{\infty}[C_n(s,\lambda) + zD_n(s,\lambda)]\,J_n(\lambda r)\,e^{-\lambda z}\,d\lambda\Big\} \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что G^* — бигармоническая функция. Подставляя (3.1) и (3.5) в (3.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем систему линейных уравнений для вычисления A_n, B_n, C_n, D_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Таким образом, функция G^* будет полностью определена. Вычисляя изображения q_{ij}^* и складывая их с соответствующими p_{ij}^*, получим изображения полных напряжений σ_{ij}^*

$$(3.6)\qquad \sigma_{ij}^* = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{ij}^{n*},\quad i, j = r, \varphi, z$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}^{n*}}{D} = -T_n^* + h\int_0^{\infty}\Big\{&\frac{e^{-\lambda z}}{s^2}\Big[\frac{J_{n+1}(\lambda r)}{r}\lambda k_1 + \\ &+ J_n(\lambda r)\frac{n^2-n}{r^2}k_1 + J_n(\lambda r)(2-\lambda z)\lambda^2\Big] + \frac{J_{n+1}(\lambda r)}{r}\lambda k_2 + \\ &+ J_n(\lambda r)\frac{n^2-n}{r^2}k_2 - J_n(\lambda r)[\lambda^3\xi - \\ &-(2h-\lambda+h\lambda z+\lambda^2 z)\lambda^2\eta]\Big\}\,\omega_{1n}\,d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{n*}}{D} = -T_n^* - h\int_0^{\infty}\Big\{&\frac{e^{-\lambda z}}{s^2}\Big[\frac{J_{n+1}(\lambda r)}{r}\lambda k_1 + J_n(\lambda r)\frac{n^2-n}{r^2}k_1 - \\ &-2J_n(\lambda r)\nu\lambda^2\Big] + \frac{J_{n+1}(\lambda r)}{r}\lambda k_2 + J_n(\lambda r)\frac{n^2-n}{r^2}k_2 + \\ &+2J_n(\lambda r)(h+\lambda)\nu\lambda^2\eta\Big\}\,\omega_{1n}\,d\lambda \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{n*}}{D} = h\int_0^{\infty}J_n(\lambda r)\left[\frac{ze^{-\lambda z}}{s^2} + \xi - (1+hz+\lambda z)\eta\right]\lambda^3\omega_{1n}\,d\lambda$$

$$\frac{\sigma_{r\varphi}^{n*}}{D} = h\frac{n}{r^2}\int_0^{\infty}[(n-1)J_n(\lambda r) - \lambda rJ_{n+1}(\lambda r)]\left(\frac{k_1}{s^2}e^{-\lambda z} + k_2\right)\omega_{2n}\,d\lambda$$

$$\frac{\sigma_{rz}^{n*}}{D} = h \int_0^\infty \left[\frac{n}{\lambda r} J_n(\lambda r) - J_{n+1}(\lambda r) \right] k_3 \lambda^2 \omega_{1n} \, d\lambda$$

$$\frac{\sigma_{\varphi z}^{n*}}{D} = h \frac{n}{r} \int_0^\infty J_n(\lambda r) k_3 \lambda \omega_{2n} \, d\lambda$$

$$k_1 = 2\nu - 2 + \lambda z, \quad k_2 = \lambda \xi - [2h(\nu - 1) + $$
$$+ (2\nu - 1 + hz)\lambda + \lambda^2 z]\eta$$

$$k_3 = \frac{1 - \lambda z}{s^2} e^{-\lambda z} + h\xi - \frac{e^{-\omega z}}{s^2} - (h - h\lambda z - \lambda^2 z)\eta$$

$$\eta = \frac{e^{-\lambda z}}{s^2(\omega + h)}, \quad \omega = \sqrt{s + \lambda^2}, \quad \omega_{2n} = \tau_n^H(\lambda)\cos n\varphi - \vartheta_n^H(\lambda)\sin n\varphi$$

$$D = \frac{2\mu\alpha(1 + \nu)}{1 - \nu}$$

Пользуясь таблицей из [1], можно выписать оригиналы температуры и напряжений. Поскольку, однако, решение построено формальным образом, сходимость получаемых при этом интегралов подлежит проверке. Это требование практически необременительно благодаря множителям $\exp(-\lambda z)$ и $\exp(-\lambda^2 t)$ в подынтегральных функциях. (Для приводимого ниже примера граничного распределения (1.1) такая проверка была проведена.) Особенности в подынтегральных функциях являются устранимыми.

4. Точное решение, полученное выше, содержит устранимые особенности, которые затрудняют его использование и могут вносить значительную погрешность при численных расчетах. В связи с этим рассмотрим асимптотическое поведение решения при $t \to 0$. Чтобы упростить вопросы, связанные со сходимостью рядов, ограничимся случаем, когда граничное температурное распределение (1.1) представлено конечным тригонометрическим полиномом, т. е. ряд в (1.2) заменен конечной суммой до номера N включительно. С физической точки зрения это ограничение несущественно.

Исследуем сначала распределение температуры, рассматривая отдельно каждую гармонику T_n^* в (2.6). Обращение T_n^* приводит к соотношению

$$T_n = \int_0^\infty \lambda J_n(\lambda r) \omega_{1n} \, d\lambda \int_0^t \exp(-\lambda^2 \tau) L_\tau^{-1} \left[\frac{h \exp(-z\sqrt{s})}{\sqrt{s} + h} \right] d\tau \tag{4.1}$$

где L_τ^{-1} — оператор, обратный L_s (нижним индексом обозначен аргумент оригинала). Используя формулу Тейлора для $\exp(-\lambda^2 \tau)$, находим

$$T_n = \int_0^\infty \lambda J_n(\lambda r) \omega_{1n} \, d\lambda \int_0^t f_0(z, \tau) \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m \lambda^{2m}}{m!} \tau^m \, d\tau + T_n^M \tag{4.2}$$

$$T_n^M = \frac{(-1)^{M+1}}{(M+1)!} \int_0^\infty \lambda^{2M+3} J_n(\lambda r) \omega_{1n} \exp(-\lambda^2 \zeta) \, d\lambda \int_0^t \tau^{M+1} f_0(z, \tau) \, d\tau$$

$$f_m(z, t) = L_t^{-1} \left[\frac{h \exp(-z\sqrt{s})}{s^m (\sqrt{s} + h)} \right], \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$0 < \zeta < \tau, \quad M = 0, 1, 2, \ldots$$

В определении асимптотического разложения выберем одну и ту же систему функций как для приближения, так и для сравнения [9, 10]

$$\mu_m(t) = (-1)^m \int_0^t f_0(z, t) \tau^m \, d\tau, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) видно, что $\mu_{m+1}(t) = o(\mu_m(t))$, а $T_n^{\ m} = O(\mu_{m+1}(t))$ при $t \to 0$, $m = 0, 1, 2 \ldots$. Поэтому имеет место асимптотическое разложение

$$(4.4) \qquad T_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{1,n}^{2m+1,\,n} \mu_m(t)}{m!}, \quad A_{p,k}^{i,\,n}(r, \varphi) = \int_0^{\infty} \lambda^i J_k(\lambda r)\,\omega_{pn}\,d\lambda$$

Используя метод математической индукции и формулы из [11], получаем следующие соотношения для определения $\mu_m(t)$ и $f_m(z, t)$:

$$(4.5) \qquad \mu_m(t) = (-1)^m m! \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k t^{m-k}}{(m-k)!} f_{k+1}(z, t)$$

$$f_m(z, t) = \frac{f_{m-1}(z, t)}{h^2} - \frac{\varphi_{2m-1}(z, t)}{h} + \varphi_{2m}(z, t), \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$f_0(z, t) = \frac{h}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) - h^2 \exp(h^2 t + hz)\operatorname{erfc}\frac{z + 2ht}{2\sqrt{t}}$$

$$\varphi_m(z, t) = L_t^{-1}\left[\frac{\exp(-z\sqrt{s})}{s^{m/2}}\right] = (4t)^{(m-1)/2}\, i^{m-1} \operatorname{erfc}\frac{z}{2\sqrt{t}}$$

$$m = 2, 3, \ldots$$

$$(4.6) \qquad \varphi_1(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)$$

$$i^m \operatorname{erfc} x = -\frac{x}{m}\, i^{m-1}\operatorname{erfc} x + \frac{1}{2m}\, i^{m-2} \operatorname{erfc} x, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$i^{-1}\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2), \quad i^0 \operatorname{erfc} x = \operatorname{erfc} x$$

Таким образом получаем приближенное решение (при $t \to 0$ асимптотически точное)

$$(4.7) \qquad T(r, \varphi, z, t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m+k} t^{m-k}}{(m-k)!} A_{1,n}^{2m+1,\,n}(r, \varphi) f_{k+1}(z, t)$$

более удобное для расчетов при малых t, чем точное: функции $f_{k+1}(z, t)$ содержат лишь одну специальную хорошо затабулированную функцию — дополнительный интеграл вероятностей; интегралы $A_{p,n}^{2m+1,\,n}$ быстро сходятся, часто они берутся в элементарных функциях (см. пример).

Перейдем к анализу напряжения. Из формул (3.6), видно, что построение асимптотик напряжений σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, $\sigma_{r\varphi}$ сводится к построению асимптотических разложений при $t \to 0$ выражений

$$(4.8) \qquad I = \int_0^{\infty} \lambda^i J_j(\lambda r)\,\omega_{pn} \exp(-q\lambda z)\,d\lambda \int_0^t d\vartheta \int_0^{\vartheta} \exp(-\lambda^2 \tau) f_0(z, \tau)\,d\tau$$

$$(i = 1, 2, 3, 4;\ j = 0, 1, 2 \ldots;\ p = 1, 2;\ q = 0, 1)$$

В случае напряжений σ_{rz} и $\sigma_{\varphi z}$ требуется также построить асимптотическое разложение при $t \to 0$ выражения вида (4.8), где $f_0(z, \tau)$ следует заменить на $L_\tau^{-1}[e^{-z\sqrt{s}}]$ и считать, что $i = 1, 2$; $j = 0, 1, 2, \ldots$; $p = 2$; $q = 0$. Поскольку эти случаи совершенно аналогичны, ограничимся далее рассмотрением (4.8). Отметим только, что операция $L_\tau^{-1}[e^{-z\sqrt{s}}]$ при $z = 0$ определена лишь в классе обобщенных функций. Это вызывает некоторые неудобства. Но поскольку σ_{rz} и $\sigma_{\varphi z}$ при $z = 0$ известны точно ($\sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0$), то при построении для них асимптотических разложений будем считать $z > 0$.

Выбирая для приближения и сравнения систему функций

$$(4.9)\qquad \mu_m(t) = (-1)^m \int_0^t d\vartheta \int_0^\vartheta \tau^m f_0(z,\tau)\, d\tau$$

и разлагая в (4.8), как и ранее, $\exp(-\lambda^2\tau)$ по формуле Тейлора, получим искомое асимптотическое разложение

$$(4.10)\qquad I = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu_m(t)}{m!}\, {}_qC_{p,j}^{2m+i,\,n}, \quad (t \to 0)$$

$$(4.11)\qquad {}_0C_{p,k}^{i,\,n} = A_{p,k}^{i,\,n}, \quad {}_1C_{p,k}^{i,\,n} = B_{p,k}^{i,\,n} = \int_0^\infty \lambda^i J_k(\lambda r)\, \omega_{pn} e^{-\lambda z}\, d\lambda$$

Методом математической индукции доказывается, что

$$(4.12)\qquad \mu_m(t) = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m-k} \frac{(-1)^{k+l}\, m!}{(m-k-l)!}\, t^{m-k-l} f_{k+l+2}(z,t)$$

где $f_k(z, t)$ определены формулами (4.4).

Окончательно получим приближенные (асимптотически точные при $t \to 0$) формулы для расчета напряжений

$$(4.13)\qquad \frac{\sigma_{rr}}{D} = -T + ht \sum_{n=0}^{N} (F_1{}^n - 2B_{1,n}^{2,\,n} - zB_{1,n}^{3,\,n}) +$$
$$+ \sum \Big\{ \Big[\frac{1}{r} A_{1,n+1}^{2m+2,\,n} + \frac{n^2-n}{r^2} A_{1,n}^{2m+1,\,n} - A_{1,n}^{2m+3,\,n} \Big] f_{k+l+2}(z,t) +$$
$$+ [F_2{}^n - 2hB_{1,n}^{2m+2,\,n} - (1-hz)\, B_{1,n}^{2m+3,\,n} + zB_{1,n}^{2m+4,\,n}]\, f_{k+l+2}(0,t) \Big\}$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{D} = -T - ht \sum_{n=0}^{N} (F_1{}^n - 2\nu B_{1,n}^{2,\,n}) - \sum \Big\{ \Big[\frac{1}{r} A_{1,n+1}^{2m+2,\,n} +$$
$$+ \frac{n^2-n}{r^2} A_{1,n}^{2m+1,\,n} \Big] f_{k+l+2}(z,t) +$$
$$+ [F_2{}^n + 2\nu\, (hB_{1,n}^{2m+2,\,n} + B_{1,n}^{2m+3,\,n})]\, f_{k+l+2}(0,t) \Big\}$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{D} = htz \sum_{n=0}^{N} B_{1,n}^{3,\,n} + \sum \{ A_{1,n}^{2m+3,\,n} f_{k+l+2}(z,t) -$$
$$- [(1+hz)\, B_{1,n}^{2m+3,\,n} + zB_{1,n}^{2m+4,\,n}]\, f_{k+l+2}(0,t) \}$$

$$\frac{\sigma_{r\varphi}}{D} = ht \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{r^2} [2(n-1)(\nu-1)\, B_{2,n}^{0,\,n} + (n-1)\, zB_{2,n}^{1,\,n} -$$
$$- 2r(\nu-1)\, B_{2,n+1}^{1,\,n} - rzB_{2,n+1}^{2,\,n}] + \sum \frac{n}{r^2} \{ [(n-1)\, A_{2,n}^{2m+1,\,n} -$$
$$- rA_{2,n+1}^{2m+2,\,n}]\, f_{k+l+2}(z,t) - [2h(n-1)(\nu-1)\, B_{2,n}^{2m,\,n} -$$
$$- (n-1)(1-2\nu-hz)\, B_{2,n}^{2m+1,\,n} + (n-1)\, zB_{2,n}^{2m+2,\,n} -$$
$$- 2h(\nu-1)\, rB_{2,n+1}^{2m+1,\,n} + (1-2\nu-hz)\, rB_{2,n+1}^{2m+2,\,n} -$$
$$- rzB_{2,n+1}^{2m+3,\,n}]\, f_{k+l+2}(0,t) \}$$

$$\frac{\sigma_{rz}}{D} = ht \sum_{n=0}^{N} \Big[\frac{n}{r} (B_{2,n}^{1,\,n} - zB_{1,n}^{2,\,n}) - B_{1,n+1}^{2,\,n} + zB_{1,n+1}^{3,\,n} \Big] +$$
$$+ \sum \Big\{ \Big(\frac{n}{r} A_{1,n}^{2m+1,\,n} - hA_{1,n+1}^{2m+2,\,n} \Big) [f_{k+l+2}(z,t) - \psi_{k+l+2}(z,t)] -$$
$$- \Big[\frac{n}{r} (hB_{1,n}^{2m+1,\,n} - hzB_{1,n}^{2m+2,\,n} - zB_{1,n}^{2m+3,\,n}) - hB_{1,n+1}^{2m+2,\,n} +$$
$$+ hzB_{1,n+1}^{2m+3,\,n} + zB_{1,n+1}^{2m+4,\,n} \Big] f_{k+l+2}(0,t) \Big\}$$

$$\frac{\sigma_{\varphi z}}{D}=ht\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{r}(B_{2,n}^{1,n}-zB_{2,n}^{2,n})+\sum\frac{n}{r}\{A_{2,n}^{2m+1,n}[f_{k+l+2}(z,t)-$$

$$-\psi_{k+l+2}(z,t)]-(hB_{2,n}^{2m+1,n}-hzB_{2,n}^{2m+2,n}-zB_{2,n}^{2m+3,n})f_{k+l+3}(0,t)\}$$

Здесь

$$F_1{}^n=\frac{2(\nu-1)}{r}B_{1,n+1}^{1,n}+\frac{z}{r}B_{1,n+1}^{2,n}+ \tag{4.14}$$

$$+\frac{n^2-n}{r^2}[2(\nu-1)B_{1,n}^{0,n}+zB_{1,n}^{1,n}]$$

$$F_2{}^n=-\frac{2h(\nu-1)}{r}B_{1,n+1}^{2m+1,n}+\frac{1-2\nu-hz}{r}B_{1,n+1}^{2m+2,n}-\frac{z}{r}B_{1,n+1}^{2m+3,n}-$$

$$-\frac{n^2-n}{r^2}[2h(\nu-1)B_{1,n}^{2m,n}+zB_{1,n}^{2m+2,n}-(1-2\nu-hz)B_{1,n}^{2m+1,n}]$$

$$\psi_k(z,t)=-\frac{\partial\varphi_{2k+1}}{\partial t},\qquad \sum=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m-k}\frac{(-1)^{m+k+l}t^{m-k-l}}{(m-k-l)!}$$

(функции $\varphi_k(z,t)$ определены в (4.5)). Отметим, что интегралы (4.11) сходятся не медленнее интегралов (4.4).

5. Оценим погрешность приближенного решения (4.7), (4.13). Для получения равномерной оценки воспользуемся тем, что $\partial f_k/\partial t=f_{k-1}$, а $f_1(z,t)$ — решение одномерной задачи теплопроводности для полупространства с нулевой начальной температурой, когда на границе полупространства при $t>0$ происходит конвективный теплообмен со средой единичной температуры, т. е. $0\leqslant f_1(z,t)<1$ — монотонно возрастающая по t функция. Интегрируя по частям и применяя теорему о среднем, получим

$$0\leqslant\int_0^t\tau^m f_0(z,\tau)\,d\tau<t^{m+1}f_1(z,t), \tag{5.1}$$

$$0\leqslant\int_0^t d\vartheta\int_0^{\vartheta}\tau^m f_0(z,\tau)\,d\tau<t^{m+1}f_1(z,t)$$

Используя (5.1), известные неравенства $|J_n(x)|\leqslant1/\sqrt{2}$, $n=1,2,\ldots$; $|J_0(x)|\leqslant1$ [11] и неравенство $0\leqslant\lambda xe^{-\lambda x}\leqslant e^{-1}$, можно получить искомые оценки. Опуская довольно громоздкие преобразования, приведем окончательный результат для оценок погрешностей M-го приближения температуры и напряжений, которое соответствует отбрасыванию в асимптотических разложениях всех членов, начиная с номера $M+1$. Имеем

$$|\delta_T^M|\leqslant\frac{t^{M+1}f_1(z,t)}{(M+1)!}\sum_{n=0}^{N}A_nI_n^{2M+3} \tag{5.2}$$

$$|\delta_{rr}^M|\leqslant\beta_2\gamma\sum_{n=0}^{N}(A_n+B_n)\alpha_{1n},\qquad |\delta_{\varphi\varphi}^M|\leqslant\beta_2\sum_{n=0}^{N}(\gamma B_n+A_n)\alpha_{1n}$$

$$|\delta_{zz}^M|\leqslant\beta_2\sum_{n=0}^{N}A_n(he^{-1}I_n^{2M+4}+\gamma I_n^{2M+5}),\qquad |\delta_{r\varphi}^M|\leqslant\beta_2\gamma\sum_{n=0}^{N}E_n\alpha_{1n}$$

$$|\delta_{rz}^M|\leqslant\beta_1\sum_{n=0}^{N}C_n\alpha_{2n},\qquad |\delta_{\varphi z}^M|\leqslant\beta_1\sum_{n=0}^{N}D_n\alpha_{2n}$$

$$\gamma=2+e^{-1},\quad \beta_1=Dt^{M+2}/(M+1)!,\quad \beta_2=\beta_1f_1(0,t),$$

$$\alpha_{1n}=I_n^{2M+5}+hI_n^{2M+4}$$

$$\alpha_{2n}=(h\gamma I_n^{2M+4}+e^{-1}I_n^{2M+5})f_1(0,t)+hI_n^{2M+4}$$

$$I_n{}^i=\int_0^\infty\lambda^i([\vartheta_n{}^H(\lambda)]^2+[\tau_n{}^H(\lambda)]^2)^{1/2}d\lambda,\quad i=3,4,$$

Здесь

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = A_n = 2B_1 = B_n = C_0 = C_n = D_2 = C_2 = \\ &= D_n = 2E_1 = 2E_n = 1/\sqrt{2} \quad (n = 3, 4, 5, \ldots) \\ &A_0 = 1, \quad B_0 = C_1 = D_1 = 2E_1 = 2E_2 = (1+\sqrt{2})/(2\sqrt{2}) \\ &B_2 = (3+\sqrt{2})/(4\sqrt{2}), \quad D_0 = E_0 = 0 \end{aligned}$$

6. Рассмотрим подробнее характер поведения температуры и напряжений при малых временах.

Нулевое приближение температуры

$$T = \Theta(r, \varphi) f_1(z, t) \tag{6.1}$$

является асимптотически точным при $t \to 0$ в том смысле, что относительная ошибка приближенного решения (6.1) стремится к нулю при $t \to 0$.

Физически это означает, что при малых значениях времени нагрева граничное распределение температуры распространяется в направлении оси Oz, не «расплываясь» в радиальном направлении и сохраняя свою «форму».

В частности, если граничное распределение температуры имеет разрыв первого рода (скачок) вдоль некоторой линии, то температурное поле в полупространстве, определяемое решением уравнения теплопроводности, непрерывно, но скачок сглаживается лишь бесконечно малыми высшего порядка малости по t.

Для напряжений можно найти и более грубые, но все же асимптотически точные в том же смысле приближенные формулы. Таковы, например, соотношения, получаемые из (4.13) отбрасыванием членов, содержащих символ Σ, или, что то же, отбрасыванием в подынтегральных выражениях соотношений (3.6) членов, содержащих ω. Оценка погрешностей получаемых таким образом приближенных формул находится формальной подстановкой в (5.2) значения $M = -1$.

Остановимся еще на часто используемом приближении

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{2\alpha\mu(1+\nu)}{1-\nu} T \tag{6.2}$$

которое получается, если в правых частях формул (4.13) для σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ сохранить лишь слагаемое $-T$. Из формул (5.2) непосредственно следует, что погрешность приближения (6.2) имеет порядок t при $t \to 0$. Более точная оценка по описанной схеме показывает, что приближение (6.2) является асимптотически точным только на поверхности полупространства $z = 0$, а в остальных точках относительная погрешность соотношений (6.2) стремится к единице (к 100%) при $t \to 0$. Именно это приводит к ошибке в знаке напряжений (т. е. не только количественной, но и качественной ошибке), продемонстрированной в [5].

7. В качестве примера рассмотрим в размерных координатах граничное распределение температуры

$$\Theta(r, \varphi) = \Theta_0 \left[\frac{a^3}{(r^2+\delta^2)^{3/2}} + \frac{b^4 r}{(r^2+\delta^2)^{5/2}} \cos\varphi \right] \tag{7.1}$$

где a, b, δ — постоянные, имеющие размерность длины, Θ_0 — температура в начале координат.

Распределение (7.1) имеет куполообразный вид и может быть использовано для моделирования реального распределения температуры на границе тела, разрушаемого высокотемпературной газовой струей [4], когда струя направлена под углом к поверхности. Если этот угол равен $\pi/2$, т. е. имеет место осевая симметрия, то в (7.1) $b = 0$. В противном случае величина b^4/a^3 характеризует асимметрию распределения.

Переходя далее к безразмерным координатам согласно п. 2, положим в (7.1) $\delta = 1$, понимая под a^3 величину a^3/δ^3, а под b^4 величину b^4/δ^4. В рядах Фурье остается два члена ($N = 1$), и по формулам [12] находим

$$\vartheta_0^H(\lambda) = \Theta_0 a^3 e^{-\lambda}, \quad \vartheta_1^H(\lambda) = {}^1\!/_3 \Theta_0 b^4 \lambda e^{-\lambda} \tag{7.2}$$

Коэффициенты в асимптотических разложениях (4.13) вычисляются теперь при помощи интеграла из [12], который удобно привести к виду

$$\int_0^\infty \lambda^i e^{-\lambda x} J_j(\lambda r)\, d\lambda = (-1)^i \frac{1}{r^j} \frac{d^i}{dx^i} \left[\frac{(\sqrt{x^2+r^2}-x)^j}{\sqrt{x^2+r^2}} \right], \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.3}$$

где нулевой производной функции по определению считается сама функция. Коэффициенты A_{ij} и B_{ij} определяются, если в (7.3) положить $x = 1$ и $x = 1 + z$ соответственно.

Видно, что оценка погрешностей (5.2) сводится к интегралу

$$\int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda}\, d\lambda = k!, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{7.4}$$

Таким образом, в случае распределения (7.1) в окончательных выражениях остается лишь одна специальная функция erfc x, имеющая простые аппроксимирующие и асимптотические формулы во всем интервале изменения аргумента. Вычисления по формулам (4.4), (4.13), (5.2), (7.3) и (7.4) элементарны.

8. В осесимметричном случае полученные выше соотношения совпадают с результатами работы [5]. Отметим, что в формулах (3.4) из [5] допущены опечатки: вместо $\sigma_{zz} = thB_{30} + \ldots$ следует читать $\sigma_{zz} = htzB_{30} + \ldots$; в соотношениях для $\varphi_n(z, t)$ под знаком суммы пропущен множитель t^{n-k}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Килль И. Д.* О термоупругих напряжениях внутри полупространства.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 1, с. 140—144.
2. *Дудоладов Л. С.* О термическом разрушении горных пород.— Физ.-техн. пробл. разработки полезных ископаемых, 1969, № 2, с. 102—106.
3. *Германович Л. Н., Килль И. Д.* О термонапряжениях в упругом полупространстве.— ПМТФ, 1983, № 3, с. 159—164.
4. *Дмитриев А. П., Гончаров С. А.* Термодинамические процессы в горных породах. М.: Недра, 1983. 312 с.
5. *Cherepanov G. P.* Mechanics of brittle fracture. N. Y.: McGrow-Hill, 1979. 950 p.
6. *Никифоровский В. С., Серяков В. М.* К вопросу о тепловом и напряженном состоянии и разрушении составных тел при нагревании.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1975, № 3, вып. 1, с. 109—114.
7. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 251 с.
8. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
9. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.
10. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Москва

Поступила в редакцию 4.X.1984