

УДК 539.3 : 534.1

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ СДВИГОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛЕНТОЧНОГО ШТАМПА НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

[Зильберглейт А. С., Златина И. Н., Симкина Т. Ю.]

Изучаются гармонические сдвиговые колебания жесткого штампа с плоским основанием, сцепленного с упругим полупространством. Задача сводится к парным интегральным уравнениям, решение которых, эффективное для коротких волн, построено в [1] и обосновано в [2]. Приводятся и анализируются выражения комплексной амплитуды колебаний штампа, контактных напряжений и их коэффициента интенсивности, а также средней за период колебаний мощности, передаваемой штампом полупространству, в расчете на единицу длины штампа.

Задачам о колебаниях ленточного штампа на упругом полупространстве посвящено значительное число работ (см. [3, 4] и приведенную там библиографию). Однако высокочастотный анализ картины этих колебаний по существу отсутствует: среди известной литературы лишь небольшой раздел в статье [5] затрагивает этот вопрос.

Рассмотрим жесткий ленточный штамп, плоская подошва которого занимает полосу $|x| < a$, $y = 0$, $|z| < \infty$. Штамп сцеплен с однородным изотропным упругим полупространством $y > 0$ и совершает колебания вдоль оси Oz под действием гармонически зависящей от времени нагрузки с линейной плотностью $\text{Re}(Te^{i\omega t})$. Единственную отличную от нуля компоненту перемещений представим в виде

$$\begin{aligned} u_z &= u_z(x, y, t) = \text{Re}[w(x, y)e^{i\omega t}] \\ (1) \quad \Delta w + k^2 w &= 0, \quad y > 0; \quad k = \omega c^{-1}, \quad c = G^{1/2} \rho^{-1/2} \\ (2) \quad w|_{y=0} &= \delta, \quad |x| < a; \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad |x| > a \end{aligned}$$

Функция $w(x, y)$ удовлетворяет требованию локальной конечности энергии и условиям излучения; G — модуль сдвига, δ — неизвестная комплексная амплитуда колебаний штампа, c — скорость объемных волн сдвига. Задача замыкается уравнением движения штампа в комплексной форме

$$(3) \quad T + \int_{-a}^a \tau(x) dx = -m\omega^2 \delta, \quad \tau(x) = \tau_{yz}(x, 0) = G \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

где m — погонная масса штампа, $\tau(x)$ — контактное напряжение.

Учитывая уравнение (1), условия излучения и симметрию задачи, ищем $w(x, y)$ в виде

$$(4) \quad w(x, y) = \delta \int_0^\infty M(\nu) e^{-y\sqrt{\nu^2 - k^2}} \cos \nu x d\nu$$

Тогда условия (2) приводят к парным интегральным уравнениям относительно $M(\nu)$

$$\begin{aligned} (5) \quad \int_0^\infty M(\nu) \cos \nu x d\nu &= 1, \quad 0 \leq x < a \\ \int_0^\infty \sqrt{\nu^2 - k^2} M(\nu) \cos \nu x d\nu &= 0, \quad x > a \end{aligned}$$

Решение этих уравнений, пригодное для коротких волн, $ka \gg 1$, было построено [1] и обосновано [2] ранее. Если ввести обозначения

$$p_{\pm}(v, t) = \frac{e^{ivt}}{\sqrt{i(k+v)}} \pm \frac{e^{-ivt}}{\sqrt{i(k-v)}} \\ q_{\pm}(v, t) = \frac{e^{ivt}}{\sqrt{i(k-v)}} \pm \frac{e^{-ivt}}{\sqrt{i(k+v)}}$$

то, согласно [1]

$$(6) \quad M(v) = \frac{\sqrt{ki}}{\pi iv} q_-(v, a) - N(v), \quad N(v) = \frac{\sqrt{ki}}{\pi} \int_a^{\infty} \psi(t) q_+(v, t) dt$$

причем функция $\psi(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению второго рода

$$(7) \quad \psi(t) = -\frac{k}{2} \left[\int_a^{\infty} \Lambda(k(t+s)) ds + \int_a^{\infty} \psi(s) \Lambda(k(t+s)) ds \right], \\ a \leq t < \infty \\ \Lambda(\xi) = H_0^{(2)}(\xi) + iH_1^{(2)}(\xi)$$

($H_{\alpha}^{(2)}(\xi)$ — функция Ганкеля второго рода). При достаточно больших значениях ka оператор из (7) является оператором сжатия в подходящем функциональном пространстве; в нем решение уравнения (7) существует, единственно [2] и имеет асимптотическое разложение [1]

$$(8) \quad \psi(t) \approx \frac{e^{-ik(t+a)}}{\sqrt{\pi(2ik(t+a))^{3/2}}} \left[1 - \frac{15}{8ik(t+a)} + \dots \right]$$

Таким образом, для полного решения задачи остается определить амплитуду δ . С этой целью найдем контактное напряжение

$$\tau(x) = G \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = -G\delta \int_0^{\infty} M(v) \sqrt{v^2 - k^2} \cos vx dv, \quad |x| < a$$

Используя равенства (6), вытекающее из них тождество

$$N(v) \sqrt{v^2 - k^2} = \\ = -\frac{\sqrt{ik}}{\pi} \left\{ \psi(a) p_+(v, a) + \int_a^{\infty} e^{ikt} [\psi(t) e^{-ikt}]' p_+(v, t) dt \right\}$$

и значения разрывных интегралов

$$(9) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} p_+(v, t) \cos vx dv = \frac{e^{-ik(t+x)}}{\sqrt{t+x}} + h(t-x) \frac{e^{-ik(t-x)}}{\sqrt{t-x}} \\ \frac{\sqrt{k}}{\pi} \int_0^{\infty} p_-(v, t) \frac{\cos vx}{v} dv = -1 + \operatorname{erf}(\sqrt{ik(t+x)}) + \\ + h(t-x) \operatorname{erf}(\sqrt{ik(t-x)})$$

($h(\xi)$ — единичная функция Хевисайда), находим выражение для контактного напряжения

$$(10) \quad \tau(x) = -\delta G \sqrt{\frac{ik}{\pi}} \left\{ [1 + \psi(a)] \left[\frac{e^{-ik(a-x)}}{\sqrt{a-x}} + \frac{e^{-ik(a+x)}}{\sqrt{a+x}} \right] + \right. \\ \left. + \int_a^{\infty} e^{ikt} [\psi(t) e^{-ikt}]' \left[\frac{e^{-ik(t-x)}}{\sqrt{t-x}} + \frac{e^{-ik(t+x)}}{\sqrt{t+x}} \right] dt + \right. \\ \left. + \sqrt{ik\pi} [\operatorname{erf}(\sqrt{ik(a-x)}) + \operatorname{erf}(\sqrt{ik(a+x)}) - 1] \right\}, \quad |x| < a$$

Из выражения (10) видно, что условие конечности энергии выполняется в окрестности краев штампа, и следует формула для коэффициента интенсивности напряжений

$$(11) \quad K_{III} = \lim_{x \rightarrow a-0} \sqrt{2\pi(a-x)} \tau(x) = -\delta G \sqrt{2ik} [1 + \psi(a)]$$

Интегрируя равенство (10) по x , получаем погонную реакцию основания в виде

$$(12) \quad \int_{-a}^a \tau(x) dx = -\delta G Q(ka)$$

$$Q(ka) = -2ika + (4ika - 1) \operatorname{erf}(\sqrt{2ika}) + 2 \sqrt{\frac{2ika}{\pi}} e^{-2ika} +$$

$$+ ik \int_a^\infty \psi(t) [\chi_-(t) - \chi_+(t)] dt, \quad \chi_\pm(t) =$$

$$= \operatorname{erf}(\sqrt{ik(t \pm a)}) + \frac{e^{ik(t \pm a)}}{\sqrt{\pi ik(t \pm a)}}$$

$$(13) \quad Q(ka) = 2ika + 1 - e^{-2ika} [2\pi^{-1/2} (2ika)^{1/2} + O((ka)^{-3/2})],$$

$$ka \rightarrow \infty$$

В силу соотношения (12) уравнение движения штампа (3) можно представить в форме (μ — коэффициент инерционности штампа)

$$(14) \quad \delta [\mu (ka)^2 - Q(ka)] = -TG^{-1}, \quad \mu = m/(\rho a^2)$$

Равенства (12) — (14) полностью определяют величину δ и позволяют получить ее асимптотическое разложение по степеням малого параметра $(ka)^{-1/2}$. Конкретный вид этого разложения зависит от того, является штамп массивным или нет. Если величина $m \neq 0$ фиксирована, то при $ka \rightarrow \infty$ с указанной точностью (далее введено обозначение $O_j = O((ka)^{-j/2})$)

$$(15) \quad \delta = -T_* \left(1 + \frac{2i}{\mu ka} + O_3 \right), \quad T_* = \frac{T}{G\mu (ka)^2}, \quad \mu \neq 0$$

$$|\delta| = T_* (1 + O_4), \quad \arg \delta = \pi + O_2, \quad \operatorname{Im} \delta = -2T_* (\mu ka)^{-1} (1 + O_1)$$

в противоположном случае ($m = 0$)

$$(16) \quad \delta = -iT_* \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi ika}} e^{-2ika} + O_2 \right)$$

$$T_* = \frac{T}{2Gka}, \quad |\delta| = T_* (1 + O_1)$$

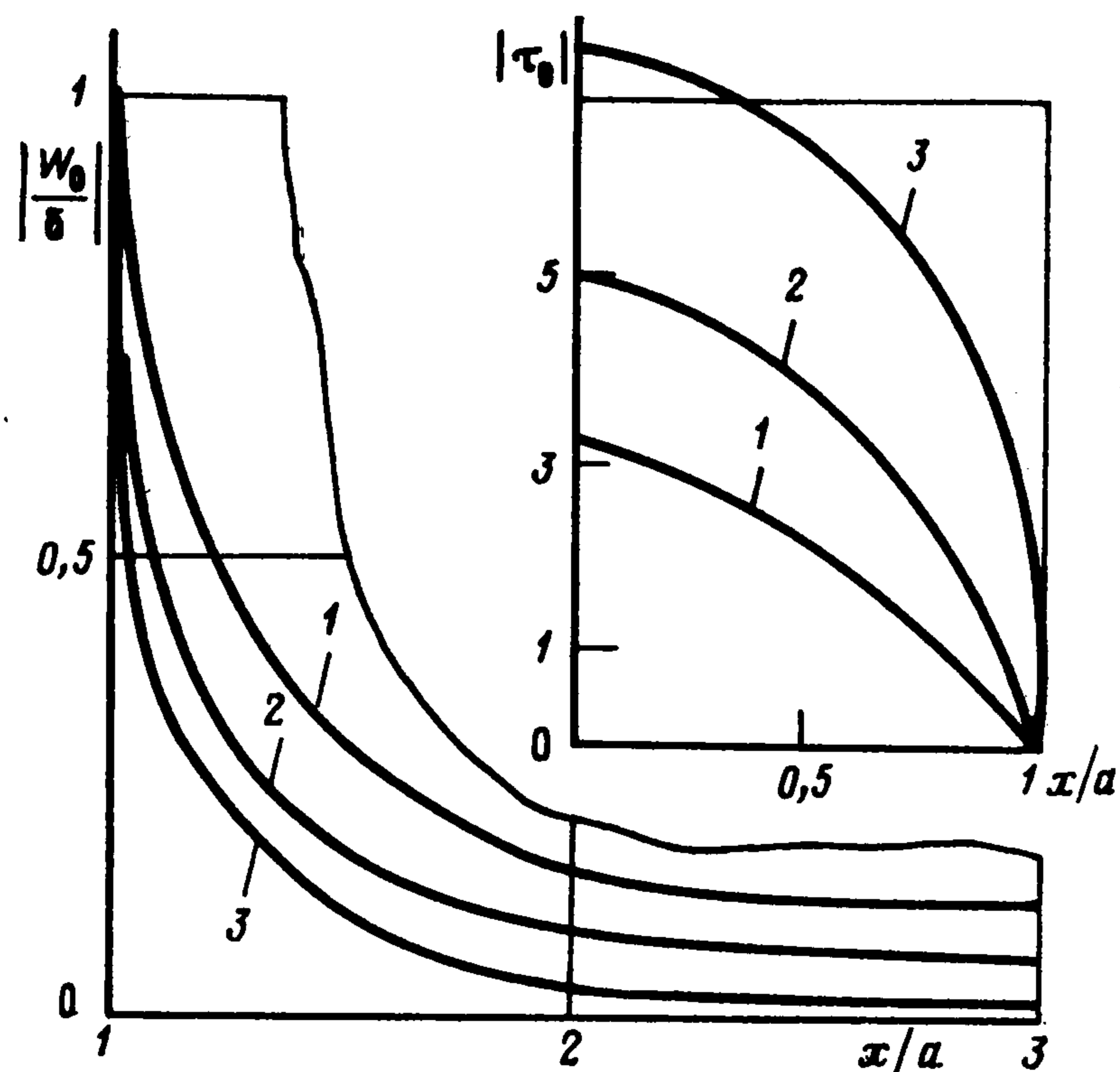
$$\arg \delta = -\pi/2 + O_1, \quad \operatorname{Im} \delta = -T_* (1 + O_1), \quad \mu = 0$$

Построенное решение задачи дает возможность написать высокочастотное разложение любой относящейся к ней величины, представляющей интерес с точки зрения приложений. Так, согласно (11), (8), (15), (16), для коэффициента интенсивности напряжений имеем

$$K_{III} = \frac{T}{\mu} \sqrt{\frac{2i}{a}} (ka)^{-3/2} (1 + O_2), \quad \arg K_{III} = \frac{\pi}{4} + O_2, \quad m \neq 0$$

$$K_{III} = -\frac{T}{\sqrt{a}} (2ika)^{-1/2} (1 + O_1), \quad \arg K_{III} = \frac{3\pi}{4} + O_1, \quad m = 0$$

Найдем среднюю за период колебаний мощность W_0 , которая поступает от штампа в полупространство, в расчете на единицу длины штампа. Вычисляя среднюю мощность силы $\operatorname{Re}(Te^{i\omega t})$ при перемещении штампа



Re $(\delta e^{i\omega t})$, получаем $W_0 = -^{1/2}\omega T \text{ Im } \delta$ и из (15), (16) в случае высоких частот имеем

$$\frac{W_0}{cT} = \frac{T}{\mu^2 G a} (ka)^{-2} (1 + O_1), \quad m \neq 0$$

$$\frac{W_0}{cT} = \frac{T}{4Ga} (1 + O_1), \quad m = 0$$

Эти формулы показывают, что если штамп массивен ($\mu > 0$), то на высоких частотах за период колебаний от единицы длины штампа в полупространство поступает энергия, пропорциональная $\mu^{-2}\omega^{-3}$; если же штамп безынерционен ($\mu = 0$), то эта величина существенно больше — она пропорциональна ω^{-1} .

Обратимся к вычислению смещения точек поверхности полупространства. Подставляя выражения (6) в (4) при $y = 0$ и принимая во внимание вторую из формул (9), а также следующий результат:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} q_+(v, t) \cos vx \, dv = h(|x| - t) \frac{e^{ik(|x|-t)}}{\sqrt{|x|-t}}, \quad t > 0$$

и используя выражение (8) для $\psi(t)$, приходим к равномерно пригодной при $|x| \geq a$ асимптотической формуле

$$(17) \quad w_0(x) = \delta \left\{ 1 - \text{erf}(\sqrt{ik(|x|-a)}) - \right. \\ \left. - \frac{e^{ik(|x|+a)}}{2ika\sqrt{\pi}} \left(\frac{|x|}{a} - 1\right)^{1/2} \left[\left(\frac{|x|}{a} + 1\right)^{-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5}{16ika} \left(\frac{|x|}{a} + 5\right) \left(\frac{|x|}{a} + 1\right)^{-2} + O_4 \right] \right\}, \quad |x| \geq a$$

Зависимость $|w_0(x)/\delta|$ от x/a показана на фигуре при значениях $ka = 4\pi, 8\pi, 20\pi$ (кривые 1—3 соответственно). Хорошо виден характер спада $|w_0(x)/\delta|$ с увеличением x/a при фиксированном ka ; для данного значения x/a величина $|w_0(x)/\delta|$ при возрастании ka монотонно убывает.

Обратимся к нахождению равномерно пригодной по $|x| \leq a$ высокочастотной асимптотики контактного напряжения по формулам (10), (8). Равномерное асимптотическое разложение интегрального слагаемого из (10) строится по результатам работы [6] (см. также [7], с. 297), причем его

вклад имеет порядок $O_2 = O((ka)^{-1})$ для всех $|x| < a$. Таким образом, асимптотическая формула для напряжения приобретает вид

$$\begin{aligned} \tau(x) = & -\frac{\delta G}{a} \sqrt{\frac{ika}{\pi}} \left\{ \sqrt{\pi ika} [\operatorname{erf}(\sqrt{ik(a-x)}) + \right. \\ & + \operatorname{erf}(\sqrt{ik(a+x)}) - 1] + O_2 + \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1/2} e^{-ik(a-x)} + \right. \\ & \left. \left. + \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-1/2} e^{-ik(a+x)} \right] (1 + O_3), \quad |x| < a \right\} \end{aligned}$$

Распределение безразмерной величины $|\tau_0(x)|$, где

$$\tau_0(x) = \frac{\tau(x)}{Gk\delta} \left[ka \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \right]^{1/2}$$

показано на фигуре (кривые нумеруются, как и в случае графиков смещения). Ясно, что неравномерность распределения $|\tau_0(x)|$ по подошве штампа нарастает при увеличении частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Применение парных интегральных уравнений к задаче дифракции электромагнитных волн на тонкой проводящей ленте. — Ж. техн. физ., 1972, т. 42, вып. 4, с. 681—690.
2. Зильберглейт А. С. Решение одного класса парных интегральных уравнений, возникающих в задачах теории дифракции. — В кн.: Вопросы математической физики. Л.: Наука, 1976, с. 111—126.
3. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
4. Зильберглейт А. С., Златина И. Н. Динамическая контактная задача для полуплоскости и полупространства. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, т. 31, вып. 3, с. 18—30.
5. Александров В. М., Зеленцов В. Б. Асимптотические методы решения двумерных динамических задач для вязкоупругого слоя со смешанными краевыми условиями. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 2, с. 329—337.
6. Зильберглейт А. С. О равномерных асимптотических разложениях некоторых определенных интегралов. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, вып. 1, с. 40—47.
7. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. 3. Рига: Зинатне, 1981. 370 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
15.VII.1983