

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 362 с.
3. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости.— М.: Наука, 1981. 688 с.

Ростов в/Д

Поступила в редакцию
3.XII.1984

УДК 534.3 : 534.1

О МАТРИЦЕ РАССЕЯНИЯ В ВОЛНОВОДЕ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

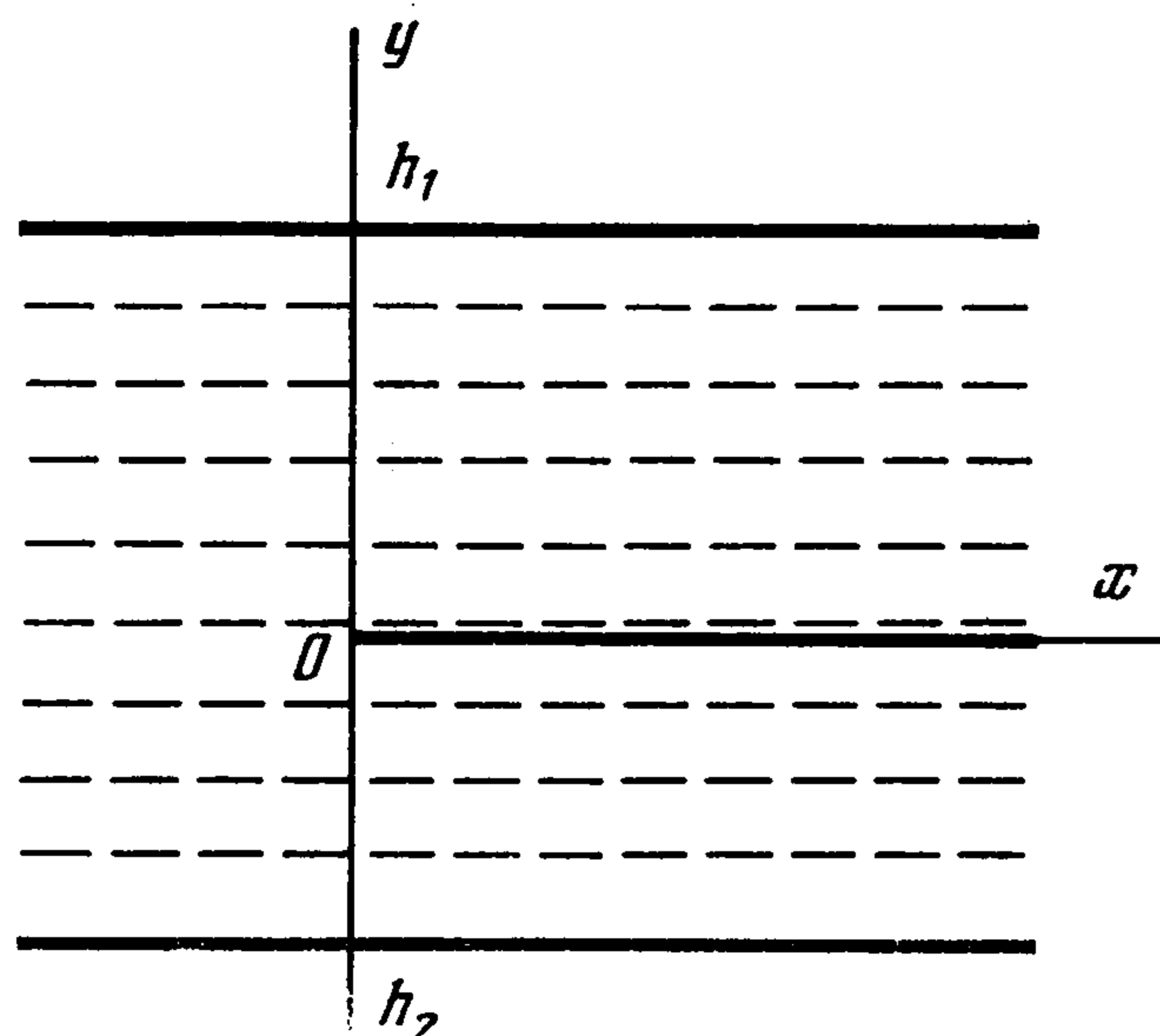
Лавров Ю. А., Лукьянов В. Д.

Исследуется спектр нормальных волн и определяется матрица рассеяния для плоского волновода с упругими стенками и расположенной внутри него полубесконечной упругой пластиной. Механический режим поведения упругих пластин описывается дифференциальными операторами общего вида. Задачи этого типа относятся к классу гранично-контактных [1, 2]. Для однозначной разрешимости этих задач следует сформулировать дополнительные гранично-контактные условия, описывающие механическое поведение кромки полубесконечной пластины, находящейся внутри волновода. Указывается регуляризация интегралов, возникающих при удовлетворении гранично-контактным условиям общего вида.

1. Постановка задачи. Ищем решение двумерного однородного уравнения Гельмгольца

$$(1.1) \quad \partial^2 P / \partial x^2 + \partial^2 P / \partial y^2 + k^2 P = 0$$

в полосе $-\infty < x < +\infty$, $h_2 < y < h_1$ с вырезанным лучом $y = 0$, $x > 0$ (фигура), описывающего распределение давления $P(x, y)$ при возбуждении системы заданным



акустическим полем $P_0(x, y)$. Здесь $k = \omega/c$ — волновое число, ω — круговая частота; зависимость волновых процессов от времени, выбранная в виде $\exp(-i\omega t)$, здесь и всюду далее опущена, c — скорость звука в среде.

Механическое поведение стенок волновода — упругих пластин — описывается граничными условиями

$$(1.2) \quad L_j \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) P(x, h_j) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad j = 1, 2$$

$$\left(L_j \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = (-1)^j M_{1j} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} + M_{2j} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right)$$

На луче $y = 0$, $x > 0$ расположена тонкая упругая пластина, совершающая антисимметричные колебания, которые описываются граничными условиями ($x > 0$)

$$(1.3) \quad \frac{\partial P(x, +0)}{\partial y} = \frac{\partial P(x, -0)}{\partial y}$$

$$(1.4) \quad M_{13} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} P(x, 0) + M_{23} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) [P(x, +0) - P(x, 0)] = 0$$

Условие (1.3) задает равенство смещений верхней (нижней) поверхности пластины $u(x) = (\rho_0 \omega^2)^{-1} \partial P(x, \pm 0) / \partial y$, ρ_0 — плотность жидкости. Отметим, что на продолжении средней пластины $y = 0$, $x < 0$ выполнено условие (1.3), а также условие непрерывности давления

$$(1.5) \quad P(x, +0) = P(x, -0), \quad x < 0$$

Здесь $M_{1j}(-\partial^2/\partial x^2)$, $M_{2j}(-\partial^2/\partial x^2)$ ($j = 1, 2, 3$) — полиномы, коэффициенты которых зависят от механических свойств упругих материалов, из которых выполнены стенки волновода.

В качестве примера приведем вид дифференциальных операторов для разных типов стенок волновода: $M_{1j} = 1$, $M_{2j} = 0$ (абсолютно жесткие стенки); $M_{1j} = 0$, $M_{2j} = 1$ (абсолютно мягкие); $M_{1j} = \partial^2/\partial x^2 + K_j^2$, $M_{2j} = \rho_0 \omega^2 / N_j$ (упругие мембраны); $M_{1j} = \partial^4/\partial x^4 - \kappa_j^4$, $M_{2j} = \rho_0 \omega^2 / D_j$ (изгибно-колеблющиеся упругие пластины). Здесь K_j — волновое число волн в мембране, $K_j = \rho_j / N_j$, ρ_j — линейная плотность мембраны (пластины), N_j — сила натяжения мембраны, κ_j — волновое число изгибных волн в пластине, расположенной в вакууме, $\kappa_j = \rho_j \omega^2 / D_j$, D_j — изгибная жесткость пластины.

Отметим, что для упругих пластин порядок m_{1j} полиномов M_{1j} выше порядка m_{2j} полиномов M_{2j} .

Искомое решение $P(x, y)$ удовлетворяет принципу предельного поглощения (случай вещественных k рассматривается как предельный переход при $\text{Im } k \rightarrow 0$), непрерывно в рассматриваемой области вплоть до границ, в начале координат удовлетворяет условию Майкснера «на ребре».

Для условий Дирихле (абсолютно мягкие стенки), Неймана (абсолютно жесткие стенки), а также для случая условий третьего рода на луче $y = 0$, $x > 0$ поставленная задача имеет единственное решение. Если хотя бы одно из чисел m_{1j} или m_{2j} отлично от нуля, решение, называемое общим [1], утрачивает единственность и содержит некоторое число произвольных постоянных. Значения этих постоянных определяются из удовлетворения дополнительным гранично-контактным условиям [2, 3]. Эти условия задают механический режим поведения кромки полубесконечной пластины.

Так, например, для упругой мембраны, кромка которой зажата, гранично-контактное условие имеет вид $\partial P(+0, 0) / \partial y = 0$. В случае изгибно-колеблющейся упругой пластины, кромка которой зажата, выполнены условия равенства нулю смещения и угла поворота кромки пластины: $\partial P(+0, 0) / \partial y = 0$ и $\partial^2 P(+0, 0) / \partial y \partial x = 0$. Если кромка пластины свободна, то гранично-контактные условия задают отсутствие изгибающего момента и перерезывающей силы: $\partial^3 P(+0, 0) / \partial y \partial x^2 = 0$ и $\partial^4 P(+0, 0) / \partial y \partial x^3 = 0$.

2. Спектр нормальных волн волновода. Будем искать нормальные волны $Q(x, y)$ правого волновода ($x > 0$) в виде $Q(x, y) = A_j G_j(\lambda^2, y) e^{i\lambda x}$. Здесь и всюду в дальнейшем для функций, зависящих от y , $j = 1$, если $0 < y < h_1$, $j = 2$, если $h_2 < y < 0$.
Функция

$$G_j(\lambda^2, y) = M_{1j}(\lambda^2) \text{ch } \gamma(y - h_j) - (-1)^j M_{2j}(\lambda^2) \gamma^{-1} \text{sh } \gamma(y - h_j), \\ \gamma = (\lambda^2 - k^2)^{1/2}$$

выбрана таким образом, чтобы условия (1.1) и (1.2) были для $Q(x, y)$ выполнены.

Граничные условия (1.3), (1.4) приводят к системе линейных алгебраических уравнений для постоянных:

$$(2.1) \quad A_1 L_1(\lambda^2) - A_2 L_2(\lambda^2) = 0 \\ A_1 [M_{13}(\lambda^2) L_1(\lambda^2) + M_{23}(\lambda^2) T_1(\lambda^2)] - A_2 M_{23}(\lambda^2) T_2(\lambda^2) = 0 \\ (L_j(\lambda^2) = \partial G_j(\lambda^2, 0) / \partial y, \quad T_j(\lambda^2) = G_j(\lambda^2, 0))$$

Из условия существования ненулевого решения системы (2.1) получаем дисперсионное уравнение для нахождения спектра волновых чисел нормальных волн правого волновода

$$(2.2) \quad \Delta_1(\lambda^2) = M_{13}(\lambda^2) L_1(\lambda^2) L_2(\lambda^2) + M_{23}(\lambda^2) \Delta_2(\lambda^2) = 0 \\ (\Delta_2(\lambda^2) = T_1(\lambda^2) L_2(\lambda^2) - T_2(\lambda^2) L_1(\lambda^2))$$

Функция $\Delta_1(\lambda^2)$ — четная, поэтому при исследовании корней уравнения (2.2) (волновых чисел нормальных волн правого волновода) достаточно ограничиться теми, что при $\text{Im } k > 0$ лежат в верхней полуплоскости комплексной переменной λ .

Для левого волновода ($x < 0$), не содержащего средней пластины, дисперсионное уравнение для волновых чисел нормальных волн может быть получено из (2.2), если

формально положить $M_{23}(\lambda^2) = 1$, $M_{13}(\lambda^2) = 0$. Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$(2.3) \quad \Delta_2(\lambda^2) = 0$$

и его корни распадаются на две группы. Корни первой группы β_{1l} , составляющие счетное множество, с ростом номера l асимптотически сближаются с корнями дисперсионного уравнения волновода шириной $h_1 - h_2$ с жесткими стенками:

$$\beta_{1l} \sim i \left[\left(\frac{\pi l}{h_1 - h_2} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2}, \quad l \rightarrow \infty$$

Проследить за этим можно преобразовав уравнение (2.3) к виду

$$(2.4) \quad \gamma \operatorname{th} \gamma (h_1 - h_2) = \gamma^2 [M_{11}(\lambda^2) M_{22}(\lambda^2) + M_{21}(\lambda^2) M_{12}(\lambda^2)] \times \\ \times [\gamma^2 M_{11}(\lambda^2) M_{12}(\lambda^2) + M_{21}(\lambda^2) M_{22}(\lambda^2)]^{-1}$$

Правая часть уравнения (2.4) стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$, поэтому при достаточно больших $|\lambda|$ приходим к дисперсионному уравнению волновода шириной $h_1 - h_2$ с жесткими стенками $\gamma \operatorname{th} \gamma (h_1 - h_2) = 0$. Назовем корни рассмотренной группы волноводными. Корни другой группы удобно исследовать в предположении, что плотность акустической среды мала. Они сближаются с корнями полиномов $M_{11}(\lambda^2)$, $M_{12}(\lambda^2)$ — волновыми числами пластин в вакууме. Назовем их корнями нулевой группы и обозначим через β_{0l} , $l = 1, 2, \dots, m_{11} + m_{12}$.

Аналогично производится исследование корней дисперсионного уравнения правого волновода (2.2). Нулевая группа корней α_{0l} ($l = 1, 2, \dots, m_{11} + m_{12} + m_{13}$) при уменьшении плотности акустической среды сближается с набором корней полиномов $M_{11}(\lambda^2)$, $M_{12}(\lambda^2)$, $M_{13}(\lambda^2)$. Волноводная же группа корней распадается на две подгруппы ($l \rightarrow \infty$)

$$\alpha_{1l} \sim i \left[\left(\frac{\pi l}{h_1} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2}, \quad \alpha_{2l} \sim i \left[\left(\frac{\pi l}{h_2} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2}$$

В дальнейшем, для удобства выкладок под обозначениями λ_{1l} , λ_{2l} ($l = 1, 2, \dots$) будем понимать множество корней функций $\Delta_1(\lambda^2)$, $\Delta_2(\lambda^2)$, соответственно начинающихся с вещественных (при $\operatorname{Im} k = 0$) чисел.

3. Общее решение задачи. Рассмотрим дифракцию нормальных волн правого (левого) волновода на полубесконечной пластине в волноводе.

Представим поле давления в виде

$$\text{где} \quad P(x, y) = P_0(x, y) + P_1(x, y) \\ P_0(x, y) = (E(\lambda_{1n}))^{-1/2} G_0(\lambda_{1n}^2, y) \exp(-i\lambda_{1n}x) \\ G_0(\lambda^2, y) = G_j(\lambda^2, y)/L_j(\lambda^2)$$

— набегающая по правому волноводу со стороны положительных x нормальная волна с номером n , $P_1(x, y)$ — возбуждаемое ею дифракционное поле. Множитель $(E(\lambda_{1n}))^{-1/2}$ выбран таким образом, чтобы средний за период поток энергии, переносимый распространяющейся нормальной волной с номером n ($\operatorname{Im} \lambda_{1n} = 0$ при $\operatorname{Im} k = 0$), был равен единице. Этот поток есть сумма средних за период потоков энергии, переносимых этой волной по акустической среде Π_0 , т. е.

$$\Pi_0 = \frac{1}{2\rho_0\omega} \operatorname{Im} \int_{h_2}^{h_1} P_0(x, y) \frac{\partial P_0^*(x, y)}{\partial x} dy$$

и потоков энергии, переносимых по упругим пластинам. В случае изгибно колеблющейся пластины эти потоки вычисляются по формуле

$$\Pi = \sum_{j=0}^2 \frac{D_j}{2\rho_0^2\omega^3} \left(\frac{\partial P_0(x, h_j)}{\partial y} \frac{\partial^4 P_0^*(x, h_j)}{\partial y \partial x^3} - \frac{\partial^2 P_0(x, h_j)}{\partial y \partial x} \frac{\partial^3 P_0^*(x, h_j)}{\partial y \partial x^2} \right)$$

Здесь $h_0 = 0$.

Дифракционное поле будем искать в виде интеграла Фурье

$$(3.1) \quad P_1(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) G_0(\lambda^2, y) e^{i\lambda x} d\lambda$$

для которого условия (1.1) — (1.3) автоматически выполнены.

Удовлетворяя условиям (1.4) и (1.5), стандартным образом приходим к неоднородной задаче Римана для аналитических функций. Решая ее при помощи известной процедуры [4, 5], имеем общее решение задачи

$$p(\lambda) = \frac{L_1(\lambda^2) L_2(\lambda^2) \varphi^+(\lambda)}{\Delta_1(\lambda^2)} \left(f_n(\lambda) - \frac{(E(\lambda_{1n}))^{-1/2} \varphi^+(\lambda_{1n}) \Delta_2(\lambda_{1n}^2)}{(\lambda + \lambda_{1n}) L_1(\lambda_{1n}^2) L_2(\lambda_{1n}^2)} \right)$$

где $f_n(\lambda)$ — полином степени $m_{13} - 1$; коэффициенты полинома, зависящие от λ_{1n} , будут определены в п. 4; $\varphi^+(\pm\lambda)$ — результат факторизации функции $\varphi(\lambda) = \Delta_1(\lambda^2)/\Delta_2(\lambda^2)$. Функции $\varphi^+(\lambda)$ и $\varphi^+(-\lambda)$ аналитичны, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной λ :

$$\begin{aligned} \varphi^+(\lambda) &= (\varphi(0))^{1/2} \exp\left(\frac{i\lambda}{\pi} \left(h_1 \ln \frac{h_1 - h_2}{h_1} - h_2 \ln \frac{h_2 - h_1}{h_2} \right)\right) \times \\ &\times \prod_{l=1}^{m_1} q(\lambda, \alpha_{0l}) \prod_{l=1}^{\infty} q(\lambda, \alpha_{1l}) \exp\left(i \frac{\lambda h_1}{l\pi}\right) \prod_{l=1}^{\infty} q(\lambda, \alpha_{2l}) \exp\left(-i \frac{\lambda h_2}{l\pi}\right) \times \\ &\times \left[\prod_{l=1}^{m_2} q(\lambda, \beta_{0l}) \prod_{l=1}^{\infty} q(\lambda, \beta_{1l}) \exp\left(i \frac{\lambda(h_1 - h_2)}{l\pi}\right) \right]^{-1} \\ &(m_1 = m_{11} + m_{12} + m_{13}, m_2 = m_{11} + m_{12}, q(\lambda, \mu) = 1 + \lambda/\mu) \end{aligned}$$

причем в верхней полуплоскости $\varphi^+(\lambda) = O(\lambda^{m_{13}+1/2})$, $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Задача о возбуждении дифракционного поля нормальной волной, набегающей по левому волноводу, решается аналогично.

4. Гранично-контактные условия. Для определения m_{13} произвольных пока коэффициентов полинома $f_n(\lambda)$ необходимо наложить m_{13} гранично-контактных условий, определяющих механический режим поведения кромки полубесконечной пластины. Общий вид этих условий таков:

$$(4.1) \quad R_l P(+0, 0) = \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ F_{1l} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial P(x, 0)}{\partial y} + \right. \\ \left. + F_{2l} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) [P(x, +0) - P(x, -0)] \right\}, \quad l = 1, 2, \dots, m_{13}$$

Здесь $F_{1l}(-i\partial/\partial x)$ и $F_{2l}(-i\partial/\partial x)$ — полиномы, коэффициенты которых определяются механическими свойствами пластины.

Выписывая явное разложение полинома $f_n(\lambda)$ по степеням λ

$$f_n(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{m_{13}-1} \lambda^{m_{13}-1}$$

и накладывая на поле $P(x, y)$ гранично-контактные условия (4.1), после ряда преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^{m_{13}-1} a_m H_{lm} = I_{ln}, \quad l = 1, 2, \dots, m_{13}$$

для определения гранично-контактных постоянных a_m ($m = 0, 1, \dots, m_{13} - 1$). Здесь

$$(4.2) \quad H_{lm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^+(\lambda)}{\Delta_1(\lambda^2)} \lambda^m (F_{1l}(\lambda) L_1(\lambda^2) L_2(\lambda^2) + F_{2l}(\lambda) \Delta_2(\lambda^2)) e^{+i0\lambda} d\lambda$$

$$(4.3) \quad I_{ln} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^+(\lambda_{1n}) M_{13}(\lambda_{1n}^2) \varphi^+(\lambda)}{M_{23}(\lambda_{1n}^2) (\lambda + \lambda_{1n}) \Delta_1(\lambda^2)} (F_{1l}(\lambda) L_1(\lambda^2) L_2(\lambda^2) +$$

$$+ F_{2l}(\lambda) \Delta_2(\lambda^2)) e^{+i0\lambda} d\lambda - F_{1l}(-\lambda_{1n}) + F_{2l}(-\lambda_{1n}) \frac{M_{13}(\lambda_{1n}^2)}{M_{23}(\lambda_{1n}^2)}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda) e^{+i0\lambda} d\lambda = \lim_{x \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \right)$$

Формальное осуществление предельного перехода в (4.2) и (4.3) приводит к расходящимся интегралам. Для регуляризации интегралов в (4.2) и (4.3) потребуем, чтобы выполнялось соотношение (его смысл обсуждался в [2])

$$(4.4) \quad F_{1l}(\lambda) M_{23}(\lambda^2) - F_{2l}(\lambda) M_{13}(\lambda^2) = o(\lambda^{2m_{13}}) \\ |\lambda| \rightarrow \infty \quad (l = 1, 2, \dots, m_{13})$$

задающее связь между граничными и гранично-контактными операторами.

Тогда

$$H_{lm} = \sum_{\text{Im } \lambda > 0} \text{Res} \left[\lambda^m \frac{\varphi^+(\lambda) F_{1l}(\lambda)}{M_{13}(\lambda^2)} \right] - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^m \frac{\varphi^+(\lambda) \Delta_2(\lambda^2)}{M_{13}(\lambda^2) \Delta_1(\lambda^2)} (F_{1l}(\lambda) M_{23}(\lambda^2) - F_{2l}(\lambda) M_{13}(\lambda^2)) d\lambda$$

Аналогично выполняется регуляризация I_{ln} .

5. Матрица рассеяния. Рассеянное поле, возбужденное набегающей по левому волноводу нормальной волной, разыскивается в виде интеграла Фурье (3.1) методом, аналогичным рассмотренному.

Разлагая интегралы в (3.1) и в аналогичном интеграле для случая, когда поле в волноводе возбуждается нормальной волной левого волновода, в суммы вычетов, построим матрицы прохождения S^{21} (S^{12}) и отражения S^{22} (S^{11}) нормальных волн, возбуждаемых в левом (соответственно, правом) волноводах.

Матрица рассеяния

$$S = \begin{vmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{vmatrix}$$

составлена из блоков с элементами

$$S_{mn}^{11} = \left(f_n(-\lambda_{2m}) + \frac{\tau_{1n}}{-\lambda_{2m} + \lambda_{1n}} \right) v_{2m} \Psi(\lambda_{2m}, \lambda_{1n}) \\ S_{mn}^{12} = \left(f_n(\lambda_{1m}) + \frac{\tau_{1n}}{\lambda_{1m} + \lambda_{1n}} \right) v_{1m} \Psi(\lambda_{1m}, \lambda_{1n}) \\ S_{mn}^{21} = \left(g_n(-\lambda_{2m}) + \frac{\tau_{2n}}{\lambda_{2m} + \lambda_{1n}} \right) v_{2m} \Psi(\lambda_{2m}, \lambda_{2n}) \\ S_{mn}^{22} = \left(g_n(\lambda_{1m}) + \frac{\tau_{2n}}{-\lambda_{1m} + \lambda_{2n}} \right) v_{1m} \Psi(\lambda_{1m}, \lambda_{2n})$$

Здесь

$$\tau_{1n} = \varphi^+(\lambda_{1n}) M_{13}(\lambda_{1n}^2) / M_{23}(\lambda_{1n}^2), \quad \tau_{2n} = M_{13}(\lambda_{2n}^2) / \varphi^+(\lambda_{2n}) \\ v_{1m} = L_1(\lambda_{1m}^2) L_2(\lambda_{1m}^2) \varphi^+(\lambda_{1m}) \left[\frac{d}{d\lambda} \Delta_1(\lambda^2) \Big|_{\lambda=\lambda_{1m}} \right]^{-1} \\ v_{2m} = L_1(\lambda_{2m}^2) L_2(\lambda_{2m}^2) \left[\varphi^+(\lambda_{2m}) \frac{d}{d\lambda} \Delta_2(\lambda^2) \Big|_{\lambda=\lambda_{2m}} \right]^{-1}$$

$$\Psi(\lambda, \mu) = [E(\lambda^2)/E(\mu^2)]^{1/2}$$

Коэффициенты полинома $g_n(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{m_{13}-1}\lambda^{m_{13}-1}$ следует находить из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{m=0}^{m_{13}-1} b_m H_{lm} = J_{ln}, \quad l = 1, 2, \dots, m_{13}$$

$$J_{ln} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_{2n} \varphi^+(\lambda)}{(\lambda - \lambda_{2n}) \Delta_1(\lambda^2)} (F_{1l}(\lambda) L_1(\lambda^2) L_2(\lambda^2) + F_{2l}(\lambda) \Delta_2(\lambda^2)) e^{+i0\lambda} d\lambda$$

Контур Γ обходит снизу все полюса подынтегрального выражения, лежащие при $\text{Im } k > 0$ в верхней полуплоскости комплексной переменной λ , за исключением $\lambda = \lambda_{2n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильников В. Н. О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 764—768.
2. Коузов Д. П. Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 2, с. 240—250.
3. Коузов Д. П. Об акустическом поле точечного источника в прямоугольном объеме, ограниченном тонкими упругими стенками. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 305—313.
4. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 323 с.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
26.VI.1984