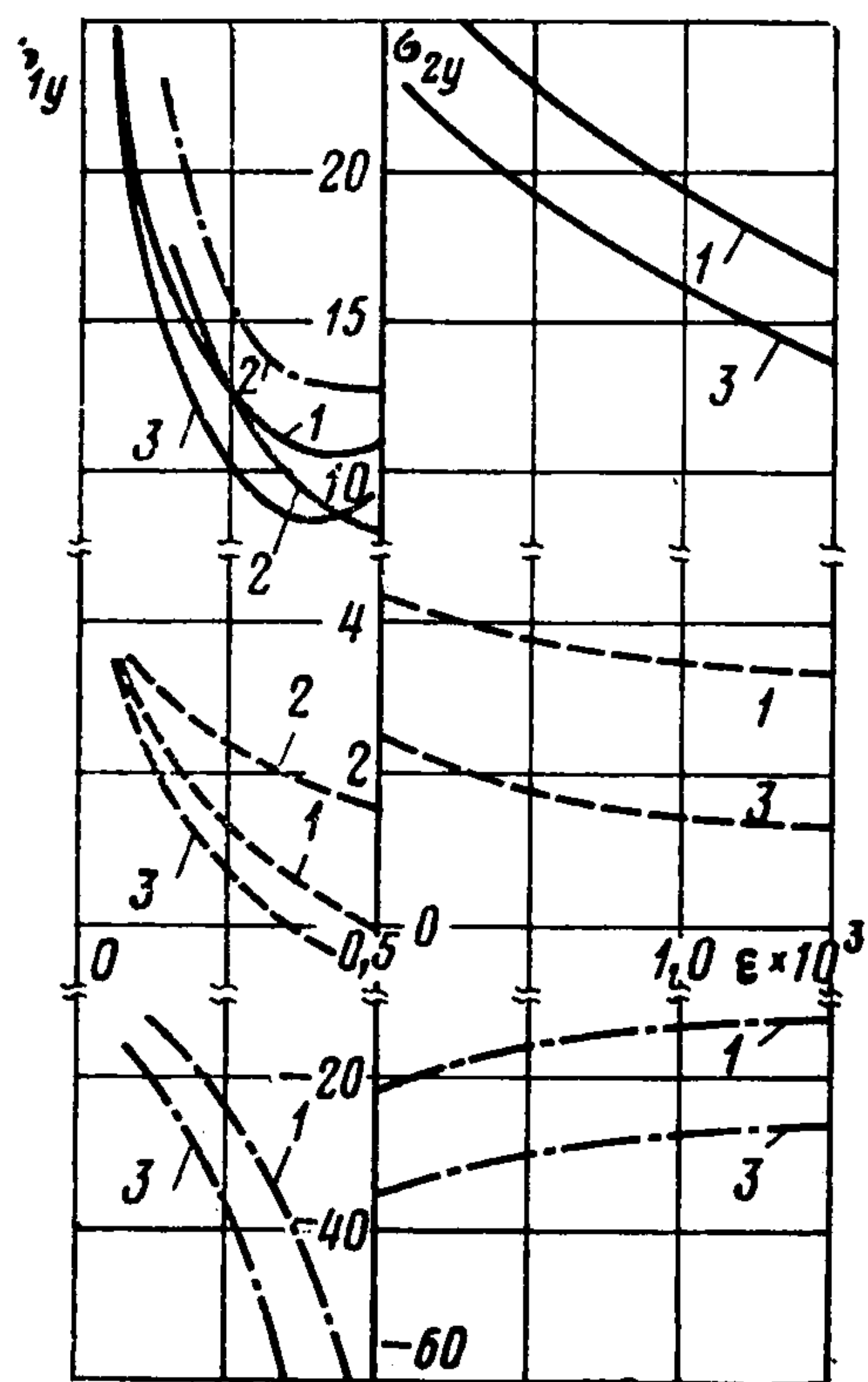
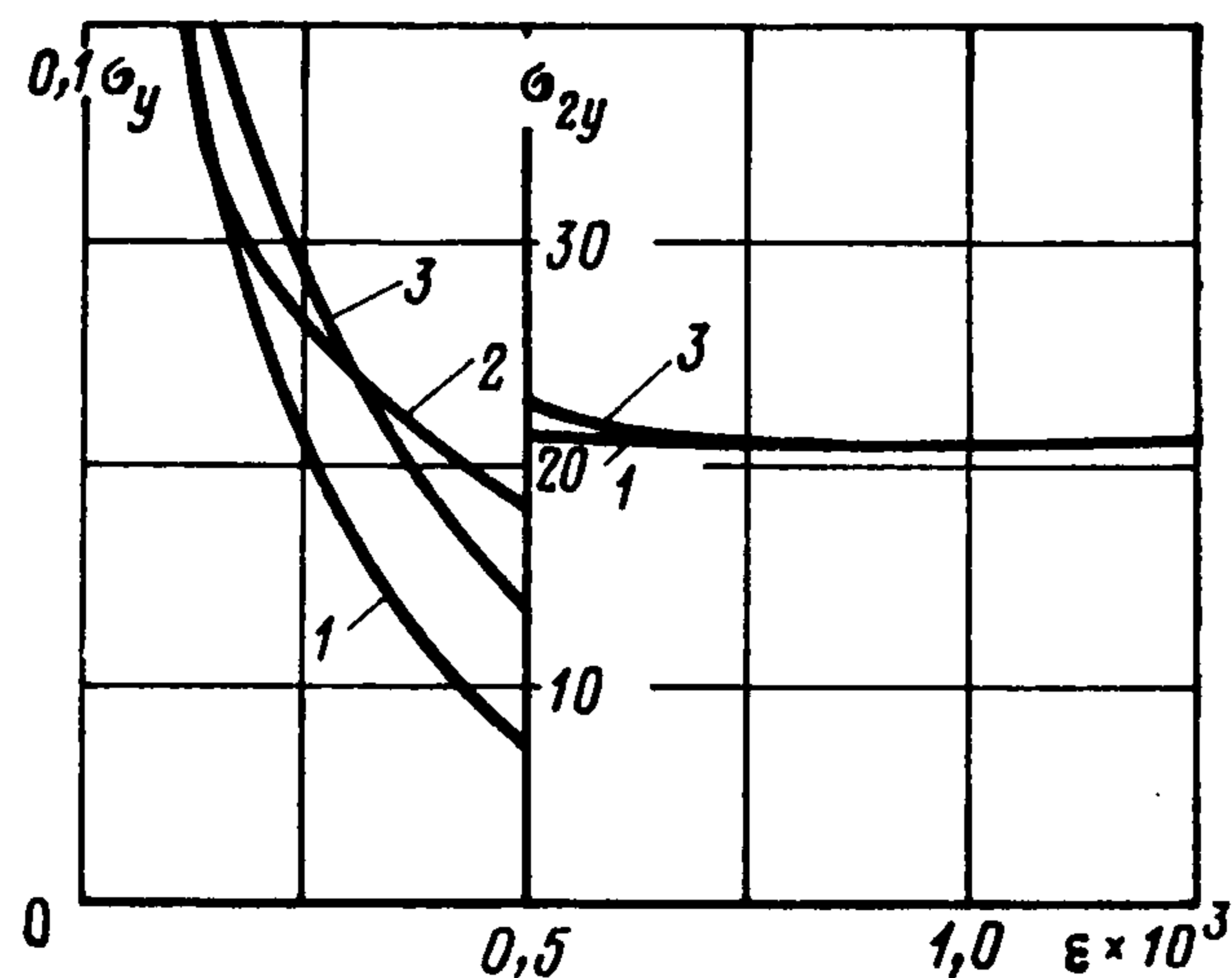


стики, затемняющие область измерений. В удаленной области $\varepsilon > \varepsilon_1$ возникают трудности выбора N — некоторые учитываемые члены асимптотики (2.1) могут быть меньшими точности измерений. Чаще всего пользуются двухпараметрическим представлением ($N = 0, C \neq 0$). При этом область достоверности $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ выбирается установлением корреляционных связей измеряемых величин σ и $\varepsilon^{-1/2}$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Проведенное выше исследование показывает, что в случае близости границы раздела материалов следует положить $C = A + B/\sqrt{2\delta} - \varepsilon$, что значительно улучшает качество асимптотики (2.1). Параметры A_0, A, B вычисляются по известным (из экспериментальных измерений или на основании решения числовыми методами) значениям σ в достаточном количестве точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Драган С. М., Опанасович В. К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 342—348.
2. Евтушенко А. А. Упругое равновесие составной плоскости с произвольно расположенным тонким упругим включением. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 585—881.
3. Schroedl M. A., McGowan J. J., Smith C. W. Determination of stress-intensity factors from photoelastic data with applications to surface-flow problems. — Exp. Mech., 1974, v. 14, No. 10, p. 392—399.

Львов

Поступила в редакцию
3.XI.1983

УДК 539.3:534.1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СОСТАВНОЙ КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

Ляпин А. А., Селезнев М. Г.

Предлагается подход, позволяющий исследовать напряженно-деформированное состояние упругого составного клина в режиме установившихся гармонических колебаний при воздействии на грани клина осциллирующих напряжений, распределенных в некоторой области. Решение задачи для каждого из клиньев строится как суперпозиция решений задач для упругих полупространств, границы которых пересекаются под требуемым углом. Применение предлагаемого подхода иллюстрируется на примере решения модельной задачи об антиплоских колебаниях упругого составного клина. При-

водятся некоторые результаты численного анализа решения задачи. Метод позволяет с единых позиций исследовать задачи в более общей (двумерной или пространственной) постановке.

1. Рассмотрим краевую задачу теории упругости об установившихся колебаниях составного клина при антиплоском нагружении. Пусть упругая среда занимает в декартовой прямоугольной системе координат x, y, z область

$$-\infty < z < \infty \quad (x, y) \in D_j \quad (j = 1, 2) \\ D_1: \{y \geq 0, 0 \leq x \leq y \operatorname{tg} \beta_1\}, \quad D_2: \{y \geq 0, -y \operatorname{tg} \beta_2 \leq x \leq 0\}$$

Упругие свойства среды в области D_j определяются плотностью ρ_j и постоянными Ламе λ_j, μ_j . Движение точек среды описывается в случае антиплоских гармонических колебаний с частотой ω уравнением вида

$$\Delta w_j + \theta_j^2 w_j = 0; \quad \theta_j^2 = \rho_j \omega^2 / \mu_j$$

(w_j — амплитудная функция смещения точки среды в области D_j ; $W_j(x, y, t) = w_j(x, y) e^{-i\omega t}$, $j = 1, 2$).

На границе области заданы осциллирующие напряжения

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x = -y \operatorname{tg} \beta_2, \quad \tau_{zn} = T_3(y_3) e^{-i\omega t}; \quad y_3 = -y / \cos \beta_2 \\ x = y \operatorname{tg} \beta_1, \quad \tau_{zn} = T_1(y_1) e^{-i\omega t}; \quad y_1 = -y / \cos \beta_1 \end{aligned}$$

(n — нормаль к плоскости $x = -y \operatorname{tg} \beta_2$ или $x = y \operatorname{tg} \beta_1$).

На границе раздела областей D_1 и D_2 заданы условия жесткого сцепления, на бесконечности — стремление к нулю компонент тензоров напряжений и деформаций.

Решение задачи о колебаниях каждого клина, входящего в составной, строится с использованием принципа суперпозиции в виде суммы решений задач об установившихся колебаниях двух полупространств, поверхности которых пересекаются под углом β_1 или β_2 . Граница каждого полупространства нагружена распределенными, вообще говоря, неизвестными, сдвиговыми усилиями, ориентированными вдоль оси z .

Рассмотрим клиновидную область, полученную как пересечение двух полупространств. Пусть на гранях клина заданы сдвиговые усилия

$$x = 0, \quad \tau_{zx} = T_2(y) e^{-i\omega t}; \quad x = y \operatorname{tg} \beta_1, \quad \tau_{zn} = T_1(y_1) e^{-i\omega t}$$

Использование метода суперпозиции приводит к следующему выражению, описывающему амплитудную функцию смещения точки среды:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} w_1(X, Y) &= \frac{h}{2\pi\mu_1} \int_{\sigma} (\xi_1 + \xi_2) d\alpha \\ \xi_n &= \int_{-\infty}^{\infty} Z_n e^{i\alpha\eta} d\eta \cdot k_n(\alpha, X, Y), \quad n = 1, 2; \quad k_1(x, X, Y) = k_2(\alpha, X, Y) |_{\beta_1=\pi} \\ k_2(\alpha, X, Y) &= \gamma_1^{-1} \exp \{-\gamma_1 (-X \cos \beta_1 + Y \sin \beta_1) + i\alpha (X \sin \beta_1 + \\ &+ Y \cos \beta_1)\} \\ \gamma_1 &= (\alpha^2 - \rho_1 \omega^2 h^2 / \mu_1)^{1/2}, \quad X = x/h, \quad Y = y/h \end{aligned}$$

Контур σ определяется применением принципа предельного поглощения и имеет следующий вид [1]: огибает положительные особенности подынтегральной функции снизу, отрицательные — сверху, а на остальной части совпадает с вещественной осью, h — постоянная, имеющая размерность длины.

Функции $Z_1(Y), Z_2(Y)$ находим из решения следующей системы интегральных уравнений:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} Z_1(-Y) - I_2^- = T_1(-Y), \quad Z_2(Y) - I_1^+ = T_2(Y) \\ I_n^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \bar{Z}_n(\alpha) k_2(\pm\alpha, 0, Y) (\gamma_1 \cos \beta_1 \pm i\alpha \sin \beta_1) \gamma_1^{-1} d\alpha \end{aligned}$$

($\bar{Z}_n(\alpha)$ — преобразования Фурье от $Z_n(Y)$).

Аналогично, при соответствующей замене величин, характеризующих область D_2 , определяется поле смещений во втором клине с упругими параметрами ρ_2, μ_2 .

Таким образом, расчет волнового поля в составном теле при использовании предлагаемой методики проводится в два этапа. На первом этапе необходимо решить систему интегральных уравнений

$$(1.4) \quad \begin{aligned} KZ &= T \\ Z &= \operatorname{col} \{Z_1, \dots, Z_4\}, \quad T = \operatorname{col} \{T_1, 0, T_3, 0\} \end{aligned}$$

относительно $Z_1(-Y)$, $Z_2(Y)$, $Z_3(-Y)$, $Z_4(Y)$, полученную из условий стыковки (равенства касательных напряжений τ_{zx} и перемещений на общей грани клина) и граничных условий (1.1). На втором — определить волновое поле в каждом из клиньев, подставляя функции Z_j в (1.2).

Решение системы (1.4) ищем в пространстве суммируемых функций, что обеспечивает конечность энергии упругих колебаний в любом ограниченном объеме среды.

2. Исследуем поведение искомых функций Z_j в окрестности угловой точки. Последнее проводится для построения эффективной численной схемы решения системы (1.4) с учетом наличия неподвижной сингулярной особенности ядра интегрального оператора системы при $Y \rightarrow 0$ и наличием особенности в окрестности вершины клина решений этой системы.

Заменяя значения ядер в (1.4) предельными при стремлении параметра $\alpha \rightarrow \infty$ и удержав лишь интегралы, содержащие особенность в окрестности угловой точки, применим к полученной таким образом системе $K_0 Z_0 = T$ преобразование Меллина [2] по Y .

В результате задача нахождения $Z_0(Y)$ сводится к вычислению интеграла вида

$$Z_{0j}(Y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} Y^{-s} \frac{\Delta_j(s)}{\Delta(s)} ds$$

Здесь

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Delta(s) &= k \cos u_1 \sin u_2 + \sin u_1 \cos u_2 - \cos v \sin u_1 - k \cos v \sin u_2 + \\ &+ k \cos v \cos u_1 + \sin v \cos u_2 - \frac{1}{2}(1+k) \sin 2v \\ u_n &= 2(s-1)(\pi - \beta_n), \quad n = 1, 2; \quad v = 2s\pi, \quad k = \mu_1/\mu_2 \end{aligned}$$

В результате численного анализа функции (2.1) получено, что в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$ комплексные корни уравнения $\Delta(s) = 0$ отсутствуют. Зависимость действительных корней s_k от параметра β_2 при $\beta_1 = \pi/4$, $k = 1/2$ показаны на фиг. 1. Определив порядок особенности функций Z_j , можно построить оператор, приводящий систему (1.4) к эффективному для численной реализации виду. В качестве такового можно взять построенный ранее при исследовании решений системы при $Y \rightarrow 0$ оператор

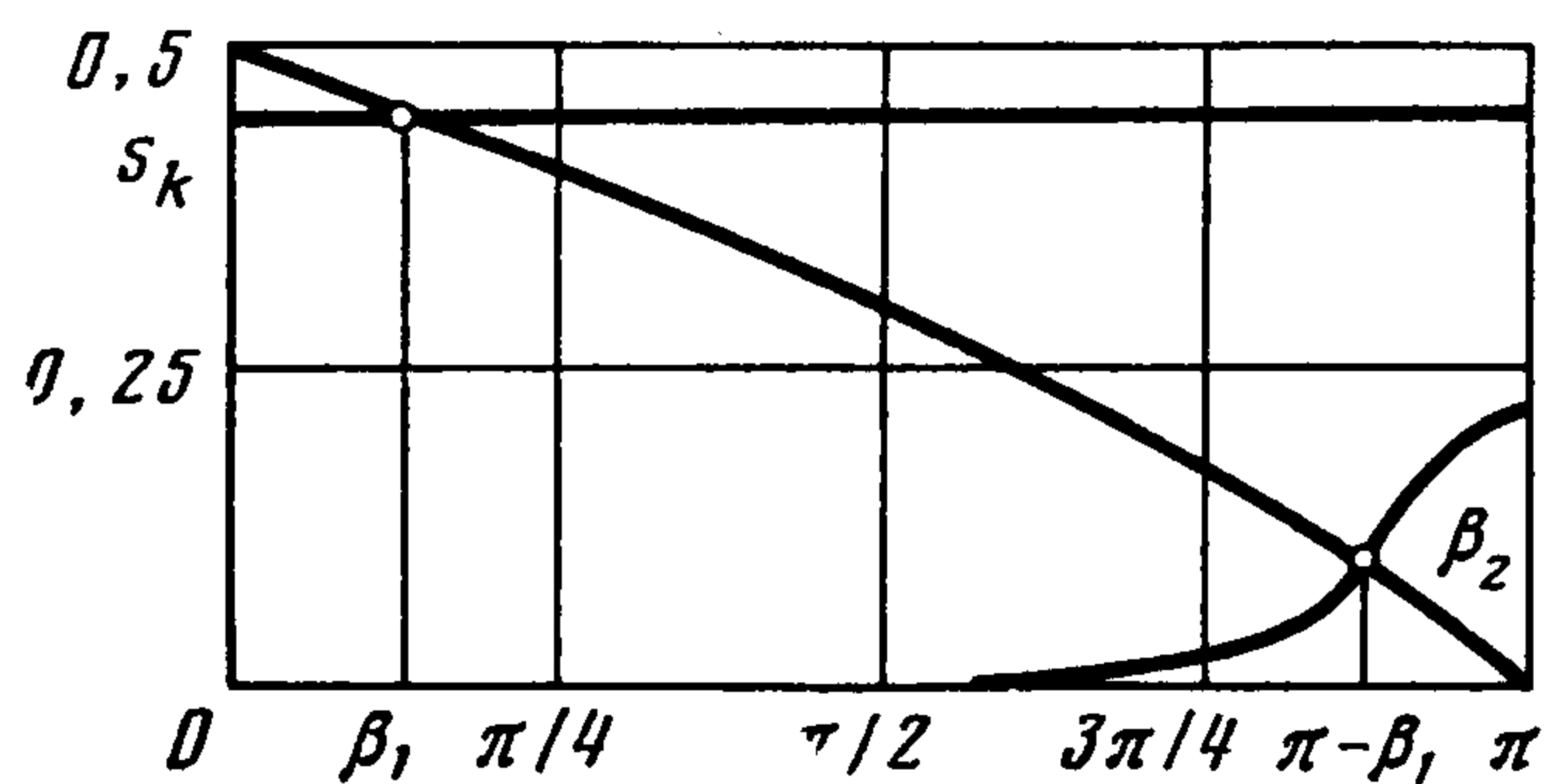
$$K_0^{-1}R = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} k_0^{-1}(Y, \xi) R(\eta) \xi^{\eta-1} d\xi d\eta$$

При воздействии оператора $K_0^{-1}R$ на систему (1.4) слева после ряда преобразований получаем регулярную в пространстве суммируемых функций систему относительно функций $X_j = Z_j(Y) Y^{s_*}$, не имеющих уже особенности в угловой точке

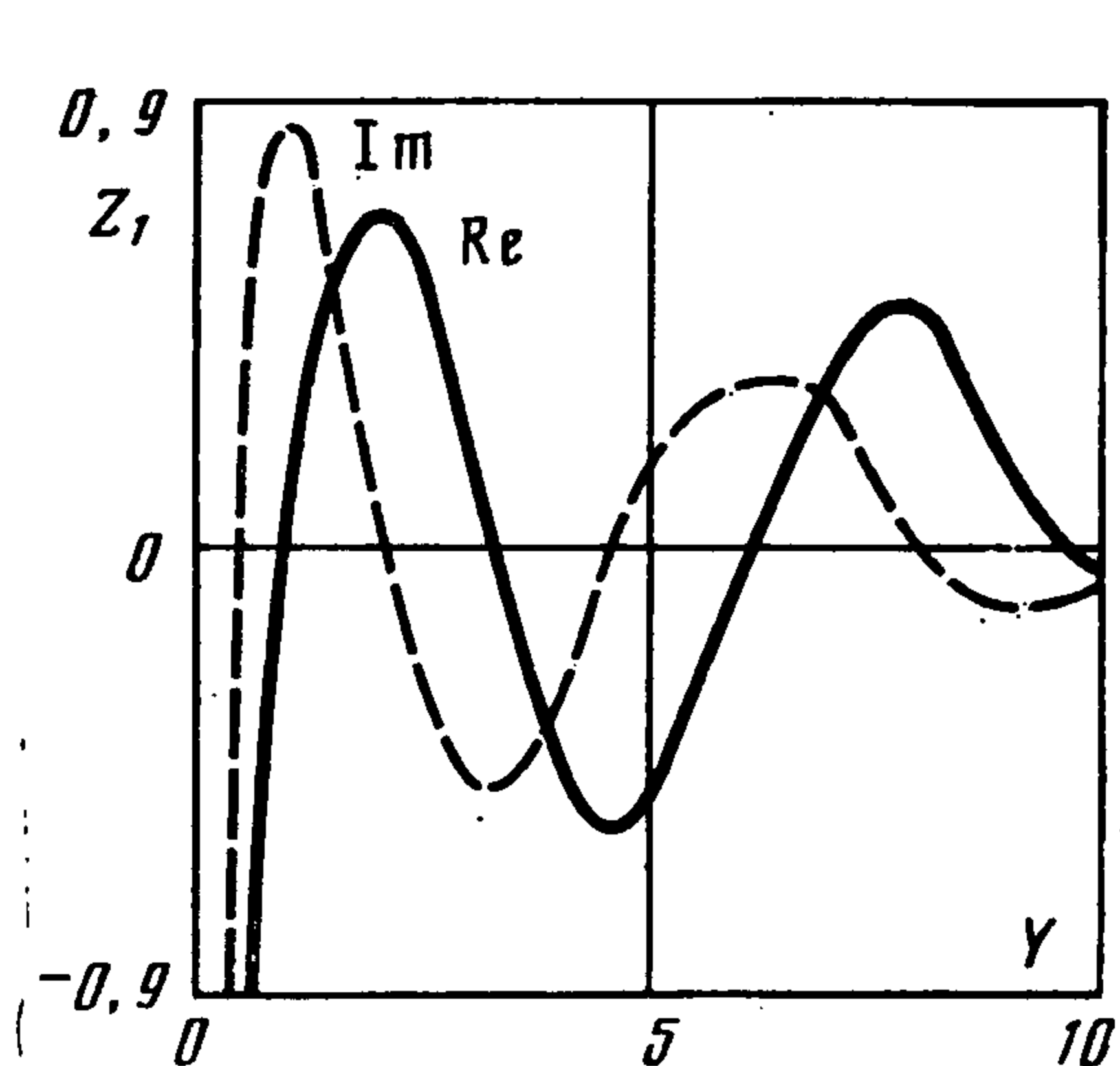
$$(2.2) \quad \begin{aligned} X + K_* X &= X + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^{\infty} k_0^{-1}(Y, s) s^{\eta-1} \int_0^{\infty} \frac{k(\eta, \xi) - k_0(\eta, \xi)}{\xi^{s_*}} X(\xi) d\xi d\eta ds \\ s_* &= \max_k \{s_k\}; \quad 0 < s_* < 1/2 \end{aligned}$$

3. Дальнейшее исследование системы проведено численно. Для определения $Z_j(Y)$ использовался метод Бубнова—Галеркина [3]. В качестве базисной системы взяты функции вида $l_k(p, Y) = \exp(-pY) L_k(Y)$; $0 < p < 1$, $L_k(Y)$ — полиномы Лаггера. Исследование получающейся бесконечной системы линейных [алгебраических] уравнений относительно коэффициентов разложения по l_k проведено по методу редукции [3]. При этом оказалось достаточным сохранение шести членов в разложении для получения решения с погрешностью, не превышающей 10%. В результате анализа практической сходимости метода редукции показано, что наиболее эффективной с точки зрения численной реализации представляется область с сечением в виде клина, лежащего на полуплоскости. При этом процесс сходимости улучшается, когда модуль сдвига μ_1 полупространства больше модуля сдвига μ_2 клина. На фиг. 2 отражено поведение действительной и мнимой составляющих функций Z_1 при $\mu_1 = 2 \cdot 10^5$, $\mu_2 = 2 \cdot 10^4$, $\beta_2 = \pi/6$ с погрешностью, не превышающей 10%.

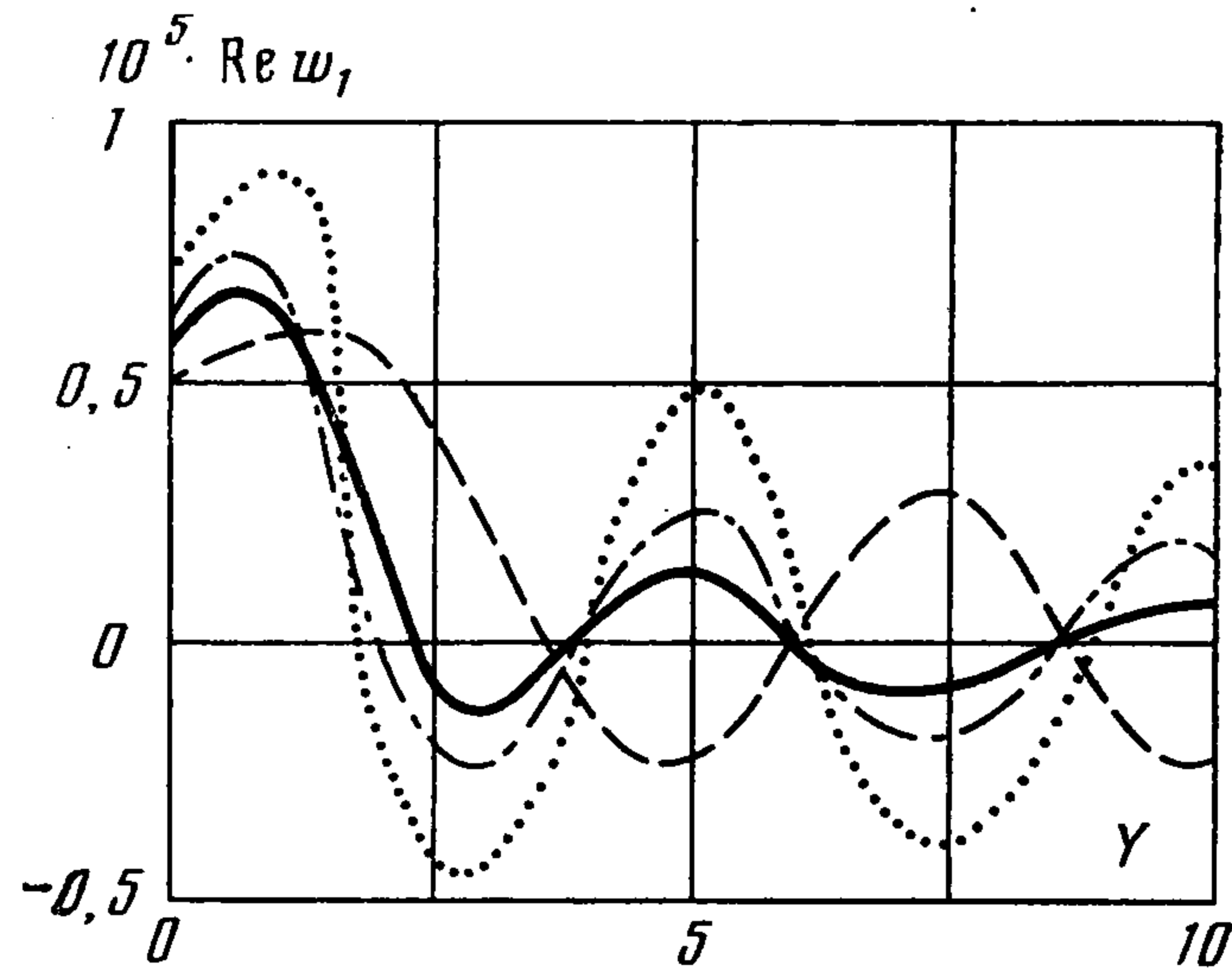
4. На втором этапе предлагаемой методики решения краевой задачи по решению системы (1.4) определялось волновое поле в среде. Численно получены результаты, позволяющие оценить поле смещений клина при изменении параметров задачи (β_1 , β_2 , ω , μ_1 , μ_2). За основу взята задача с «мягким» клином на полупространстве. На фиг. 3 показано поведение амплитудной функции смещения при удалении от вершины клина



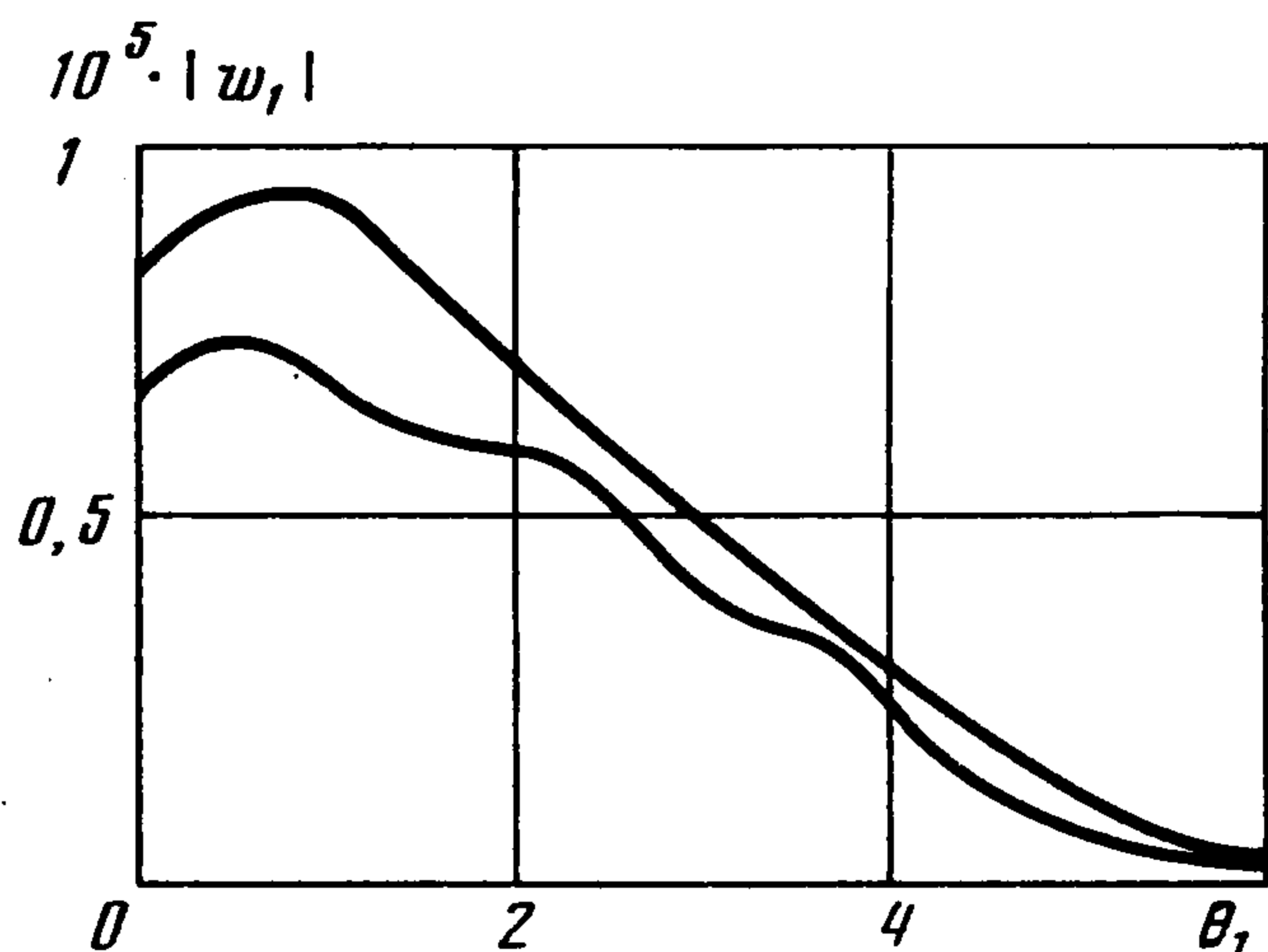
Фиг. 1



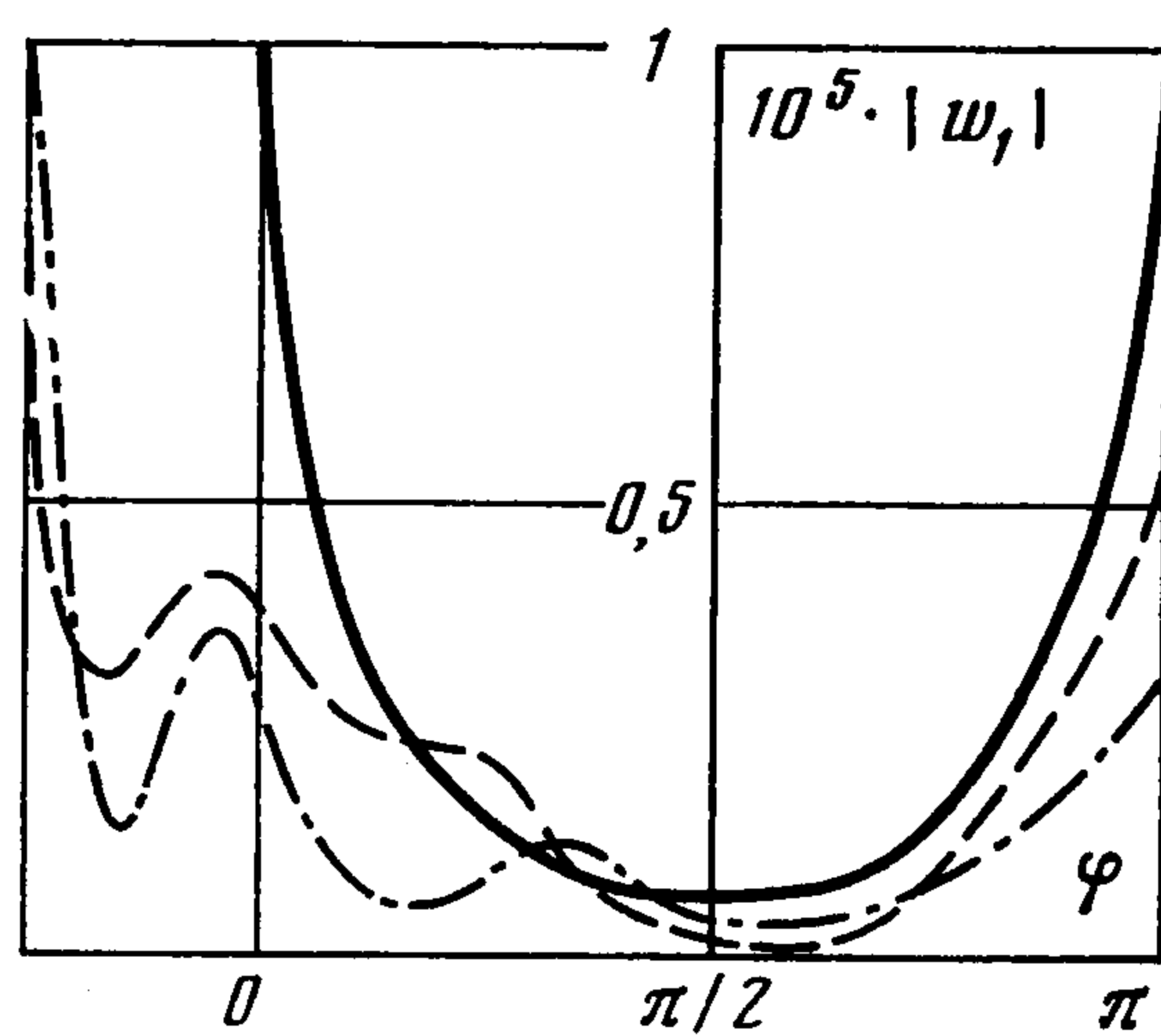
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

в глубь полупространства при разных β_2 (сплошная, штрихпунктирная, штриховая и пунктирная линии соответствуют значениям $\beta_2/\pi = 11/12, 5/6, 3/4, 2/3$), $\mu_1 = 2 \cdot 10^5$, $\mu_2 = 10^5$; $X = Y$.

На фиг. 4 приведена амплитудно-частотная характеристика точки среды с координатами $X = Y = 10$ при $\beta_1 = \pi$, $\beta_2 = \pi/4$, $\mu_1 = 2 \cdot 10^5$, $\mu_2 = 10^5$. Видно, что наблюдается соответствие поведения $w_1(\theta_1)$ амплитудно-частотной характеристике той же точки полупространства без клина. Однако существуют диапазоны частот, определяющие локальный рост амплитуды. Эти диапазоны соответствуют окрестности «резонансных» частот напыленного клина. Для $w_2(\theta_2)$ происходит смещение основной резонансной частоты в сторону уменьшения при относительной стабильности последующих.

Сравнение диаграмм направленности поля смещений для полупространства с «мягким» клином и без него при изменении радиуса R окружности диаграммы представлено на фиг. 5. Штриховой линии соответствует $R = 12$, штрихпунктирной $R = 20$, сплошной линией показана диаграмма для полупространства без клина при $R = 20$. В области, где происходит сшивание клина с полупространством, наблюдается колебание уровня модуля по сравнению с более плавной картиной в среде под свободной поверхностью. Распространяющаяся в глубь полупространства сдвиговая волна имеет меньшую интенсивность для области с клином. Ясно видно перераспределение энергии, вносимое клиновидной областью. При увеличении жесткости μ_2 происходит естественное усиление влияния клина на распределение поля смещений в полупространстве.

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 362 с.
3. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости.— М.: Наука, 1981. 688 с.

Ростов в/Д

Поступила в редакцию
3.XII.1984

УДК 534.3 : 534.1

О МАТРИЦЕ РАССЕЯНИЯ В ВОЛНОВОДЕ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

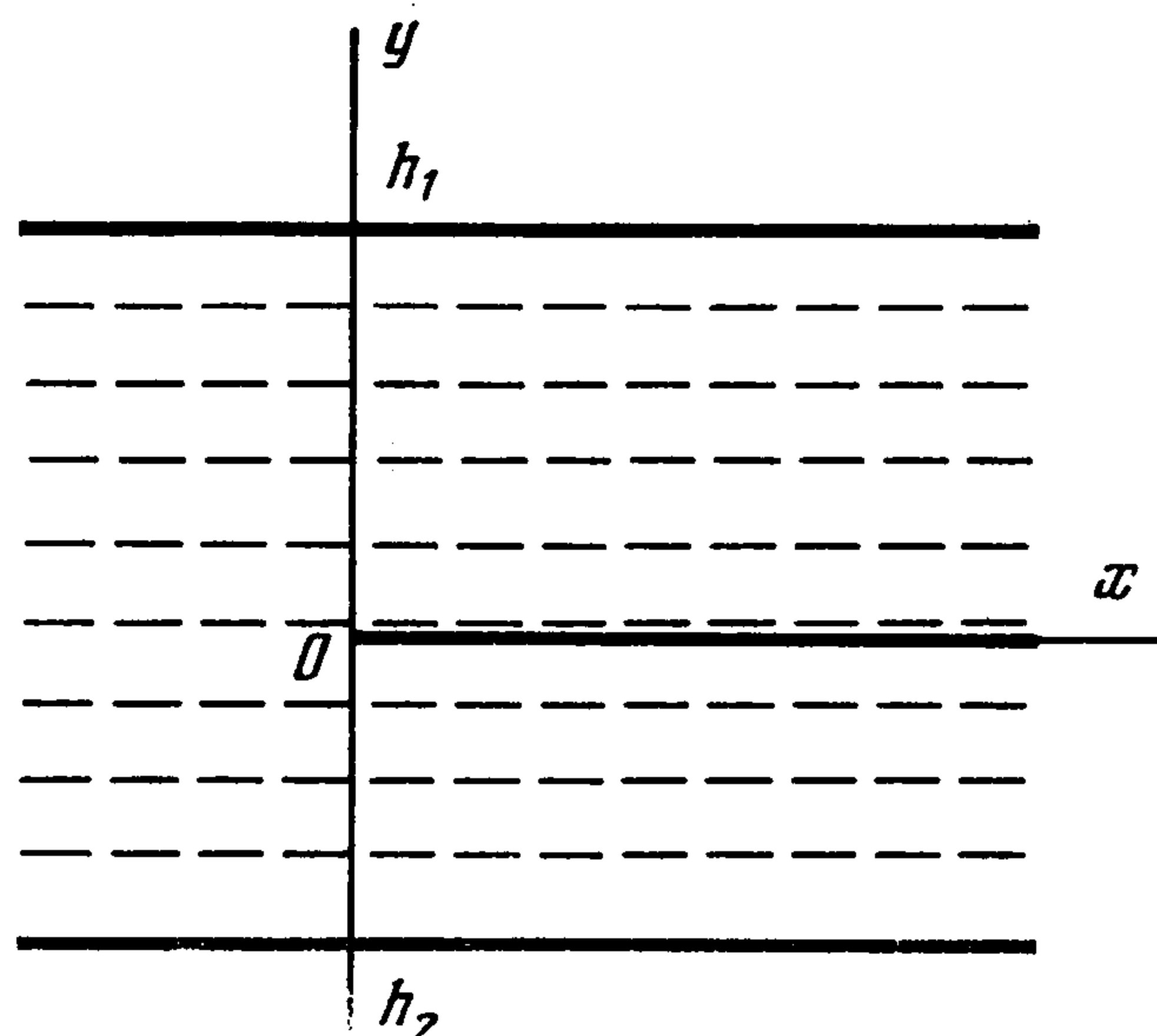
Лавров Ю. А., Лукьянов В. Д.

Исследуется спектр нормальных волн и определяется матрица рассеяния для плоского волновода с упругими стенками и расположенной внутри него полубесконечной упругой пластиной. Механический режим поведения упругих пластин описывается дифференциальными операторами общего вида. Задачи этого типа относятся к классу гранично-контактных [1, 2]. Для однозначной разрешимости этих задач следует сформулировать дополнительные гранично-контактные условия, описывающие механическое поведение кромки полубесконечной пластины, находящейся внутри волновода. Указывается регуляризация интегралов, возникающих при удовлетворении гранично-контактным условиям общего вида.

1. Постановка задачи. Ищем решение двумерного однородного уравнения Гельмгольца

$$(1.1) \quad \partial^2 P / \partial x^2 + \partial^2 P / \partial y^2 + k^2 P = 0$$

в полосе $-\infty < x < +\infty$, $h_2 < y < h_1$ с вырезанным лучом $y = 0$, $x > 0$ (фигура), описывающего распределение давления $P(x, y)$ при возбуждении системы заданным



акустическим полем $P_0(x, y)$. Здесь $k = \omega/c$ — волновое число, ω — круговая частота; зависимость волновых процессов от времени, выбранная в виде $\exp(-i\omega t)$, здесь и всюду далее опущена, c — скорость звука в среде.

Механическое поведение стенок волновода — упругих пластин — описывается граничными условиями

$$(1.2) \quad L_j \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) P(x, h_j) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad j = 1, 2$$

$$\left(L_j \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = (-1)^j M_{1j} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} + M_{2j} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right)$$

На луче $y = 0$, $x > 0$ расположена тонкая упругая пластина, совершающая антисимметричные колебания, которые описываются граничными условиями ($x > 0$)

$$(1.3) \quad \frac{\partial P(x, +0)}{\partial y} = \frac{\partial P(x, -0)}{\partial y}$$

$$(1.4) \quad M_{13} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} P(x, 0) + M_{23} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) [P(x, +0) - P(x, 0)] = 0$$