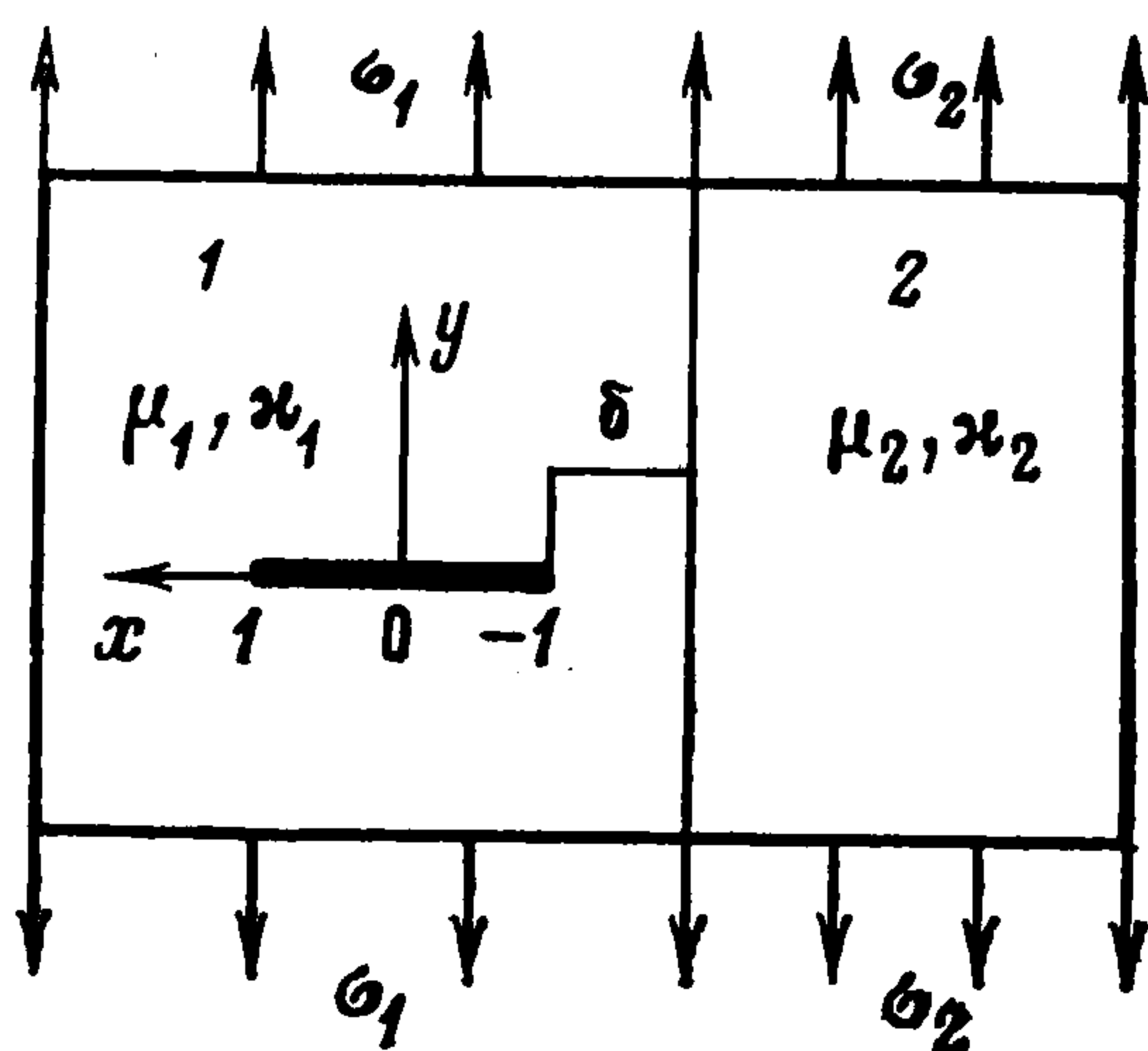


**ОБ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОРЦА
ТОНКОГО УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ
В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ**

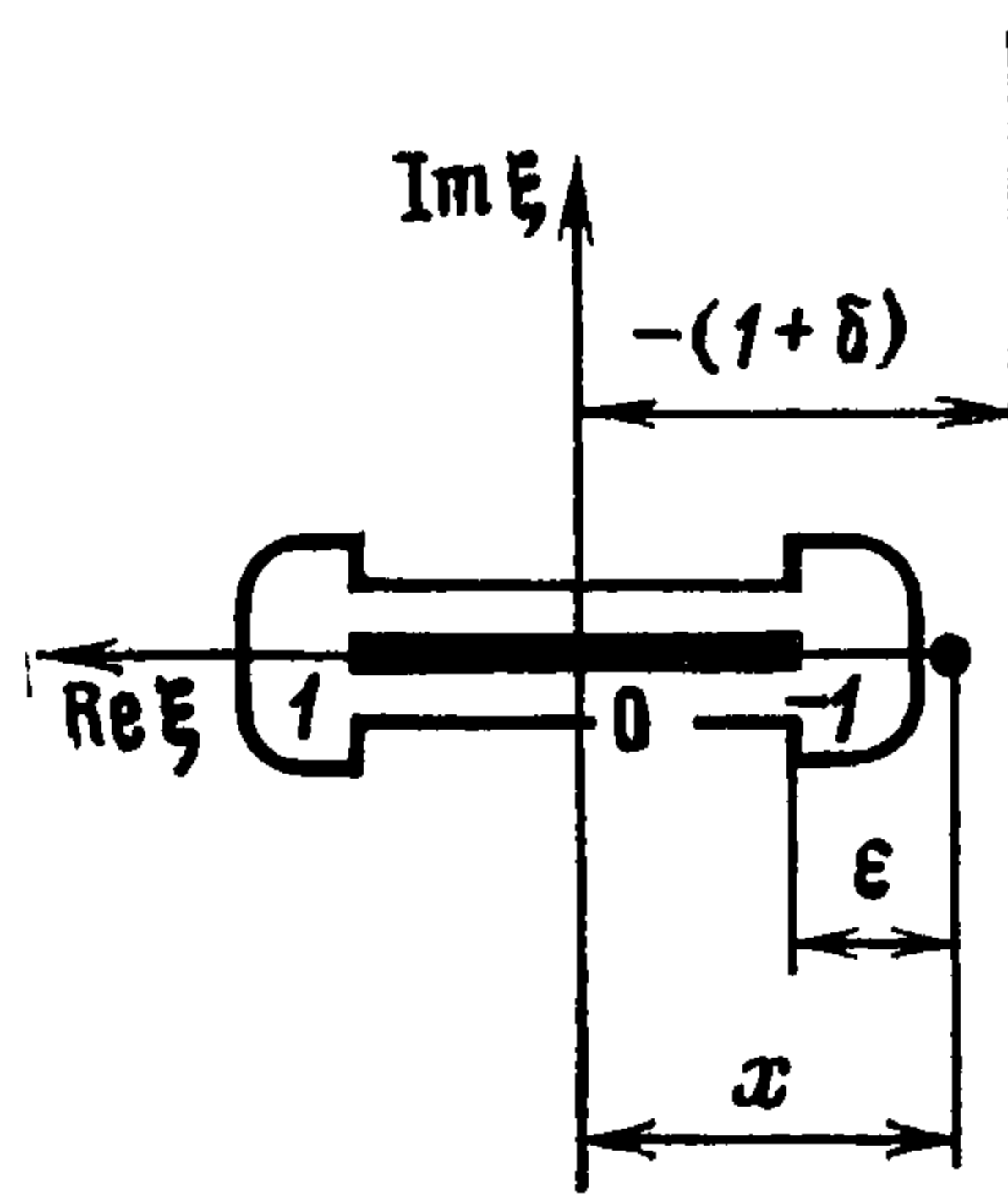
Грилицкий Д. В., Евтушенко А. А., Сорокатый Ю. И.

Исследуется асимптотическое поведение нормальных напряжений в окрестности вершины тонкого упругого включения, расположенного вблизи линии спая разнородных упругих полуплоскостей. Установлено, что кроме общеизвестной корневой особенности [1] существует два дополнительных члена асимптотики, которыми нельзя пренебрегать. Один из них имеет порядок единицы, а другой содержит «мнимую особенность» и вносит весомый вклад в напряженное состояние при малых расстояниях торца включения от линии раздела материалов.

1. Нормальные напряжения и их асимптотическое поведение. Тонкое упругое включение нормализованной длины 2 (здесь и далее все расстояния рассматриваются по отношению к полудлине включения) расположено в одной из спаянных изотропных



Фиг. 1



Фиг. 2

полуплоскостей, имеющих различные упругие характеристики. Расстояние правого торца включения от линии раздела материалов равно δ (фиг. 1). На достаточном удалении от включения действует поле растягивающих усилий σ_1 и σ_2 , причем $\sigma_2 = \sigma_1 (1 + \kappa_1) \mu_2 / [(1 + \kappa_2) \mu_1]$, $\kappa_j = (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j)$ для обобщенного плоского напряженного состояния, $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$ для состояния плоской деформации, μ_j — модуль сдвига, ν_j — коэффициент Пуассона материалов полуплоскостей ($j = 1, 2$). Соответствующие величины с нулевым индексом относятся к материалу включения.

Учитывая малую толщину включения, его можно моделировать скачком касательных напряжений σ_{1xy} и нормальных перемещений u_{1y} на линии $y = 0$:

$$(1.1) \quad \sigma_{1xy}(x) = -^{1/2} f_1(x), \quad \partial u_{1y} / \partial x = -^{1/2} f_2(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

В предположении равенства поперечных деформаций на кромках включения имеем два условия взаимодействия тонкого упругого включения с матрицей

$$(1.2) \quad \partial u_{1x} / \partial x = k_0 \sigma_x - k_1 \sigma_{1y}, \quad u_{1y} / h = k_0 \sigma_{1y} - k_1 \sigma_x$$

$$\sigma_x = N_{-1} - \frac{1}{2h} \int_{-1}^x \sigma_{1xy}(t) dt, \quad k_0 = \frac{1 + \kappa_0}{8\mu_0}, \quad k_1 = \frac{3 - \kappa_0}{8\mu_0}$$

N_{-1} — нормальное напряжение на торце $x = -1$ включения, h — его относительная толщина. Условия (1.2) позволяют получать решения задач для включений произвольной жесткости: от абсолютно жесткого ($\mu_0 = \infty$) до абсолютно податливого ($\mu_0 = 0$), моделирующего разрез.

Решение сформулированной задачи путем использования интегрального преобразования Меллина и условий взаимодействия (1.2) дано в работе [2]. Записана система интегральных уравнений с особым ядром типа Коши относительно искомых функций скачка (1.1). Численное решение этой системы в классе функций, обладающих интегрируемой особенностью в точках $x = \pm 1$, построено методом механических квадратур, с использованием узлов Гаусса—Чебышева. Зная функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, нормальные напряжения σ_{1y} на продолжении осевой линии включения ($-1 < x < -1 - \delta$)

вычисляем по формулам [2]

$$(1.3) \quad \sigma_{1y}(x) = -\frac{1-\kappa_1}{2(1+\kappa_1)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F_1(t) dt}{t-x} + \frac{2\mu_1}{1+\kappa_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F_2(t) dt}{t-x} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^2 K_{1j}(x, t) F_j(t) dt, \quad m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad F_j(t) = \frac{f_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$K_{1j}(x, t) = \sum_{k=0}^2 c_{kj} (x+1+\delta)^k \frac{d^k}{dx^k} (t+x+2+2\delta)^{-1} \quad (j=1, 2)$$

$$\bar{c}_{k1} = \bar{c}_{k1}/(1+\kappa_1), \quad c_{k2} = -\bar{c}_{k2} \cdot 2\mu_1/(1+\kappa_1) \quad (k=0, 1, 2)$$

$$\bar{c}_{01} = m_5 + 3(2+\kappa_1)m_6, \quad \bar{c}_{11} = 2(7+\kappa_1)m_6, \quad \bar{c}_{21} = 4m_6$$

$$\bar{c}_{02} = m_5 + 3m_6, \quad \bar{c}_{12} = 12m_6, \quad \bar{c}_{22} = 4m_6, \quad m_1 = m\kappa_1 - \kappa_2$$

$$m_2 = m + \kappa_2, \quad m_3 = 1 - m, \quad m_4 = 1 + m\kappa_1, \quad m_5 = m_1/m_2, \quad m_6 = m_3/m_4$$

Путем интегрирования по контуру L в комплексной плоскости $\xi = x + iy$ (фиг. 2), после оценки вычетов в точке $\xi = x$ из формулы (1.3) находим

$$(1.4) \quad \sigma_{1y}(x) = -\frac{1-\kappa_1}{2(1+\kappa_1)} F_1(x) + \frac{2\mu_1}{1+\kappa_1} F_2(x) + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^2 (-1)^k c_{kj} (x +$$

$$+ 1 + \delta)^k \varphi_{kj}(x_1) + \frac{C_0}{2}$$

$$\varphi_{0j}(x_1) = \frac{F_j(x_1)}{2}, \quad \varphi_{1j}(x_1) = \frac{1}{2} \left[\frac{f_j'(x_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} - \frac{x_1 f_j(x_1)}{(\sqrt{x_1^2-1})^3} \right]$$

$$\varphi_{2j}(x_1) = \frac{1}{2} \left[\frac{j_j''(x_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} - \frac{x_1 f_j'(x_1)}{(\sqrt{x_1^2-1})^3} + \frac{(1+2x_1^2) f_j(x_1)}{(\sqrt{x_1^2-1})^5} \right],$$

$$x_1 = -(x+2+2\delta)$$

Правая часть соотношения (1.4) содержит четыре особые точки. Две из них, $x = \pm 1$, соответствуют обыкновенной корневой особенности в вершинах тонкого упругого включения [1]. Другая пара точек, $x = -1 - 2\delta$ и $x = -3 - 2\delta$, является отображением точек $x = \pm 1$ относительно линии раздела материалов полуплоскостей. Назовем их «мнимыми», поскольку выражение (1.4) справедливо при $x \geq -1 - \delta$. Однако, как показал [дальнейший] численный анализ, мнимая особая точка $x = -1 - 2\delta$ вносит весомый вклад в напряжение σ_{1y} при достаточно малых значениях δ , т. е. когда правая вершина включения достаточно близко расположена к линии раздела материалов.

На основании работы [2] для нормальных напряжений во второй полуплоскости имеем

$$\sigma_{2y} = \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^2 K_{2j}(x, t) F_j(t) dt$$

$$K_{21}(x, t) = -\frac{m}{2\pi m_2 m_4} K(\kappa_1), \quad K_{22}(x, t) = \frac{\mu_2}{\pi m_2 m_4} K(-1)$$

$$K(\kappa_1) = m_4 \frac{3t-x+2+2\delta}{(t-x)^2} - m_2 \frac{(2+\kappa_1)t - \nu_1 x + 2 + 2\delta}{(t-x)^2}$$

Методом контурного интегрирования можно показать, что

$$(1.5) \quad \sigma_{2y} = -\frac{m}{2m_2 m_4} \left\{ \frac{f_1(x)}{\sqrt{x^2-1}} \left\{ m_4 \left[3 - \frac{2x(x+1+\delta)}{x^2-1} \right] - \right. \right.$$

$$\left. - m_2 \left[2 + \kappa_1 - \frac{2x(x+1+\delta)}{x^2-1} \right] \right\} + 2(x+1+\delta) (m_4 - m_2) \frac{f_1'(x)}{\sqrt{x^2-1}} \left. \right\} +$$

$$+ \frac{\mu_2}{m_2 m_4} \left\{ \frac{f_2(x)}{\sqrt{x^2-1}} \left\{ m_4 \left[3 - \frac{2x(x+1+\delta)}{x^2-1} \right] - \right. \right.$$

$$\left. - m_2 \left[1 - \frac{2x(x+1+\delta)}{x^2-1} \right] \right\} + 2(x+1+\delta) (m_4 - m_2) \frac{f_2'(x)}{\sqrt{x^2-1}} \left. \right\} + \frac{C_0'}{2}$$

Здесь, как и ранее, C_0' является результатом контурного интегрирования вдоль окружности радиуса R при $R \rightarrow \infty$. Отметим, что решение (1.5) пригодно при $x \leq -1 - \delta$.

Исследуем асимптотическое поведение нормальных напряжений. Путем замены $x = -1 - \varepsilon$ перенесем начало системы координат в вершину $x = -1$ включения и рассмотрим соответствующие выражения для σ_{1y} и σ_{2y} при $\varepsilon \ll 1$, считая при этом, что δ имеет порядок ε . Введем коэффициенты интенсивности напряжений таким образом, чтобы в частных случаях трещины или абсолютно жесткого включения получить известные результаты. Таковыми у торца $x = -1$ будут

$$k_1^1 = -\frac{1 - \nu_1}{2(1 + \nu_1)} \frac{f_1(-1)}{\sqrt{a_0}}, \quad k_1^2 = \frac{2\mu_1}{1 + \nu_1} \frac{f_2(-1)}{\sqrt{a_0}}$$

(a_0 — полудлина включения). Тогда выражение (1.4) можно представить в следующем виде:

$$(1.6) \quad \sigma_{1y} = \sum_{j=1}^2 \frac{k_1^j \sqrt{a_0}}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \beta_j \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k \alpha_k \bar{c}_{kj}}{2\sqrt{2\delta - \varepsilon}} \left(\frac{\delta - \varepsilon}{2\delta - \varepsilon} \right)^k \right] + \frac{C_0}{2} + O(\sqrt{\varepsilon})$$

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0,5, \alpha_2 = 0,75, \beta_1 = 2/(1 + \nu_1), \beta_2 = 1$$

Соотношение (1.6) кроме известной корневой особенности содержит упомянутую «мнимую» особенность, вклад которой при малых значениях δ может быть более значительным, чем вклад от слагаемых порядка $\varepsilon^{-1/2}$.

Для исследования напряжений во втором материале рассмотрим уравнение (1.5) при $\varepsilon > \delta$, $\delta = O(1)$. Тогда

$$(1.7) \quad \sigma_{2y} = \frac{(1 + \nu_1) m}{(1 - \nu_1) m_2 m_4} \left\{ m_4 \left[3 - \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon} \right] - m_2 \left[2 + \nu_1 - \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon} \right] \right\} \frac{k_1^1 \sqrt{a_0}}{\sqrt{2\varepsilon}} +$$

$$+ \frac{(1 + \nu_1) m}{2m_2 m_4} \left\{ m_4 \left[3 - \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon} \right] - m_2 \left[1 - \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon} \right] \right\} \frac{k_1^2 \sqrt{a_0}}{\sqrt{2\varepsilon}} + \frac{C_0'}{2} + O(\sqrt{\varepsilon})$$

2. Анализ результатов вычислений. На фиг. 3 показано поведение нормальных напряжений σ_{jy} ($j = 1, 2$) в окрестности торца включения, расположенного вблизи линии раздела материалов полуплоскостей, выполненных из алюминия и эпоксидной смолы ($m = 23,08$; $\nu_1 = 0,35$; $\nu_2 = 0,3$) при $\delta = 0,0005$. Относительная жесткость включения $k = \mu_0/\mu_1$ равна 10^{-3} (сплошные линии), 10 (штриховые линии), 10^3 (штрихпунктирные). Безразмерная ширина включения $h = 0,01$. Кривые, обозначенные цифрами 1, 2, 3, соответствуют трем различным вычислительным схемам: 1 — точное решение по формулам (1.1) с использованием результатов работы [2]; 2 — решение, полученное на основании обычного, учитывающего только особенность вида $\varepsilon^{-1/2}$, асимптотического представления при известных коэффициентах интенсивности напряжений (КИН); 3 — решение, полученное по формулам (1.6), (1.7) при $C_0 = C_0' = 0$ и тех же значениях КИН!

Во всех случаях по отношению к точному решению (кривые 1) новое асимптотическое решение (кривые 3) дает правильную качественную картину распределения нормальных напряжений и отличается лишь на постоянную, что, очевидно, является следствием $C_0 = C_0' = 0$. Кривые 2 заметно отличаются от точного решения как в количественном, так и в качественном отношении (отсутствие минимума в случае более податливых включений $k < 1$, противоположный знак при более жестких включениях $k > 1$).

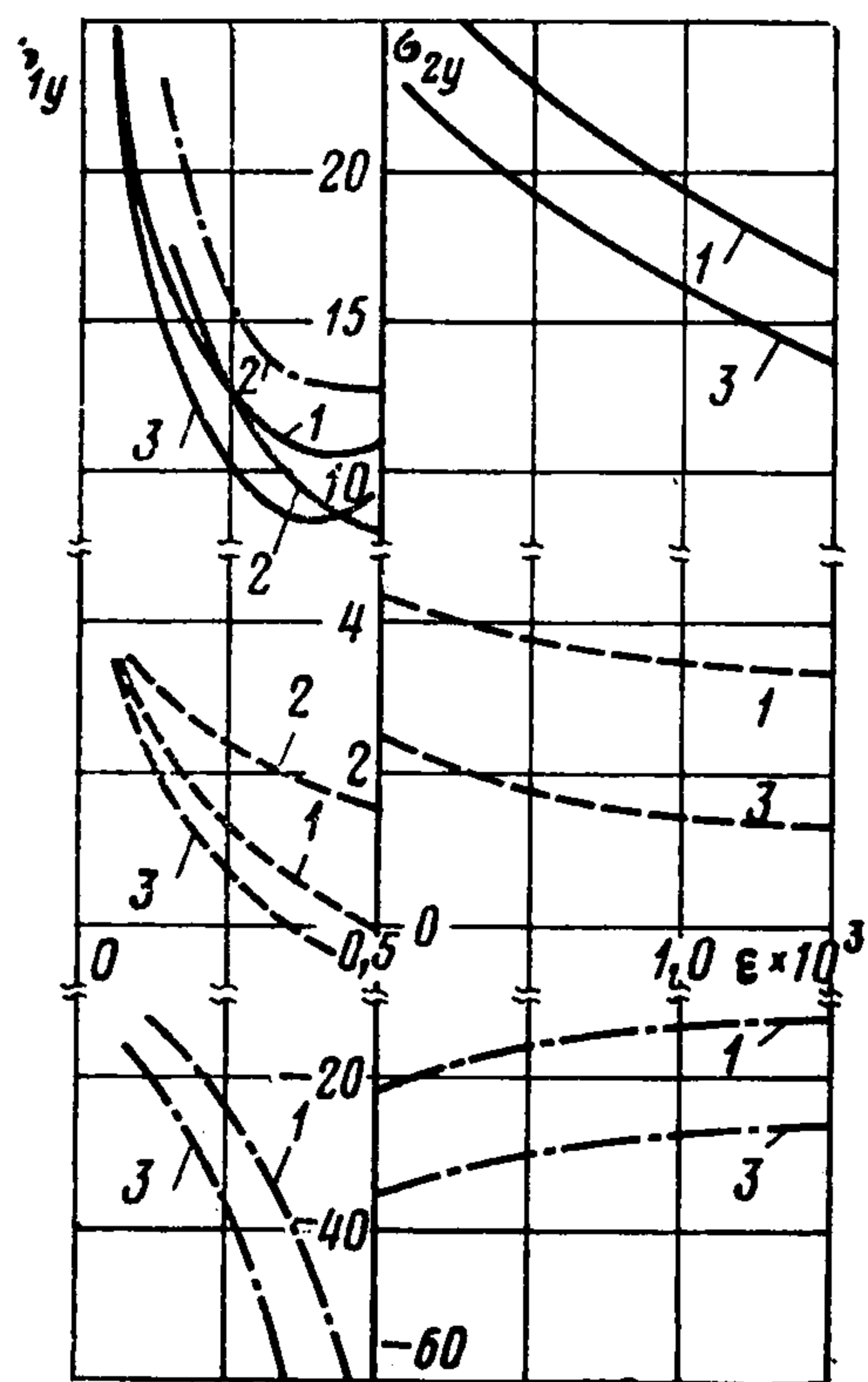
На фиг. 4 представлены результаты вычислений для включения, расположенного в материале с более высоким модулем сдвига ($m = 0,0433$; $\nu_1 = 0,3$; $\nu_2 = 0,35$; $k = 0,1$). В этом случае нормальные напряжения σ_{2y} , как и следовало ожидать, пренебрежимо малы.

Укажем путь возможного практического использования полученных результатов. При вычислении КИН по данным интерферометрических измерений напряжения σ в окрестности вершины остроугольного дефекта представимы в виде [3]

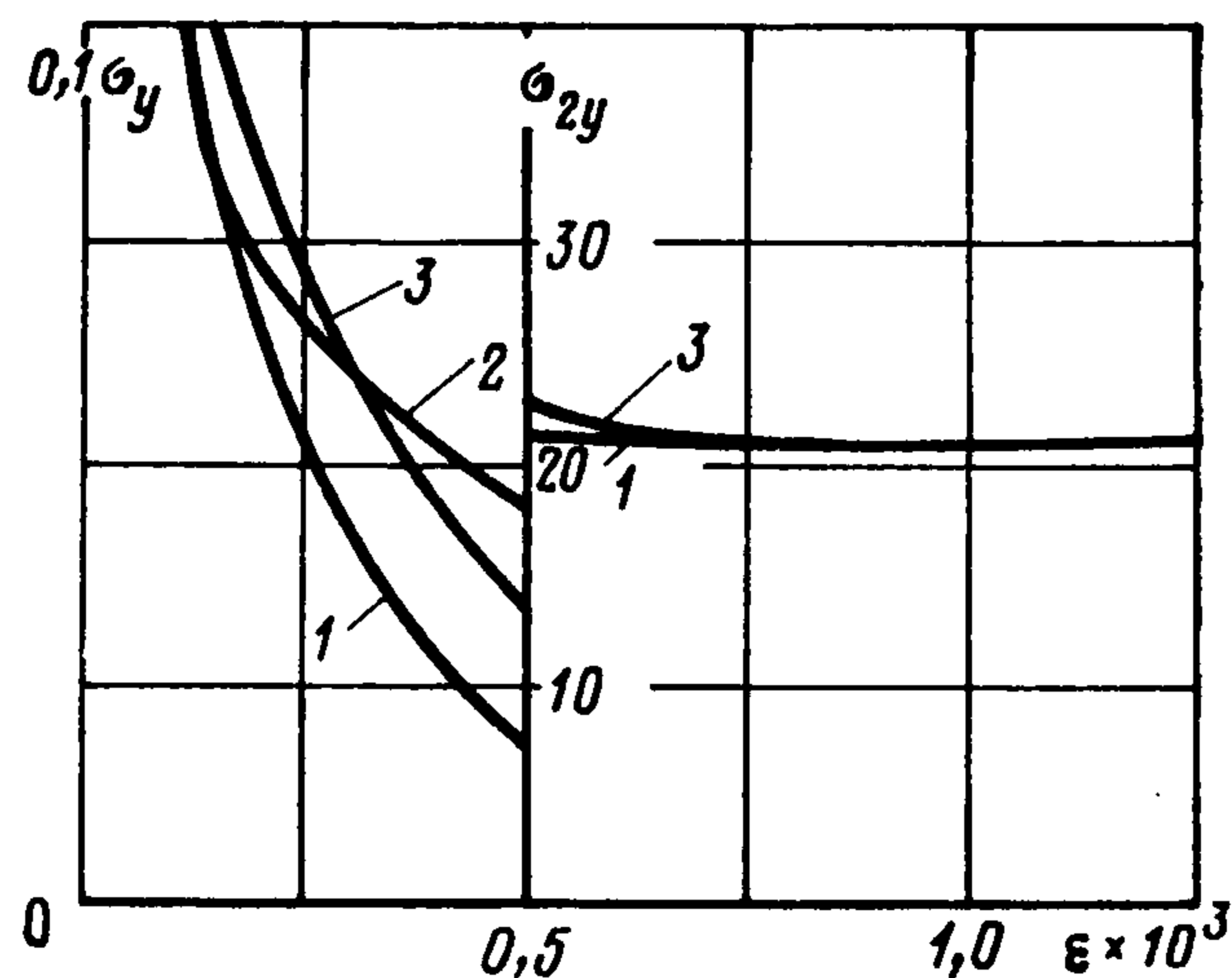
$$(2.1) \quad \sigma_i = \sum_{n=0}^N A_n \varepsilon^{n-1/2} + C$$

где A_n ($n = 0, 1, \dots, N$), C — неизвестные постоянные, причем $A_0 = (k_1^1 + k_1^2) \sqrt{a_0/2}$. Для малых расстояний $\varepsilon < \varepsilon_0$ можно положить $N = 0$, $C = 0$. Но, как правило, в этой области формируется зона предразрушения — напряжения релаксируют, материал разрыхляется, ведет себя нелинейно. Кроме того, здесь наблюдаются оптические кау-

стики, затемняющие область измерений. В удаленной области $\epsilon > \epsilon_1$ возникают трудности выбора N — некоторые учитываемые члены асимптотики (2.1) могут быть меньшими точности измерений. Чаще всего пользуются двухпараметрическим представлением ($N = 0$, $C \neq 0$). При этом область достоверности $\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_1$ выбирается установлением корреляционных связей измеряемых величин σ и $\epsilon^{-1/2}$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Проведенное выше исследование показывает, что в случае близости границы раздела материалов следует положить $C = A + B/\sqrt{2\delta} - \epsilon$, что значительно улучшает качество асимптотики (2.1). Параметры A_0 , A , B вычисляются по известным (из экспериментальных измерений или на основании решения числовыми методами) значениям σ в достаточном количестве точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Драган С. М., Опанасович В. К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 342—348.
2. Евтушенко А. А. Упругое равновесие составной плоскости с произвольно расположенным тонким упругим включением. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 585—881.
3. Schroedl M. A., McGowan J. J., Smith C. W. Determination of stress-intensity factors from photoelastic data with applications to surface-flow problems. — Exp. Mech., 1974, v. 14, No. 10, p. 392—399.

Львов

Поступила в редакцию
3.XI.1983

УДК 539.3:534.1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СОСТАВНОЙ КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

Ляпин А. А., Селезнев М. Г.

Предлагается подход, позволяющий исследовать напряженно-деформированное состояние упругого составного клина в режиме установившихся гармонических колебаний при воздействии на грани клина осциллирующих напряжений, распределенных в некоторой области. Решение задачи для каждого из клиньев строится как суперпозиция решений задач для упругих полупространств, границы которых пересекаются под требуемым углом. Применение предлагаемого подхода иллюстрируется на примере решения модельной задачи об антиплоских колебаниях упругого составного клина. При-