УДК 539.374

О ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Серегин Г. А.

Даются различные функциональные постановки задач теории квазистатического равновесия идеально упругопластических сред. Первая из них (задача А) естественным образом вытекает из классических формулировок. Соответствующее ей множество кинематически допустимых полей предельно широкое в предположении суммируемости тензора скоростей деформаций. Показано, что задача А эквивалентна двум частным задачам (задачи Б и С). Задача Б представляет собой эволюционное вариационное неравенство для тензора напряжений, которое имеет единственное решение. В задаче С по известному полю напряжений определяется поле скоростей как решение некоторой вариационной задачи, зависящей от параметра нагружения. Показано, что задача С, а следовательно, и задача А могут не иметь решения. Построено вариационное расширение задачи С (задача С$^+$). Задачи Б и С$^+$ приводят к расширенной постановке классической задачи (задача А$^+$). Показано, что задача А$^+$ всегда разрешима. Приводится пример, для которого задача А не имеет решения, а задача А$^+$ имеет единственное решение.

Вопросы математической корректности постановок задач идеальной пластичности изучались многими авторами (см., например, [1—12]). Предлагаемый ниже подход снимает ряд ограничений, имеющихся в работах [4, 11].

Задача С при фиксированном параметре нагружения в математическом плане близка вариационной задаче деформационной пластичности, интенсивно исследуемой в последние годы (см., например, [7—9]). В [7, 9] дано ее расширение на пространства перемещений, для которых тензор деформаций — мера Радона. При этом необходимые условия экстремума выражены в терминах функций от мер [7, 9]. В данной работе расширение строится другим методом, который позволяет получить соотношения между искомыми полями скоростей и напряжений (задача А$^+$) в терминах только функций точки, что упрощает решение конкретных задач. С другой стороны, из определения допустимых множеств задачи А$^+$ следует, что тензор скоростей деформаций — мера Радона, зависящая от параметра нагружения.

1. Прямая функциональная постановка классической задачи. Пусть

$$v = (v_i),\ u = (u_i),\ \tau = (\tau_{ij}),\ \sigma = (\sigma_{ij})\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

— некоторые векторы и симметричные тензоры. Будем использовать следующие обозначения:

$$uv = u_iv_i,\ \ \sigma\tau = \sigma_{ij}\tau_{ij},\ \ |u|^2 = uu,\ \ |\sigma|^2 = \sigma\sigma$$
$$\sigma^D = \sigma - n^{-1}\sigma_{ii}E,\ E = (\delta_{ij})$$

где σ_{ii}, σ^D — след и девиатор тензора σ, E — единичный тензор.

Классическая начально-краевая задача о квазистатическом равновесии идеально упругопластического тела заключается в отыскании функций u и σ из соотношений вида [1, 13]

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\sigma(x, t) + f(x, t) = 0,\ |\sigma^D(x, t)| \leqslant \sqrt{2}k_*\\ \left(\varepsilon(u^\cdot(x,t)) - \frac{1}{n^2K_0}\sigma_{ii}^\cdot(x,t)E - \frac{1}{2\mu}\sigma^{\cdot D}(x,t)\right)(\tau - \sigma(x,t)) \leqslant 0\\ \forall\tau: |\tau^D| \leqslant \sqrt{2}\,k_*,\quad x \in \Omega\\ \sigma_{ij}(x, t)\,\nu_j(x) = F_i(x, t),\ x \in \gamma\\ u(x, t) = U(x, t),\ x \in \Gamma \setminus \gamma;\quad \sigma(x, 0) = \sigma_0(x),\ x \in \Omega\\ 2\varepsilon(u) = (u_{i,j} + u_{j,i}),\ \operatorname{div}\sigma = (\sigma_{ij,j})\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь Ω — ограниченная область, граница Γ которой удовлетворяет условию Липшица, γ — измеримая часть Γ, ν — внешняя нормаль к Γ, f и F — заданные нагрузки, U — известное поле скоростей; точкой обозначено дифференцирование по $t \in [0, T]$, K_0, k_*, μ — положительные постоянные.

Ограничимся случаем смешанной краевой задачи, заметив, что исследование первой и второй краевых задач не потребует принципиальных изменений. Предполагаем, что

$$(1.2)\qquad \begin{gathered} f, \dot f \in L^\infty(0, T; L^n(\Omega)^n); \quad F, \dot F \in L^\infty(0, T; L^\infty(\gamma)^n) \\ \exists u_0 \in C([0, T]; H^1(\Omega)^n): u_0 = U \text{ на } \Gamma \setminus \gamma \end{gathered}$$

где $H^1(\Omega)^n$ — пространство Соболева вектор-функций с конечной нормой

$$|||u||| = \Bigl(\int_\Omega (|u|^2 + u_{i,j}u_{i,j})\,dx\Bigr)^{1/2}$$

Для того чтобы дать функциональную постановку задачи (1.1), введем следующие пространства:

$$\Sigma = \{\tau : \|\tau\|_\Sigma = \|\tau_{ii}\|_{L^2(\Omega)} + \||\tau^D|\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty\}$$

$$D^2(\Omega) = \Bigl\{v : \|v\|_2 = \int_\Omega (|v| + |\varepsilon^D(v)|)\,dx + \|\operatorname{div} v\|_{L^2(\Omega)} < +\infty\Bigr\}$$

Пространство $D^2(\Omega)$ непрерывно вкладывается в пространства суммируемых функций $L^{n/(n-1)}(\Omega)^n$ и $L^1(\Gamma)^n$ [2], поэтому можно определить вспомогательные множества вида

$$V = \{v \in D^2(\Omega): v = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \gamma\}$$

$$D(A^*) = \{(\tau, g) : \tau \in \Sigma, \operatorname{div}\tau \in L^n(\Omega)^n, \quad g \in L^\infty(\gamma)^n$$

$$\int_\Omega (\tau\varepsilon(v) + v \operatorname{div}\tau)\,dx = \int_\gamma gv\,d\Gamma, \ \forall v \in V\Bigr\}$$

$$Q(t) = \{\tau: (\tau, F(t)) \in D(A^*)\}$$

$$Q_f(t) = \{\tau \in Q(t): \operatorname{div}\tau + f(t) = 0 \text{ в } \Omega\}$$

Дадим прямую функциональную постановку задачи (1.1).

Задача А. Найти функции u и σ, такие, что

$$(1.3)\qquad u \in L^\infty(0, T; D^2(\Omega)); \quad u(t) - u_0(t) \in V$$

для почти всех $t \in [0, T]$,

$$(1.4)\qquad \begin{gathered} \sigma, \dot\sigma \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^{n\times n}); \quad \sigma(0) = \sigma_0 \\ \sigma(t) \in Q_f(t) \cap K, \quad t \in [0, T] \end{gathered}$$

$$(1.5)\qquad \int_\Omega \varepsilon(u(t))(\tau - \sigma(t))\,dx - A(\dot\sigma(t), \tau - \sigma(t)) \leqslant 0$$

для всех $\tau \in K$ и почти всех $t \in [0, T]$.

Здесь

$$K = \{\tau: \||\tau^D|\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \sqrt{2}k_*\}$$

$$A(\tau, \sigma) = \int_\Omega \Bigl(\frac{1}{n^2K_0}\tau_{jj}\sigma_{ii} + \frac{1}{2\mu}\tau^D\sigma^D\Bigr)\,dx$$

Предполагаем выполненными следующие три условия.

Начальное поле напряжений статически возможно и допустимо, т. е.

$$(1.6)\qquad \sigma_0 \in Q_f(0) \cap K$$

Существует статически возможное и безопасное напряжение σ_1, причем

(1.7) $$\sigma_1, \sigma_1^{\cdot} \in L^\infty(0, T; \Sigma); \ \sigma_1(t) \in Q_f(t), \ t \in [0, T]$$
$$\| |\sigma_1^D| \|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leqslant (2(k_*^2 - \delta_*^2))^{1/2}, \quad \delta_* \neq 0$$

Существует поле скоростей w_*, такое, что

(1.8) $$w_* \in H^1(\Omega)^n \cap V, \quad \int_\Omega \operatorname{div} w_* \, dx = 1$$

Решение задачи А можно свести к последовательному решению двух задач. В первой определяется поле напряжений, а во второй — поле скоростей. Приведем их формулировки.

Задача Б. Найти поле напряжений σ, удовлетворяющее условиям (1.4) и неравенству вида

(1.9) $$\int_\Omega \varepsilon(u_0(t))(\tau - \sigma(t))\, dx - A(\sigma^{\cdot}(t), \tau - \sigma(t)) \leqslant 0$$

для всех $\tau \in Q_f(t) \cap K$ и почти всех $t \in [0, T]$.

Задача С. Найти поле скоростей u, удовлетворяющее условиям (1.3), которое при почти всех $t \in [0, T]$ есть решение следующей вариационной проблемы:

(1.10) $$J_t(u(t)) = a(t)$$

Здесь

$$a(t) = \inf_{v \in W_t} J_t(v), \quad J_t(v) = \sqrt{2} k_* \int_\Omega \Big| \varepsilon^D(v) -$$
$$- \frac{1}{2\mu} \sigma^{\cdot D}(t) \Big| dx - \int_\gamma F(t) v \, d\Gamma - \int_\Omega f(t) v \, dx$$
$$W_t = \{v \in V + u_0(t): \ \operatorname{div} v = (nK_0)^{-1} \sigma_{ii}^{\cdot}(t)\}$$

а тензор σ — решение задачи Б.

2. Задача Б. Существуют такие положительные постоянные c_0 и c_1, что

(2.1) $$c_0 \|\sigma\|^2 \leqslant A(\sigma, \sigma), \quad \int_\Omega \sigma\sigma \, dx = \|\sigma\|^2, \quad A(\tau, \sigma) \leqslant c_1 \|\tau\| \, \|\sigma\|$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.2), (1.6), (1.7), тогда задача Б имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим следующее реккурентное соотношение:

(2.2) $$T_k(\sigma^{k+1}) = \min_{Q_f^{k+1} \cap K} T_k(\tau), \ \sigma^0 = \sigma_0, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$
$$T_k(\tau) = \frac{1}{2\Delta} A(\tau - \sigma^k, \tau - \sigma^k) - \int_\Omega \varepsilon(u_0^{k+1}) \tau \, dx$$
$$\Delta = T/N, \ u_0^k = u_0(k\Delta), \quad Q_f^k = Q_f(k\Delta)$$

Множество $Q_f^{k+1} \cap K$ выпукло и замкнуто в $L^2(\Omega)^{n \times n}$, поэтому вариационная задача (2.2) однозначно разрешима, если только тензор σ^k известен.

Необходимые условия экстремума приводят к серии вариационных неравенств для определения тензора

(2.3) $$\int_\Omega \varepsilon(u_0^{k+1})(\tau - \sigma^{k+1})\, dx - A\left(\frac{\delta\sigma^k}{\Delta}, \tau - \sigma^{k+1}\right) \leqslant 0, \quad \forall \tau \in Q_f^{k+1} \cap K$$
$$\delta\sigma^k = \sigma^{k+1} - \sigma^k, \ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Введем восполнения по t следующим образом:

$$Y_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma^{k+1} \chi_k(t), \quad Y_N^1(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_1^{k+1} \chi_k(t)$$

$$\sigma_N(t) = \sigma_0 + \int_0^t \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\delta\sigma^k}{\Delta} \chi_k(\theta)\, d\theta$$

$$\sigma_{1N}(t) = \sigma_1(0) + \int_0^t \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\delta\sigma_1^k}{\Delta} \chi_k(\theta)\, d\theta, \quad u_{0N}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} u_0^{k+1} \chi_k(t)$$

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f^{k+1} \chi_k(t), \quad F_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} F^{k+1} \chi_k(t)$$

где $\chi_k(t)$ — характеристическая функция полуинтервала $[k\Delta, (k+1)\Delta]$ при $k = 0, 1, \ldots, N-2$, а $\chi_{N-1}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[T-\Delta, T]$.

В силу принятых обозначений

$$\sigma_N(t) - Y_N(t) = (t - (k+1)\Delta)\sigma_N^{\cdot}(t), \quad t \in [k\Delta, (k+1)\Delta[\tag{2.4}$$

Выберем N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\Delta < 1/h$, в котором

$$h = \frac{M}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k_*^2 - \frac{1}{2}\delta_*^2} - \sqrt{k_*^2 - \delta_*^2} \right)^{-1}$$

$$M = \| |\sigma^{\cdot D}| \|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))}$$

Тогда

$$\tau^{k+1} = (1 - h\Delta)(\sigma^k - \sigma_1^k) + \sigma_1^{k+1} \in Q_f^{k+1} \cap K$$

Положив в (2.3) $\tau = \tau^{k+1}$, получим неравенство

$$A(\sigma_N^{\cdot}(t), \sigma_N^{\cdot}(t)) \leqslant \frac{h}{h\Delta - 1} \left\{ \int_\Omega \varepsilon(u_{0N}(t)) \left(Y_N(t) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - Y_N^1(t)\right) dx - A(\sigma_N^{\cdot}(t), Y_N(t) - Y_N^1(t)) \right\} +$$
$$+ \int_\Omega \varepsilon(u_{0N}(t))(\dot\sigma_{1N}(t) - \dot\sigma_N(t))\, dx - A(\dot\sigma_N(t), \dot\sigma_{1N}(t)) \tag{2.5}$$

Согласно условиям (1.2), (1.7), нормы функций $\varepsilon(u_{0N})$, σ_{1N}, $\sigma_{1N}^{\cdot}$ ограничены в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^{n\times n})$. Поэтому из (2.1) и (2.5) можно вывести оценку

$$\|\sigma_N^{\cdot}(t)\|^2 \leqslant c_2 \int_0^t \|\sigma_N^{\cdot}(\theta)\|^2 d\theta + c_3, \quad t \in [0, T] \tag{2.6}$$

с положительными постоянными c_2 и c_3.

В силу оценки (2.6) последовательности $\{\sigma_N\}$ и $\{\sigma_N^{\cdot}\}$ ограничены в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^{n\times n})$. Выбирая, если нужно, подпоследовательности, получим, что

$$\sigma_N \to \sigma\ (*) \text{ — слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^{n\times n}) \tag{2.7}$$
$$\sigma_N^{\cdot} \to \sigma^{\cdot}\ (*) \text{ — слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^{n\times n})$$

Далее, из (2.7) следует, что $\sigma_N(t) \to \sigma(t)$ слабо в $L^2(\Omega)^{n\times n}$ при всех $t \in [0, T]$. Так, если множество K слабо замкнуто в $L^2(\Omega)^{n\times n}$ и $\sigma_N(t) \in K$, то $\sigma(t) \in K$ при всех $t \in [0, T]$.

Пусть φ и w — произвольные функции в $L^1(0, T)$ и V соответственно. Тогда

$$\int_0^T \varphi(t) \left\{ \int_\Omega (Y_N(t)\varepsilon(w) - f_N(t) w)\, dx - \int_\gamma F_N(t) w\, d\Gamma \right\} dt = 0$$

Используя соотношения (2.4) и (2.7), предельным переходом в последнем тождестве получаем, что $\sigma(t) \in Q_f(t)$ при $t \in [0, T]$.

Пусть тензор-функция $\varkappa \in C([0, T]; L^2(\Omega)^{n\times n})$ и $\varkappa(t) \in Q_f(t) \cap K$ при $t \in [0, T]$. Принимая во внимание неравенство (2.3), будем иметь

$$\int_\Omega (\varepsilon(u_{0N}(t))(\varkappa_N(t) - Y_N(t))\, dx - A(\sigma_N^{\cdot}(t), \varkappa_N(t) - Y_N(t)) \leqslant 0$$

$$\varkappa_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \varkappa((k+1)\Delta)\chi_k(t), \quad t \in [0, T]$$

Перейдем к пределу в последнем неравенстве. В результате получим соотношение

(2.8)
$$\int_0^T I(t, \varkappa(t))\,dt \leqslant 0$$

$$I(t, \varkappa(t)) = \int_\Omega \varepsilon(u_0(t))(\varkappa(t) - \sigma(t))\,dx - A(\sigma^{\cdot}(t), \varkappa(t) - \sigma(t))$$

Пусть $t_0 \in [0, T]$ — точка Лебега векторно-значной функции $t \mapsto \sigma^{\cdot}(t)$ и τ — произвольный тензор из $Q_f(t_0) \cap K$. Условие (1.7) обеспечивает следующие включения:

(2.9) $\quad \sigma_\lambda(t) = \lambda(\tau - \sigma_1(t_0)) + \sigma_1(t) \in Q_f(t), \quad t \in [0, T], \quad \lambda \in [0, 1]$

(2.10) $\quad \sigma_\lambda \in C([0, T]); \Sigma), \; \sigma_\lambda(t_0) \in \operatorname{int} K, \quad \lambda \in [0, 1[$

Из (2.10) следует, что для $\lambda \in [0, 1[$ существует положительное число $\delta(\lambda)$, такое, что

(2.11) $\quad \sigma_\lambda(t) \in K, \; t \in [t_0 - \delta(\lambda), \; t_0 + \delta(\lambda)]$

Возьмем произвольную функцию φ из $C([0, T])$, которая удовлетворяет двум условиям

$$\varphi(t) \in [0, 1], \; t \in [0, T]; \; \operatorname{supp} \varphi \subset [t_0 - \delta(\lambda), \; t_0 + \delta(\lambda)]$$

Тогда из (2.9) и (2.10) вытекает включение

$$\varkappa(t) = \varphi(t)\,(\sigma_\lambda(t) - \sigma(t)) + \sigma(t) \in Q_f(t) \cap K, \quad t \in [0, T]$$

Рассматривая неравенство (2.8) для построенного выше тензора $\varkappa$, получим

$$\int_{t_0-\delta(\lambda)}^{t_1+\delta(\lambda)} dt\, \varphi(t)\, I(t, \sigma_\lambda(t)) \leqslant 0$$

В силу выбора точки t_0 и произвольности φ последнее неравенство приводит к соотношению $I(t_0, \sigma_\lambda(t_0)) \leqslant 0$. Устремляя λ к единице, придем к неравенству (1.9) при $t = t_0$. Поскольку множество точек t_0 есть множество полной меры на отрезке $[0, T]$, то неравенство (1.9) выполнено для почти всех t из $[0, T]$.

Доказательство единственности решения задачи Б стандартно (см., например, [1]).

3. Связь задачи А с задачами Б и С. Покажем, что множество, на котором разыскивается решение задачи С, непустое.

Введем подпространства L_0^2 и $H_0^1(\Omega)^n$ следующим образом:

$$L_0^2 = \left\{f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega f\,dx = 0\right\}$$

$$H_0^1(\Omega)^n = \{u \in H^1(\Omega)^n : u = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

Как показано в [14], для любой функции f из L_0^2 существует вектор-функция u из $H_0^1(\Omega)^n$, такая, что

(3.1) $\quad \operatorname{div} u = f$ в Ω; $\; |||u||| \leqslant c_4 \|f\|_{L^2(\Omega)}$

причем положительная постоянная не зависит от f.

Рассмотрим следующую вариационную задачу:

(3.2)
$$|||u_f||| = \min_{u \in H_0^1(\Omega)^n,\ \operatorname{div} u = f} |||u|||.$$

Для всякой f из L_0^2 задача (3.2) имеет единственное решение, и следовательно, определяет оператор π: $L_0^2 \to H_0^1(\Omega)^n$, такой, что $\pi f = u_f$. Этот оператор линеен и в силу (3.1) непрерывен.

Лемма 1. Пусть тензор σ — решение задачи Б, тогда существует функция u_*, такая, что

$$u_* \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^n);$$

$$u_*(t) - u_0(t) \in V, \; \operatorname{div} u_*(t) = (nK_0)^{-1}\sigma_{ii}^{\cdot}(t) \text{ в } \Omega$$

Действительно, в силу определения оператора π и условия (1.8) в качестве функции u_* можно взять функцию вида

$$u_*(t) = u_0(t) + v_*(t) + w_* \int_\Omega \beta(t)\,dx$$

$$\beta(t) = (nK_0)^{-1}\sigma_{ii}^{\cdot}(t) - \operatorname{div} u_0(t), \quad v_*(t) = \pi\left(\beta(t) - \operatorname{div} w_* \int_\Omega \beta(t)dx\right)$$

Теорема 2. Пара функций σ и u — решение задачи А тогда и только тогда, когда эти функции — решения задач Б и С соответственно.

Доказательству теоремы 2 предпошлем лемму.

Лемма 2. Пусть тензор σ — решение задачи Б, тогда для почти всех $t \in [0, T]$ имеет место равенство

$$a(t) = \int_\Omega (\varepsilon(u_0(t))\sigma(t) - f(t)u_0(t))\,dx - \tag{3.3}$$

$$- \int_\gamma F(t)u_0(t)\,d\Gamma - A(\sigma^{\cdot}(t), \sigma(t))$$

Доказательство. Введем дуальную пару банаховых пространств

$$P^* = \{p^* = (\tau, \quad g): \quad \|p^*\|_* = \|\tau\|_\Sigma + \|\,|g|\,\|_{L^\infty(\gamma)} < +\infty\}$$

$$P = \{p = (\varkappa, s): \varkappa = (\varkappa_{ij}), \varkappa_{ij} = \varkappa_{ji} \in L^1(\Omega), \quad \varkappa_{ii} \in L^2(\Omega)$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad s \in L^1(\gamma)^n\}$$

$$\langle p^*, p\rangle = \int_\Omega \tau\varkappa\,dx + \int_\gamma gs\,d\Gamma, \quad p^* = (\tau, g), \quad p = (\varkappa, s)$$

Определим также линейный непрерывный оператор A: $V \to P$ и лагранжиан l

$$Av = (\varepsilon(v), \ -v|_\gamma), \quad v \in V\}$$

$$l_t(v, p^*) = \langle p^*, Av\rangle + \int_\Omega (\varepsilon(u_*(t))\tau - f(t)v - \varepsilon(u_*(t) -$$

$$- u_0(t))\sigma(t))\,dx - A(\sigma^{\cdot}(t), \tau) - G_{1t}^*(p^*), \quad v \in V, \quad p^* = (\tau, g)$$

$$G_{1t}^*(p^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } p^* = (\tau, F(t)), \quad \tau \in K \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Свяжем с лагранжианом l_t функционалы двойственных задач

$$\sup_{q^* \in P^*} l_t(v, q^*) = \Phi_t(v), \quad v \in V \tag{3.4}$$

$$\Phi_t(v) = G_t(Av) - \int_\Omega f(t)\,v dx$$

$$\inf_{v \in V} l_t(v, q^*) = R_t(q^*), \quad q^* \in P^* \tag{3.5}$$

Покажем, что для почти всех $t \in [0, T]$ справедливы равенства

$$\max_{q^*} R_t(q^*) = R_t(p^*(t)), \ p^*(t) = (\sigma(t), \ F(t)) \tag{3.6}$$

$$R_t(p^*(t)) = \inf_V \Phi(v) \tag{3.7}$$

Действительно, из (3.5) вытекает выражение для функционала R_t

$$R_t(q^*) = \int_\Omega \varepsilon(u_0(t))\,\tau dx - A(\sigma^{\cdot}(t), \tau), \quad \text{если } q^* = (\tau, F(t)) \tag{3.8}$$

$$\tau \in Q_t(t) \cap K, \ R_t(q^*) = -\infty \ \text{в противном случае}$$

Таким образом, равенство (3.6) — прямое следствие неравенства (1.9).

Рассмотрим возмущенную задачу

$$h_t(p) = \inf_V \left\{G_t(Av + p) - \int_\Omega f(t)\,vdx\right\}$$

Равенство (3.7) имеет место, если для почти всех $t \in [0, T]$ функция $h_t(p)$ удовлетворяет двум условиям ([15], гл. 3, предложение 2.1): 1) $h_t(0)$ — конечная величина, 2) функция $p \mapsto h_t(p)$ полунепрерывна снизу в нуле пространства P.

Вычисляя верхнюю точную грань в соотношении (3.4), приходим к формуле

$$G_t(Av+p)=\sqrt{2}\,k_*\int\limits_\Omega\left|\varepsilon^D(v+u_*(t))+\varkappa^D-\frac{1}{2\mu}\sigma^{\cdot D}(t)\right|dx-$$

$$-\int\limits_\Omega \varepsilon(u_*(t)-u_0(t))\,\sigma(t)\,dx+\int\limits_\gamma F(t)(s-v)\,d\Gamma+$$

$$+\begin{cases}0, & \text{если } \varkappa_{ii}+\operatorname{div} v=0 \text{ в } \Omega\\ +\infty & \text{в противном случае}\end{cases},\quad v\in V,\quad p=(\varkappa,\ S)$$

Отсюда можно получить равенство

$$a(t)=h_t(0)-\int\limits_\Omega f(t)\,u_0'(t)\,dx-\int\limits_\gamma F(t)\,u_0(t)\,d\Gamma \tag{3.9}$$

Оценка сверху для $h_t(0)$ выводится из (3.9), поскольку $a(t)\leqslant J_t(u_*(t))$. Для получения оценки снизу воспользуемся условием (1.7). В результате получим неравенство

$$J_t(v+u_*(t))\geqslant\sqrt{2}\left(k_*-\sqrt{k_*^2-\delta_*^2}\right)\int\limits_\Omega|\varepsilon^D(v)|\,dx-$$
$$-\int\limits_\Omega\left(f(t)\,u_*(t)+\sqrt{2}\,k_*\left|\varepsilon^D(u_*(t))-\frac{1}{2\mu}\sigma^{\cdot D}(t)\right|\right)dx-$$
$$-\int\limits_\gamma F(t)\,u_*(t)\,d\Gamma,\quad v\in V \tag{3.10}$$

Требуемая оценка снизу вытекает теперь из соотношений (3.9) и (3.10).

Для проверки условия 2) выберем функцию v_* следующим образом:

$$v_*=\pi\left(\operatorname{div} w_*\int\limits_\Omega\varkappa_{ii}\,dx-\varkappa_{ii}\right)-w_*\int\limits_\Omega\varkappa_{ii}\,dx$$

Согласно определению оператора π, будем иметь

$$v_*\in V,\ \operatorname{div} v_*+\varkappa_{ii}=0 \text{ в } \Omega,\qquad |||v_*|||\leqslant c_5\|\varkappa_{ii}\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.11}$$

где постоянная c_5 не зависит от $p=(\varkappa,\ s)$.

Положим $v=w+v_*$ в формуле для $G_t(Av+p)$ и оценим снизу функцию $h_t(p)$ следующим образом:

$$h_t(p)=\inf_{w\in V,\ \operatorname{div} w=0}\left\{G_t(A(w+v_*)+p)-\int\limits_\Omega f(t)(w+v_*)\,dx\right\}\geqslant$$

$$\geqslant h_t(0)-\int\limits_\Omega(\sqrt{2}\,k_*|\varepsilon^D(v_*)+\varkappa^D|+f(t)\,v_*)\,dx+\int\limits_\gamma F(t)(s-v_*)\,d\Gamma$$

Отсюда, а также из (1.2) и (3.11) получаем равенство

$$h_t(p)\geqslant h_t(0)-c_6\|p\|_P,\quad p\in P$$

с положительной постоянной c_6, не зависящей от p. Следовательно, условие 2) выполнено. Утверждение леммы выводится теперь из (3.9), (3.8), (3.6), (3.7).

Теорема 2 непосредственно вытекает из леммы 2, если заметить, что во всех случаях пара функций $v(t)=u(t)-u_*(t)$ и $p^*(t)=(\sigma(t),\ F(t))$ является седловой точкой лагранжиана l_t на множестве $V\times P^*$ для почти всех $t\in[0,\ T]$.

Теоремы 1 и 2 показывают, что разрешимость задачи A эквивалентна разрешимости задачи C.

Приведем пример, показывающий, что задачи A и C могут не иметь решения. Рассмотрим плоскую задачу для концентрического кольца. Переходя к полярной системе координат ρ, θ с полюсом в центре кольца, зададим условия нагружения следующего вида:

$$f=0,\ \ \sigma_0=0 \text{ в } \Omega;\ \ \gamma=\varnothing;\ \ u=0 \text{ при } \rho=R_1$$
$$u=(0,\ U_\theta) \text{ при } \rho=R_2,\ \ U_\theta=\text{const}$$

где R_1 и R_2 — радиусы внутреннего и внешнего контуров кольца.

Прямой проверкой устанавливается, что единственным решением задачи Б будет тензор σ вида

$$\sigma = \left\| \begin{matrix} 0 & \sigma_{\rho\theta} \\ \sigma_{\rho\theta} & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \sigma_{\rho\theta} = k_* \left(\frac{R_1}{\rho}\right)^2 \begin{cases} tU_\theta/U_*, & t \in [0, t_0] \\ 1, & t \in [t_0, T] \end{cases}$$

$$t_0 = \frac{U_*}{U_\theta}, \quad U_* = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \frac{k_*}{2\mu} R_2, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1}$$

Из (1.5) с необходимостью вытекает равенство

$$\varepsilon(u(t)) = 0, \quad \text{если } R_1 < \rho < R_2, \quad t_0 < t < T$$

Однако последнее уравнение не имеет в классе $D^2(\Omega)$ решений, удовлетворяющих краевым условиям.

4. Расширенная функциональная постановка классической задачи. Введем дополнительно пространство вектор-функций

$$V_+ = \left\{ v \in L^{n/(n-1)}(\Omega)^n : \| v \|_+ = \sup_{\substack{\|p^*\|_* \leqslant 1, \\ p^* = (\tau, g) \in D(A^*)}} \int_\Omega v \operatorname{div} \tau \, dx < +\infty \right\}$$

Сформулируем расширенную постановку классической задачи.

Задача А$^+$. Найти вектор функцию u и тензор-функцию σ, удовлетворяющую условиям (1.4), такие, что

$$(4.1) \qquad u \in L^\infty(0, T; L^{n(n-1)}(\Omega)^n)$$
$$u(t) \in V_+ + u_0(t) \text{ для почти всех } t \in [0, T]$$

$$(4.2) \qquad \int_\Omega \{\varepsilon(u_0(t))(\tau - \sigma(t)) - (u(t) - u_0(t)) \operatorname{div}(\tau - \sigma(t))\} \, dx -$$
$$- A(\sigma^\cdot(t), \tau - \sigma(t)) \leqslant 0, \quad \forall \tau \in Q(t) \cap K$$

для почти всех $t \in [0, T]$.

Отметим, что если пара функций σ и u — решение задачи А$^+$, то тензор-функция σ — решение задачи Б.

Поясним мотивы введения такой постановки задачи. Рассмотрим вспомогательную задачу С$^+$.

Задача С$^+$. Найти поле скоростей u, удовлетворяющее условиям (4.1), такое, что

$$(4.3) \qquad I_t(u(t)) = \min_{v \in W_t^+} I_t(v), \quad t \in [0, T]$$

$$W_t^+ = \{v \in V_+ + u_0(t) : \operatorname{div} v = (nK_0)^{-1} \sigma_{ii}(t)\}$$

$$I_t(v) = \sup_{\tau \in Q(t) \cap K} L_t(v, \tau), \quad L_t(v, \tau) =$$

$$= \int_\Omega \{\varepsilon(u_0(t)) \tau - (v - u_0(t)) \operatorname{div} \tau\} \, dx - A(\sigma^\cdot(t), \tau) -$$

$$- \int_\Omega f(t) v \, dx - \int_\gamma F(t) u_0(t) \, d\Gamma$$

и тензор σ — решение задачи Б.

Следующая теорема показывает, что задача С$^+$ есть вариационное расширение задачи С .

Теорема 3. Для почти всех $t \in [0, T]$ имеют место равенства

$$(4.4) \qquad I_t(v) = J_t(v), \; v \in W_t$$

$$(4.5) \qquad \min_{v \in W_t^+} I_t(v) = \inf_{v \in W_t} J_t(v)$$

Напомним, что замена inf на min означает, что соответствующая вариационная задача имеет решение.

Аналогом теоремы 2 является следующее утверждение.

Теорема 4. Пара функций σ и u — решение задачи A^+ тогда и только тогда, когда эти функции — решения задач Б и C^+ соответственно.

В силу теорем 1, 3 и 4 задача A^+ всегда разрешима, причем множество ее решений выпукло. Более того, все элементы этого множества имеют одинаковый тензор σ.

Доказательство теоремы 3. В силу определения множества $Q(t)$ для всякой вектор-функции $v \in V + u_0(t)$ и всякой тензор-функции $\tau \in Q(t)$ справедливо равенство

$$L_t(v, \tau) = \int\limits_\Omega (\varepsilon(v)\tau - f(t)v)\,dx - \int\limits_\gamma F(t)v d\Gamma - A(\sigma^{\cdot}(t), \tau) \tag{4.6}$$

Следовательно

$$J_t(v) = \sup_{\tau \in K} L_t(v, \tau) \geqslant \sup_{\tau \in Q(t) \cap K} L_t(v, \tau) = I_t(v), \quad \forall v \in W_t$$

Для доказательства обратного неравенства возьмем произвольную гладкую функцию $\tau \in K$ и последовательность бесконечно дифференцируемых функций φ_m, имеющих компактный носитель в Ω и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\varphi_m(x) \in [0, 1], \quad x \in \Omega; \quad \varphi_m(x) \to 1 \text{ для почти всех } x \in \Omega$$

Можно показать, что $\sigma_{1kk} \in L^n(\Omega)$ [9, 10], поэтому

$$\tau_m(t) = \varphi_m(\tau - \sigma_1(t)) + \sigma_1(t) \in Q(t) \cap K, \quad t \in [0, T]$$

Положим $\tau = \tau_m$ в (4.6) и перейдем к пределу. В силу теоремы Лебега и определения функционала I_t получим неравенство

$$I_t(v) \geqslant \int\limits_\Omega (\varepsilon(v)\tau - f(t)v)\,dx - \int\limits_\gamma F(t)v d\Gamma - A(\sigma^{\cdot}(t), \tau), \quad v \in W_t$$

для всех гладких тензоров τ в K. Отсюда вытекает требуемое обратное неравенство и утверждение (4.4) теоремы.

Доказательству утверждения (4.5) предпошлем две леммы.

Лемма 3. Имеет место равенство

$$\inf_{W(0, T)} \int\limits_0^T (J_t(v(t)) - a(t))^2 dt = 0 \tag{4.7}$$

$$W = (0, T) = \{v \in L^\infty(0, T; D^2(\Omega)) \colon v(t) \in W_t, \quad t \in [0, T]\}$$

Лемма 4. Существуют последовательность $\{u_m\} \in W(0, T)$, функции $u \in L^\infty(0, T; L^{n/(n-1)}(\Omega)^n)$ и $\alpha \in L^\infty(0, T)$, такие, что для почти всех $t \in [0, T]$ выполнены следующие утверждения:

(4.8) $\quad J_t(u_m(t)) \to a(t)$

(4.9) $\quad u_m(t) \to u(t)$ сильно в $L^{n/(n-1)}(\Omega)^n$

(4.10) $\quad \operatorname{div} u(t) = (nK_0)^{-1}\sigma_{ii}^{\cdot}(t)$ в Ω

(4.11) $\quad \| u(t) - u_0(t) \|_+ \leqslant \alpha(t)$

Доказательство леммы 3, использующее выпуклость функционала J_t и определение функции a, стандартно и поэтому здесь не приводится.

Доказательство леммы 4. Из условий (1.2), теоремы 1, леммы 1 и неравенства (3.10) вытекает оценка

$$\begin{gathered} J_t(w(t)) + \varphi(t) \geqslant \sqrt{2}\,(k_* - \sqrt{k_*^2 - \delta_*^2}) \int\limits_\Omega |\varepsilon(w(t) - \\ - u_*(t))|\,dx, \ \forall w \in W(0, T), \quad t \in [0, T] \end{gathered} \tag{4.12}$$

с некоторой функцией φ из $L^\infty(0, T)$.

Принимая во внимание непрерывность вложения пространства $D^2(\Omega)$ в пространства $L^{n/(n-1)}(\Omega)^n$ и $L^1(\Gamma)^n$, выводим из неравенства (4.12) соотношения вида

$$\| w(t) - u_*(t) \|_{L^{n/(n-1)}(\Omega)^n} \leqslant c_7 (J_t(w(t)) + \varphi(t)) \tag{4.13}$$

$$\begin{gathered} \| A(w(t) - u^*(t) \|_P = \sup_{\|p^*\|_* \leqslant 1} < p^*, \ A(w(t) - u_*(t)) > \leqslant \\ \leqslant c_8 (J_t(w(t)) + \varphi(t)) \end{gathered} \tag{4.14}$$

справедливые для почти всех $t \in [0, T]$ и всех $w \in W(0, T)$.

Пусть $\{w_m\}$ — минимизирующая последовательность задачи (4.7), тогда

$$\int_0^T (J_t(w_m(t)) - a(t))^2 dt \to 0 \tag{4.15}$$

Поскольку $a \in L^\infty(0, T)$, то из (4.13), (4.15) следует ограниченность последовательности $\{w_m\}$ в $L^2(0, T; L^{n/(n-1)}(\Omega)^n)$. Опуская стандартные рассуждения, утверждаем, что существует последовательность $\{u_m\}$, принадлежащая выпуклой оболочке множества $\{w_m\}$, для которой выполнено утверждение (4.9) леммы с некоторой функцией u из $L^2(0, T; L^{n/(n-1)}(\Omega)^n)$.

Ясно, что последовательность $\{u_m\}$ будет минимизирующей в задаче (4.7). Следовательно, утверждения (4.8), (4.10) доказаны.

Полагая в неравенстве (4.13) $w = u_m$, перейдем в нем к пределу с учетом соотношений (4.8), (4.9). В результате получим, что $u \in L^\infty(0, T; L^{n/(n-1)}(\Omega)^n)$.

Далее из определений множества $D(A^*)$, нормы $\|\cdot\|_+$ и соотношения (4.14) при $w = u_m$ выводим неравенство

$$\sup_{\substack{\|p^*\|_*\leqslant 1,\\ p^*=(\tau,g)\in D(A^*)}} \int_\Omega (u_m(t) - u_*(t)) \operatorname{div} \tau dx \leqslant c_8 (J_t(u_m(t)) + \varphi(t))$$

из которого предельным переходом получаем оценку

$$\| u(t) - u_*(t)\|_+ \leqslant c_8 (a(t) + \varphi(t)), \quad t \in [0, T]$$

Тогда требуемая функция $\alpha(t)$ будет равна сумме левой и правой части последнего неравенства при $u(t) = u_0(t)$. Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству утверждения (4.5). Из (4.4) следует, что

$$J_t(u_m(t)) = I_t(u_m(t)) \geqslant L_t(u_m(t), \tau), \ \tau \in Q(t) \cap K$$

Переходя к пределу с учетом (4.8), (4.9), придем к неравенству

$$L_t(u(t), \tau) \leqslant a(t), \quad \tau \in Q(t) \cap K, \quad t \in [0, T]$$

Принимая во внимание структуру лагранжиана L_t и равенство (3.3), будем иметь

$$a(t) = L_t(v, \sigma(t)), \quad \forall v \in W_t^+$$

Из последних двух соотношений следует, что пара функций $u(t)$ и $\sigma(t)$ — седловая точка лагранжиана L_t на множестве $W_t^+ \times (Q(t) \cap K)$ при почти всех $t \in [0, T]$. Обычные в теории двойственности рассуждения приводят к требуемому результату. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть пара σ и u — решение задачи А$^+$, тогда тензор σ — решение задачи Б. Полагая в неравенстве (4.2) $\tau = \varphi E + \sigma(t)$, где φ — произвольная гладкая функция, равная нулю вблизи границы, получим

$$\operatorname{div} u(t) = (nK_0)^{-1}\sigma_{ii}^{\cdot}(t), \quad t \in [0, T]$$

Следовательно, $u(t) \in W_t^+$ при почти всех $t \in [0, T]$.

Из (4.2) вытекает двойное неравенство

$$L_t(u(t), \tau) \leqslant a(t) \leqslant L_t(v, \sigma(t)), \quad v \in W_t^+, \quad \tau \in Q(t) \cap K \tag{4.16}$$

которое означает, что функция u есть решение задачи С$^+$.

И обратно, если функции σ и u — решения задач Б и С$^+$, то из теоремы 1, равенств (3.3), (4.5) и определения лагранжиана L_t следуют неравенства (4.16). Таким образом, пара σ и u — решение задачи А$^+$. Теорема 4 доказана.

Возвращаясь к задаче, сформулированной в конце п. 3, отметим, что поле скоростей в расширенной постановке определяется из неравенства (4.2). Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательное решение

$$u = (0, u_\theta)$$

$$u_\theta = \frac{U_\theta}{\alpha^2 - 1}\left(\alpha^2 \frac{\rho}{R_2} - \frac{R_2}{\rho}\right), \quad t \in [0, t_0]; \quad u_\theta = \frac{U_\theta}{R_2}\rho, \quad t \in [t_0, T]$$

Построенное решение имеет скачок на внутреннем контуре кольца при $t > t_0$. Можно показать, что в данном случае задача А$^+$ имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
3. *Мосолов П. П.* О проблеме минимума функционала — Изв. АН СССР, сер. матем., 1967, т. 31, № 6, с. 1289—1310.
4. *Johnson C.* Existence theorems for plasticity problems.— J. math. pures et appl., 1976, t. 55, f. 4, p. 431—444.
5. *Куксин С. Б.* Применение монотонных полугрупп в теории идеально упругопластичности.— Успехи матем. наук, 1982, т. 37, вып.5, с. 189—190.
6. *Wesfreid E.* Asimptotic behaviour of an elastoviscoplastic material submitted to a cyclic load.— Proc. Roy. Soc. of Edinburg. Ser. A., 1981, v. 89, No. 3/4, p. 189—199.
7. *Anzellotti G., Giaquinta M.* On the existence of the fields of stresses and displacements for an elasto-perfectly body in static equilibrium.— J. math. pure et appl., 1982, t. 61, No. 3, p. 219—244.
8. *Anzellotti G., Giaquinta M.* Existence of displacements field for an elastoplastic body subject to Hencky's law and von Mises yield condition.— Manuscripta Math., 1980, v. 32, No. 1—2, p. 101—136.
9. *Kohn R., Temam R.* Dual speces of stresses and strains, with application to Hencky plasticity.— Appl. Math. Optim., 1983, v. 10, No. 1, p. 1—35.
10. *Серегин Г. А.* О корректности вариационных проблем механики идеально упругопластических сред.— Докл. АН СССР, 1984, т. 276, № 1, с. 71—75.
11. *Серегин Г. А.* Вариационные задачи и эволюционные вариационные неравенства в нерефлексивных пространствах с приложениями к задачам геометрии и пластичности.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984, № 2, с. 420—445.
12. *Серегин Г. А.* Расширение вариационной постановки задачи для жесткопластической среды на поля скоростей с разрывами типа скольжений.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 1030—1037.
13. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 79 с.
14. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О некоторых задачах векторного анализа и об обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье — Стокса.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1976, т. 59, с. 81—116.
15. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Наука, 1979. 339 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
4.X.1983