Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 531.36

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

Леонов Г. А.

Для системы Лоренца (СЛ) предлагается алгоритм построения положительно инвариантных множеств, содержащих сепаратрисы, выходящие из нулевой седловой особой точки 0. Оцениваются области, в которых содержатся бифуркационные кривые, соответствующие существованию у СЛ петель сепаратрис седла 0. Из полученных оценок, в частности, следует, что при стремлении числа Прандтля к бесконечности неограниченно увеличивается область отсутствия петель сепаратрис седла 0. Ранее этот факт для некоторых значений параметров был установлен путем численного анализа [1]. В предложенном здесь алгоритме использованы идеи, изложенные в [2—6].

Известно [7], что при наличии трех состояний равновесия СЛ может быть записана в форме (μ, γ, A — положительные числа)

$$\sigma^{\cdot} = \eta, \quad \eta^{\cdot} = -\mu\eta - z\sigma - \varphi(\sigma), \quad z^{\cdot} = -Az - B\sigma\eta \tag{1}$$
$$\varphi(\sigma) = -\sigma + \gamma\sigma^3, \quad B \in R^1$$

Будем рассматривать случай $B \geqslant 0$.

Введем в рассмотрение непрерывные функции $P_0(\sigma) = {}^1/_2 B\sigma^2$, $Q_k(\sigma)$, $P_k(\sigma)$ ($k = 1, \ldots, N$), удовлетворяющие соотношениям

$$P_k(0) = 0 \tag{2}$$

$$Q_k(0) = \rho; \quad Q_k'(0) > 0 \text{ при } \rho = 0 \tag{3}$$

$$\frac{dQ_k}{d\sigma} Q_k + \mu Q_k + \varphi(\sigma) - P_{k-1}(\sigma)\sigma = 0, \quad \forall \sigma \in (0, a_k) \tag{4}$$

$$\frac{dP_k}{d\sigma} = B\sigma - \frac{AP_k}{Q_k(\sigma)}, \quad \forall \sigma \in (0, a_k) \tag{5}$$

Здесь ρ — некоторое неотрицательное число, $[-a_k, a_k]$ — максимальный промежуток определения решения $Q_k(\sigma)$ уравнения (4) с начальными данными (3). Ясно, что на этом промежутке определено также и решение $P_k(\sigma)$ уравнения (5).

В некоторых случаях для конечного числа k может быть выполнено равенство $a_k = +\infty$. Однако можно показать, что при достаточно больших значениях k $a_k < +\infty$.

Рассмотрим далее непрерывные функции $p_0(\sigma) = {}^1/_2 B(a_N^2 - \sigma^2)$, $q_k(\sigma)$, $p_k(\sigma)$ ($k = 1, \ldots, M$), удовлетворяющие соотношениям

$$p_k(a_N) = 0 \tag{6}$$

$$q_k(a_N) = 0, \quad q_k'(a_N) = -\infty \tag{7}$$

$$\frac{dq_k}{d\sigma} q_k + \mu q_k + \varphi(\sigma) + p_{k-1}(\sigma)\sigma = 0, \quad \forall \sigma \in (\alpha_k, a_N) \tag{8}$$

$$\frac{dp_k}{d\sigma} = -B\sigma - \frac{Ap_k}{q_k(\sigma)}, \quad \forall \sigma \in (\alpha_k, a_N) \tag{9}$$

Здесь $[\alpha_k, a_N]$ — максимальный промежуток определения решения $q_k(\sigma)$ уравнения (8) с начальными данными (7).

Если $\alpha_k > 0$, то доопределим функции $p_k(\sigma)$ и $q_k(\sigma)$ следующим образом:

$$p_k(\sigma) = p_k(\alpha_k), \quad q_k(\sigma) = 0, \quad \forall \sigma \in [0, \alpha_k] \tag{10}$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Phi_0 = \{x = \mathrm{col}\{\sigma, \eta, z\} \mid z \geqslant -{}^1/_2 B\sigma^2\}$$
$$\Phi_k = \{x \mid z \geqslant -P_k(\sigma), \quad \eta \leqslant Q_k(\sigma), \quad \sigma \in [0, a_k]\}$$
$$\Phi_k^- = \{x \mid z \geqslant -P_k(|\sigma|), \quad \eta \geqslant -Q_k(|\sigma|), \quad \sigma \in [-a_k, 0]\}$$
$$\psi_k = \{x \mid z \leqslant p_k(\sigma), \quad \eta \geqslant q_k(\sigma), \quad \sigma \in [0, a_N]\}$$
$$\psi_k^- = \{x \mid z \leqslant p_k(|\sigma|), \quad \eta \leqslant -q_k(|\sigma|), \quad \sigma \in [-a_N, 0]\}$$
$$\Omega = (\Phi_N \cap \psi_M) \cup (\Phi_N^- \cap \psi_M^-)$$

Теорема 1. Пусть $|q_M(0)| \leqslant \rho$. Тогда множество Ω положительно инвариантно.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Пусть $\rho = 0$, $\alpha_M > 0$. Тогда сепаратриса системы (1), выходящая из седла $\sigma = \eta = z = 0$, не стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Для доказательства теоремы 1 потребуются следующие леммы.

Лемма 1. Множество Φ_0 положительно инвариантно и для любого решения $x(t)$ системы (1) выполнено соотношение

$$\varliminf_{t\to+\infty} V(t) \geqslant 0 \quad (V(t) = z(t) + {}^1/_2 B\sigma(t)^2) \tag{11}$$

Доказательство. Ясно, что

$$V(t)^\cdot = -Az(t) = -AV(t) + {}^1/_2 AB\sigma(t)^2 \geqslant -AV(t)$$

Отсюда следует оценка $V(t) \geqslant e^{-At}V(0)$, из которой вытекает утверждение леммы.

Заметим, что для СЛ, записанной в классической форме

$$x_1^\cdot = -\sigma_1(x_1 - y_1),\ y_1^\cdot = -x_1z_1 + rx_1 - y_1, \quad z_1^\cdot = x_1y_1 - bz_1 \tag{12}$$

неравенство (11) примет вид

$$\varliminf_{t\to+\infty}\left(z_1(t) - \frac{1}{2\sigma_1}x_1(t)^2\right) \geqslant 0$$

Из этого неравенства и теоремы В. И. Юдовича [4, 7] следует, в частности, справедливость гипотезы [8] о том, что $\varliminf z_1(t) \geqslant 0$ при $t \to +\infty$ и любых σ_1, b, r.

Лемма 2. Имеют место неравенства

$$P_{k+1}(\sigma) < P_k(\sigma), \quad Q_{k+1}(\sigma) < Q_k(\sigma), \quad \forall\sigma \in (0, a_{k+1})$$

Доказательство. Из неравенств $P_1(\sigma) > 0$, $Q_1(\sigma) > 0$, $\forall\sigma \in (0, a_1)$ и уравнения (5) следует, что $P_1(\sigma) < P_0(\sigma)$, $\forall\sigma \in (0, a_1)$. Отсюда с использованием принципа сравнения Чаплыгина [4] для уравнения (4) получим, что $Q_2(\sigma) < Q_1(\sigma)$, $\forall\sigma \in (0, a_2)$. Но тогда из (5) следует неравенство $P_2(\sigma) < P_1(\sigma)$, $\forall\sigma \in (0, a_2)$, из которого, вновь используя принцип Чаплыгина для уравнения (4), получим оценку $Q_3(\sigma) < Q_2(\sigma)$, $\forall\sigma \in (0, a_3)$. Продолжая этот процесс далее, получим утверждение леммы.

Из леммы 2 вытекают включения $\Phi_{k+1} \subset \Phi_k$, $\Phi_{k+1}^- \subset \Phi_k^-$.

Лемма 3. Если для решения $x(t)$ системы (1) выполнены соотношения $x(0) \in \Phi_k$, $\sigma(t) \geqslant 0$, $\forall t \in [0, T]$, то $x(t) \in \Phi_k$, $\forall t \in [0, T]$.

Доказательство. Учитывая непрерывную зависимость решений от начальных данных, достаточно показать, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &(z + P_k(\sigma))^\cdot > 0, \quad \forall x \in G_1 = \{x \mid \sigma \in (0, a_k),\ z + P_k(\sigma) = 0, \\ &\eta < Q_k(\sigma)\} \\ &(\eta - Q_k(\sigma))^\cdot < 0, \quad \forall x \in G_2 = \{x \mid \sigma \in (0, a_k), \quad z \geqslant -P_k(\sigma) \\ &\eta = Q_k(\sigma)\} \end{aligned} \tag{13}$$

Покажем сначала, что имеет место первое неравенство (13). В случае $x \in G_1$ имеем

$$\begin{aligned} (z + P_k(\sigma))^\cdot &= -Az - B\sigma\eta + P_k'\eta = AP_k + (P_k' - B\sigma)\eta = \\ &= AP_k\left(1 - \frac{\eta}{Q_k(\sigma)}\right) > 0 \end{aligned}$$

Если же $x \in G_2$, имеем

$$\begin{aligned} (\eta - Q_k(\sigma))^\cdot &= -\mu\eta - z\sigma - \varphi(\sigma) - Q_k'\eta = -\mu Q_k - Q_k'Q_k - \\ &- \varphi(\sigma) - z\sigma = -\sigma(P_{k-1}(\sigma) + z) < -\sigma(P_k(\sigma) + z) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 4. Если для решения $x(t)$ системы (1) выполнены соотношения $x(0) \in \Phi_k^-$, $\sigma(t) \leqslant 0$, $\forall t \in [0, T]$, то $x(t) \in \Phi_k^-$, $\forall t \in [0, T]$.

Лемма 5. Имеют место неравенства

$$p_{k+1}(\sigma) < p_k(\sigma),\ q_{k+1}(\sigma) > q_k(\sigma), \quad \forall\sigma \in (\alpha_{k+1}, a_N)$$

Доказательство. Из неравенств $p_1(\sigma) > 0$, $q_1(\sigma) < 0$, $\forall\sigma \in (\alpha_1, a_N)$ и уравнения (9) следует, что $p_1(\sigma) < p_0(\sigma)$, $\forall\sigma \in (\alpha_1, a_N)$. Отсюда, используя принцип Чаплыгина для уравнения (8), получим, что $q_2(\sigma) > q_1(\sigma)$, $\forall\sigma \in (\alpha_2, a_N)$. Но тогда из (9) следует неравенство $p_2(\sigma) < p_1(\sigma)$, $\forall\sigma \in (\alpha_2, a_N)$, из которого, вновь используя принцип Чаплыгина для уравнения (8), получим оценку $q_3(\sigma) > q_2(\sigma)$, $\forall\sigma \in (\alpha_3, a_N)$. Продолжая этот процесс далее, получим утверждение леммы.

Из леммы 5 вытекают включения $\psi_{k+1} \subset \psi_k$, $\psi_{k+1}^- \subset \psi_k^-$.

Лемма 6. Если для решения $x(t)$ системы (1) выполнены соотношения $x(0) \in \psi_k$, $\sigma(t) \geqslant 0$, $\forall t \in [0, T]$, то $x(t) \in \psi_k$, $\forall t \in [0, T]$.

Доказательство. Достаточно показать, что имеют место неравенства

(14) $$(z - p_k(\sigma))^{\cdot} < 0, \quad \forall x \in G_3 = \{x \mid \sigma \in (0, a_N), \quad z = p_k(\sigma), \ \eta > q_k(\sigma)\}$$

(15) $$(\eta - q_k(\sigma))^{\cdot} > 0, \quad \forall x \in G_4 = \{x \mid \sigma \in (0, a_N), \quad z \leqslant p_k(\sigma), \quad \eta = q_k(\sigma)\}$$

Для $k = 0$ неравенство (14) примет вид $-Az - B\sigma\eta + B\sigma\eta < 0$, т. е. оно выполнено при $x \in G_3$.

При $x \in G_3$ и $\sigma \in (\alpha_k, a_N)$ имеем $(z - p_k(\sigma))^{\cdot} = -Az - B\sigma\eta - p_k'\eta = -Ap_k(1 - \eta/q_k(\sigma)) < 0$, а при $x \in G_3$ и $\sigma \in (0, \alpha_k)$ (в случае, если $\alpha_k > 0$) получим

$$(z - p_k(\sigma))^{\cdot} = -Az - B\sigma\eta < -Ap_k(\alpha_k) < 0$$

Таким образом, выполнено неравенство (14).

При $x \in G_4$ и $\sigma \in (\alpha_k, a_N)$ имеем

(16) $$(\eta - q_k(\sigma))^{\cdot} = -\mu\eta - z\sigma - \varphi(\sigma) - q_k'\eta = -\mu q_k - q_k'q_k - \varphi(\sigma) - \\ - z\sigma = \sigma(p_{k-1}(\sigma) - z) > \sigma(p_k(\sigma) - z) \geqslant 0$$

а при $x \in G_4$ и $\sigma \in (0, \alpha_k)$ (если $\alpha_k > 0$) получим

$$(\eta - q_k(\sigma))^{\cdot} = -\mu\eta - z\sigma - \varphi(\sigma) \geqslant -p_k(\alpha_k)\sigma - \varphi(\sigma) \geqslant \\ \geqslant \sigma(-p_k(\alpha_k) + 1 - \gamma\sigma^2)$$

Покажем, что

(17) $$-p_k(\alpha_k) + 1 - \gamma\alpha_k^2 \geqslant 0$$

Предполагая противное, получим неравенство

(18) $$\eta^{\cdot}(0, x_0) < 0$$

и выпустим из точки

$$x_0 = \operatorname{col}\{\sigma_0, \eta_0, z_0\}, \ \sigma_0 = \alpha_k, \quad \eta_0 = 0, \quad z_0 = p_k(\alpha_k)$$

траекторию $x(t, x_0)$. Из (18) и непрерывной зависимости решений системы (1) от начальных данных вытекает, что неравенство (16) не имеет места при $x \in G_4$, $\sigma \in (\alpha_k, a_N)$ и достаточно малых $x - x_0$. Полученное противоречие и доказывает соотношение (17).

Из (16) и (17) следует неравенство (15).

Аналогично доказывается

Лемма 7. Если для решения $x(t)$ системы (1) выполнены соотношения $x(0) \in \psi_k^-$, $\sigma(t) \leqslant 0$, $\forall t \in [0, T]$, то $x(t) \in \psi_k^-$, $\forall t \in [0, T]$.

Из лемм 1—7 сразу вытекает теорема 1.

Доказательство теоремы 2. При $\rho = 0$, $\alpha_M > 0$ множество Ω разбивается на два положительно инвариантных множества: $\Omega^+ = \Phi_N \cap \psi_M$ и $\Omega^- = \Phi_N^- \cap \psi_M^-$. Видно, что в этом случае траектории, находящиеся в Ω^+ и Ω^-, не могут стремиться к нулю при $t \to +\infty$, так как для достаточно малых σ и $x \in \Omega^+$ имеем неравенство $\sigma^{\cdot} = \eta \geqslant 0$, а для достаточно малых σ и $x \in \Omega^-$ выполнено неравенство $\sigma^{\cdot} = \eta \leqslant 0$.

С другой стороны, сепаратрисы системы (1), выходящие из седла $x = 0$, содержатся либо в Ω^+, либо в Ω^-. В самом деле, в некоторой окрестности точки $x = 0$ сепаратриса, выходящая в полупространство $\{x \mid \sigma \geqslant 0\}$, совпадает с кривой, уравнения которой $\eta = Q(\sigma)$, $z = -P(\sigma)$. Здесь $P(\sigma)$ и $Q(\sigma)$ — решение системы

$$\frac{dQ}{d\sigma} Q + \mu Q + \varphi(\sigma) - P\sigma = 0, \quad \frac{dP}{d\sigma} = B\sigma - \frac{AP}{Q}$$

с начальными данными $P(0) = Q(0) = 0$, $Q'(0) > 0$.

Видно, что $P(\sigma)$ и $Q(\sigma)$ — пределы монотонно убывающих (см. лемму 2) последовательностей $P_k(\sigma)$ и $Q_k(\sigma)$. Отсюда и из определения множества Ω^+ следует, что рассматриваемая сепаратриса содержится в некоторой окрестности нуля в множестве Ω^+. Из положительной инвариантности Ω^+ вытекает, что тогда эта сепаратриса будет целиком содержаться в Ω^+. Аналогичным образом проводятся рассуждения для сепаратрисы, выходящей в полупространство $\{x \mid \sigma \leqslant 0\}$.

Итак, сепаратрисы, выходящие из седла $x = 0$, содержатся в Ω^+ и Ω^- и не могут стремиться к нулю при $t \to +\infty$.

Применим теперь теорему 2 в случае $N = M = 2$, $2\gamma > B$. При этом будем стремиться получить по возможности наиболее простое аналитическое условие отсутствия петель сепаратрис, загрубляя изложенный выше алгоритм нахожения a_k и α_k.

Из уравнения (4) и неравенства $2\gamma > B$ получим оценку

(19) $$Q_1(\sigma) \leqslant K_1\sigma, \quad K_1 = -\mu/2 + (1 + \mu^2/4)^{1/2}$$

Используя (19), из уравнения (5) получим неравенство

(20) $$P_1(\sigma) \leqslant C\sigma^2, \quad C = \frac{B}{2 + AK_1^{-1}}$$

Из уравнения (4) и оценки (20) следует, что $a_2 < \varkappa$, где $\varkappa$ — положительный корень уравнения

$$\int_0^{\varkappa} [\varphi(\sigma) - C\sigma^3]\, d\sigma = 0$$

Очевидно, что $\varkappa = [2/(\gamma - C)]^{1/2}$. Предполагаем далее, что выполнено неравенство

(21) $$\mu > 2\, [(\gamma + C)/(\gamma - C)]^{1/2}$$

Из него вытекает существование числа $K_2 < 0$, для которого справедливо соотношение

(22) $$K_2{}^2\sigma + \mu K_2\sigma + \varphi(\sigma) - {}^1/_2 B\sigma^3 + {}^1/_2 B\varkappa^2\sigma < 0, \ \forall \sigma \in (0, \varkappa)$$

Это означает, что $q = K_2\sigma$ — бесконтактная прямая уравнения (8) при $\sigma \in (0, \varkappa)$. Отсюда следует, что $\alpha_1 = 0$ и

(23) $$q_1(\sigma) \geqslant K_2\sigma, \ \forall \sigma \in [0, a_2]$$

Из оценки (23) и уравнения (9) сразу следует, что $p_1(0) = 0$. Но тогда для некоторого достаточно малого числа $\delta > 0$ выполнено неравенство $\varphi(\sigma) + p_1(\sigma)\sigma < 0$, $\forall \sigma \in [0, \delta]$. Отсюда, из неравенства (22) и оценки $p_1(\sigma) < p_0(\sigma)$ вытекает, что при достаточно малых δ имеет место неравенство

$$K_2{}^2(\sigma - \delta) + \mu K_2(\sigma - \delta) + \varphi(\sigma) + p_1(\sigma)\sigma < 0, \ \forall \ \sigma \in (\delta, a_2)$$

Оно означает, что $q = K_2(\sigma - \delta)$ — бесконтактная прямая для уравнения (8) при $\sigma \in (\delta, a_2)$. Но тогда $\alpha_2 \geqslant \delta > 0$.

Таким образом, для выполнения условий теоремы 2 достаточно, чтобы имело место неравенство (21).

Для СЛ, записанной в стандартной форме (12), это условие примет вид

(24) $$\frac{(\sigma_1 + 1)^2}{(r - 1)\sigma_1} > 4\frac{\sigma_1 + \Lambda}{\sigma_1 - \Lambda}, \quad \Lambda = \frac{2\sigma_1 - b}{2 + b(\sigma_1 + 1)\sigma_1^{-1}(r - 1)^{-1}}$$

Видно, что условие (24) выполнено при $\sigma_1 = 10$, $b = {}^8/_3$, $r \leqslant 2$. При больших значениях σ_1, r оценка (24) принимает вид $r < {}^1/_4 (b\sigma_1)^{1/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шильников Л. П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца. *Марсден Дж., Мак-Кракен Д.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
2. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 299 с.
3. *Белых В. Н., Некоркин В. И.* О качественном исследовании многомерных фазовых систем.— Сиб. матем. ж., 1977, № 4, т. 18, с. 723—735.
4. *Белых В. Н.* Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем. Учебное пособие. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1980. 98 с.
5. *Leonov G., Tschschijowa T., Reitmann V.* Eine Frequenzvariante der Vergleichmethode von Belych—Nekorkin in der Theorie der Phasensynchronisation.— Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, 1983, B. 32, No. 1, S. 51—59.
6. *Леонов Г. А.* Метод нелокального сведения в теории абсолютной устойчивости нелинейных систем.— Автоматика и телемеханика, 1984, № 2, с. 45—53.
7. *Леонов Г. А.* О глобальной устойчивости системы Лоренца.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 861—863.
8. *Sparrow C.* The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors. N. Y.: Springer, 1982. 269 p.

Ленинград

Поступила в редакцию
2.IV.1984