Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 539.383

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИЗНАШИВАНИИ ПАРЫ КОЛЬЦЕВОЙ ШТАМП — УПРУГОЕ ШЕРОХОВАТОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Коваленко Е. В.

На примере решения осесимметричной контактной задачи об изнашивании кольцевым штампом упругого шероховатого полупространства приводится метод исследования одного класса двумерных интегральных уравнений второго рода, содержащих операторы Фредгольма по координате и Вольтерра по времени. Путем применения к указанным уравнениям некоторого аналога метода разделения переменных можно свести их к последовательному решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода, причем для уравнений Фредгольма решается задача на отыскание собственных значений и функций.

Метод позволяет получить разложения для основных характеристик явления контактного взаимодействия, справедливые во всем диапазоне изменения времени. В случае контактных задач с износом для гладких тел основные разрешающие уравнения могут быть исследованы методом сращиваемых асимптотических разложений. Получаемое при этом в погранслое интегральное уравнение второго рода с логарифмическим ядром на полубесконечном интервале решается в замкнутом виде путем сведения его к функциональному разностному уравнению со сдвигом.

1. Как известно [1, 2], осесимметричная контактная задача при наличии абразивного износа о вдавливании кольцевого в плане штампа ($c \leqslant r \leqslant 1$) в упругое шероховатое полупространство в безразмерных переменных и с учетом обозначений, введенных в [1], сводится к интегральному уравнению (здесь и далее предполагаем, что величина T достаточно большая, но такая, что $\gamma(t)$ имеет порядок перемещений в линейной теории упругости)

$$l\varphi(r,t)+\frac{2}{\pi}\int_c^1 \varphi(\rho,t)K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right)\frac{\rho\,d\rho}{\rho+r}= \tag{1.1}$$

$$=\gamma(t)-f(r)-r\int_c^t\varphi(r,\tau)\,d\tau \quad (0<c\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

($K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода) при выполнении условия

$$P(t)=2\pi\int_c^1 r\varphi(r,t)\,dr \tag{1.2}$$

Отмечено [1], что представляют интерес два основных варианта задачи (1.1), (1.2): 1) задается функция $\gamma(t)$, характеризующая перемещение штампа как жесткого целого с течением времени, находятся контактное давление $\varphi(r, t)$ и сила $P(t)$, прижимающая штамп к основанию; 2) задается $P(t)$, находятся $\varphi(r, t)$ и $\gamma(t)$. В обоих случаях по формулам (1.2), (1.3) работы [1] затем определяется скорость изнашивания основания.

Изучим вначале первый вариант системы (1.1), (1.2). Пусть жесткое перемещение штампа $\gamma(t)$ изменяется во времени по закону

$$\gamma(t)=\gamma+\gamma_\infty t+\gamma_*(t)\quad (0\leqslant t\leqslant T) \tag{1.3}$$
$$\gamma_*(t)\to 0\ (t\to\infty);\ \gamma,\ \gamma_\infty=\text{const}$$

В дальнейшем будем считать функцию $\gamma(t)$ непрерывной при $t \in [0, T]$, т. е. $\gamma(t) \in C(0, T)$. Тогда, как показано в [1], контактное напряжение $\varphi(r, t)$ имеет следующую структуру:

$$\varphi(r, t) = r^{-1}\varphi_\infty + \varphi_*(r, t), \quad \varphi_\infty = \gamma_\infty \tag{1.4}$$
$$\varphi_*(r, t) \to 0 \quad (t \to \infty)$$

Используя выражения (1.4), упростим интегральное уравнение (1.1) следующим образом:

$$lr\varphi(r, t) + H\rho\varphi(\rho, t) = \gamma(t) - f(r) - r\int_0^t \varphi(r, \tau)\, d\tau - l\Phi(r) \tag{1.5}$$

$$\Phi(r) = \frac{1-r}{T}\int_0^T \varphi(r, t)\, dt$$
$$(c \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T)$$

$$H\varphi = \frac{2}{\pi}\int_c^1 \varphi(\rho) K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho + r}\right)\frac{d\rho}{\rho + r} \tag{1.6}$$

и вычтем из него почленно соотношение, получающееся из (1.5) при $t = 0$. Принимая в расчет формулы (1.3), (1.4), будем иметь

$$lr[\varphi_*(r, t) - \varphi_*(r, 0)] + H\rho[\varphi_*(\rho, t) - \varphi_*(\rho, 0)] + \tag{1.7}$$
$$+ r\int_0^t \varphi_*(r, \tau)\, d\tau = \gamma_*(t) - \gamma_*(0)$$
$$(c \leqslant r \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant T)$$

Перейдем от уравнения (1.6) к системе двух эквивалентных ему интегральных уравнений [3, 4]

$$l[\varphi_1(r, t) - \varphi_1(r, 0)] + H[\varphi_1(\rho, t) - \varphi_1(\rho, 0)] + \tag{1.8}$$
$$+ \int_0^t \varphi_1(r, \tau)\, d\tau = 0$$

$$l[\varphi_2(r, t) - \varphi_2(r, 0)] + H[\varphi_2(\rho, t) - \varphi_2(\rho, 0)] + \tag{1.9}$$
$$+ \int_0^t \varphi_2(r, \tau)\, d\tau = \gamma_*(t) - \gamma_*(0)$$
$$(c \leqslant r \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant T)$$

$$\varphi_*(r, t) = r^{-1}[\varphi_1(r, t) + \varphi_2(r, t)] \tag{1.10}$$

Таким образом, требуется найти общее решение однородного уравнения (1.8) и решение неоднородного уравнения (1.9).

Построим решение уравнения (1.8). Заметим вначале, что оператор H (1.6) — самосопряженный, вполне непрерывный и положительно-определенный [1]; он действует из гильбертова пространства $L_2(c, 1)$ в $L_2(c, 1)$. Согласно общей теории таких операторов [5], система собственных функций $\{\varphi_n(r)\}$ $(n \geqslant 1)$ $H\varphi$ (1.6) ортогональна и полна в $L_2(c, 1)$, все собственные числа λ_n оператора $H\varphi$ вещественны, положительны и $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > \ldots > 0$, $\lambda_n \sim n^{-1}$ $(n \to \infty)$. Алгоритм построения собственных функций оператора H (1.6) изложен в статьях [1, 4].

Будем искать решение уравнения (1.8) в виде

$$\varphi_1(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(t)\varphi_n(r) \tag{1.11}$$

Внося (1.11) в (1.8) и принимая во внимание соотношение

$$H\varphi_n = \lambda_n\varphi_n(r) \quad (c \leqslant r \leqslant 1; \ n = 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(l+\lambda_n)\varphi_n(r)[a_n^{(1)}(t)-a_n^{(1)}(0)]+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(r)\int_0^t a_n^{(1)}(\tau)\,d\tau=0$$

Приравнивая в последнем выражении коэффициенты в левой и правой частях при собственных функциях оператора H одинакового номера, придем к следующим уравнениям для определения функций $a_n^{(1)}(t)$ $(n\geqslant 1)$:

$$(l+\lambda_n)[a_n^{(1)}(t)-a_n^{(1)}(0)]+\int_0^t a_n^{(1)}(\tau)\,d\tau=0 \quad (0\leqslant t\leqslant T) \tag{1.13}$$

откуда найдем

$$a_n^{(1)}(t)=a_n^{(1)}(0)\exp(-\alpha_n t),\quad \alpha_n=(l+\lambda_n)^{-1};\quad \alpha_n\to l^{-1} \tag{1.14}$$

Перейдем к построению решения неоднородного уравнения (1.9) и будем искать его в форме

$$\varphi_2(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(2)}(t)\varphi_n(r) \tag{1.15}$$

Подставим (1.12), (1.15) в (1.9) и используем ортонормированность собственных функций оператора H. Аналогично предыдущему получим

$$\begin{gathered}(l+\lambda_n)[a_n^{(2)}(t)-a_n^{(2)}(0)]+\int_0^t a_n^{(2)}(\tau)\,d\tau=\\ =b_n[\gamma_*(t)-\gamma_*(0)]\quad (n=1,2,\ldots)\\ \left(1=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\varphi_n(r),\quad b_n=\int_c^1\varphi_n(r)\,dr\right)\end{gathered} \tag{1.16}$$

Принимая теперь во внимание асимптотические формулы (1.14), разложим функции $\gamma_*(t)$ и $a_n^{(2)}(t)$ в равномерно сходящиеся при $t\in[0,\ T]$ ряды [6] по системе экспонент $\{\exp(-\alpha_n t)\}$

$$\begin{gathered}\gamma_*(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\exp(-\alpha_n t)\\ a_n^{(2)}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}{}'\,c_{ni}\exp(-\alpha_i t)+c_{nn}t\exp(-\alpha_n t)\end{gathered} \tag{1.17}$$

(штрих у суммы в (1.17) означает, что в ней пропущено слагаемое с индексом $n=i$). Подстановка (1.17) в (1.16) и приравнивание в полученном выражении коэффициентов при $(\exp(-\alpha_n t)-1)$ дает

$$c_{ni}=\delta_i b_n\alpha_n\alpha_i(\alpha_i-\alpha_n)^{-1}\quad (i\neq n),\quad c_{nn}=-\delta_n b_n\alpha_n^2 \tag{1.18}$$

Таким образом построим решение поставленной задачи в форме (1.3)—(1.5), (1.11), (1.14), (1.15) и (1.17) с точностью до счетного множества постоянных $a_n^{(1)}(0)$ $(n\geqslant 1)$. Для определения неизвестных постоянных, в соответствии с перечисленными формулами, запишем

$$\varphi(r,0)=r^{-1}\left[\varphi_\infty+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(1)}(0)\varphi_n(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}{}'\,c_{ni}\varphi_n(r)\right] \tag{1.19}$$

$$\begin{gathered}\Phi(r)=(1-r)r^{-1}\Big\{\varphi_\infty-T^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{-1}a_n^{(1)}(0)\times\\ \times(\exp(-\alpha_n T)-1)\varphi_n(r)-T^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}{}'\,\alpha_i^{-1}c_{ni}(\exp(-\alpha_i T)-1)+\\ +\alpha_n^{-1}c_{nn}T\exp(-\alpha_n T)+\alpha_n^{-2}(\exp(-\alpha_n T)-1)c_{nn}\Big]\varphi_n(r)\Big\}\end{gathered} \tag{1.20}$$

и воспользуемся интегральным уравнением (1.5) при $t = 0$, предварительно разложив в нем функцию $f(r) \in L_2(c, 1)$ в ряд по собственным функциям оператора H (1.6)

$$(1.21) \qquad f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(r), \quad f_n = \int_c^1 f(r)\varphi_n(r)\,dr$$

сходящийся по норме пространства $L_2(c, 1)$. Заметим еще, что, как показывают расчеты, при $T \geqslant 0$ с достаточной для практики точностью в фигурных скобках равенства (1.20) можно пренебречь всеми слагаемыми по сравнению с первым. После этого, внося (1.19) — (1.21) в уравнение (1.5) при $t = 0$, умножая обе части последнего на $\varphi_m(r)$, интегрируя в пределах от c до 1 и используя условие ортонормированности собственных функций оператора (1.6), найдем

$$(1.22) \qquad a_m^{(1)}(0) = \alpha_m \left\{b_m\left(\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n\right) - \left[\gamma_\infty (lb_m + d_m + le_m) + f_m\right]\right\} - \sum_{n=1}^{\infty}{}' c_{mn}$$

$$d_m = (1-c)\int_c^1 \varphi_m(r) B(r)\,dr, \qquad e_m = \int_c^1 \frac{1-r}{r}\varphi_m(r)\,dr$$

$$B(r) = \frac{2}{\pi(1-c)}\int_c^1 K\left(\frac{2\sqrt{yr}}{y+r}\right)\frac{dy}{y+r}$$

Окончательно, общее решение поставленной задачи будет иметь вид

$$(1.23) \qquad \varphi(r, t) = r^{-1}\left[\gamma_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(0)\varphi_n(r) \times \right.$$
$$\left. \times \exp(-\alpha_n t) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(t)\varphi_m(r)\right]$$
$$\psi_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' c_{mn}\exp(-\alpha_n t) + tc_{mn}\exp(-\alpha_m t)$$

причем постоянные $a_n^{(1)}(0)$ представимы в форме (1.22).

Используя теперь условие статики (1.2) в согласии с формулой (1.23), получим

$$(1.24) \qquad P(t) = 2\pi\left[(1-c)\gamma_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(0) b_n \times \right.$$
$$\left. \times \exp(-\alpha_n t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m\psi_m(t)\right]$$

т. е. с ростом времени сила, прижимающая штамп к основанию, и контактное давление стремятся к постоянному значению.

Подобно тому, как это делалось в работе [4], можно доказать, что ряд (1.23) сходится в $L_2(c, 1)$ равномерно по t на отрезке $[0, T]$ $(T \geqslant 0)$, а формула (1.23) определяет обобщенное решение уравнения (1.1).

2. Пусть теперь

$$(2.1) \qquad P(t) = P_\infty + P_*(t); \; P_\infty = \text{const}, \; P_*(t) \to 0 \; (t \to \infty)$$

Тогда, как показано в п. 1, контактное напряжение $\varphi(r, t)$ и осадка поверхности основания под штампом $\gamma(t)$ изменяются во времени по законам (1.3), (1.4), причем $P_\infty = 2\pi(1-c)\varphi_\infty = 2\pi(1-c)\gamma_\infty$, если потребовать в соответствии с условием (1.2) и представлением

$$(2.2) \qquad \varphi_*(r, t) = r^{-1}[\varphi_1^*(t) + \varphi_2(r, t)]$$

чтобы

$$(2.3)\qquad \int_c^1 \varphi_2(r,t)\,dr=0,\quad 2\pi\int_c^1 \varphi_1^*(t)\,dr=2\pi(1-c)\,\varphi_1^*(t)=P_*(t)$$

Перейдем, как и выше, от интегрального уравнения (1.1) к приближенному уравнению (1.7). Если теперь к левой части последнего прибавить и вычесть выражения (D — пока неопределенная постоянная)

$$Dr\,[\varphi_1^*(t)-\varphi_1^*(0)],\quad \int_c^1 [\varphi_2(\rho,t)-\varphi_2(\rho,0)]\,\rho B(\rho)\,d\rho$$

то интегральное уравнение (1.7) будет удовлетворено, когда функции $\varphi_1^*(t)$ и $\varphi_2(r,t)$ будут доставлять решения, соответственно, уравнениям

$$(2.4)\qquad (l+D)\,[\varphi_1^*(t)-\varphi_1^*(0)]+\int_0^t \varphi_1^*(\tau)\,d\tau=$$

$$=\gamma_*(t)-\gamma_*(0)-\int_c^1 [\varphi_2(\rho,t)-\varphi_2(\rho,0)]\,B(\rho)\,d\rho$$

$$(2.5)\qquad l\,[\varphi_2(r,t)-\varphi_2(r,0)]+\frac{2}{\pi}\int_c^1 [\varphi_2(\rho,t)-\varphi_2(\rho,0)]\,k(\rho,r)\,d\rho+$$

$$+\int_0^t \varphi_2(r,\tau)\,d\tau=g(r,t)$$

$$(c\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T)$$

$$(2.6)\qquad k(\rho,r)=\frac{1}{\rho+r}K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right)-\pi/2\,[B(\rho)+B(r)]$$

$$g(r,\ t)=[\varphi_1^*(t)-\varphi_1^*(0)]\,[D-(1-c)\,B(r)]$$

Заметим, что ядро $k(\rho, r)$ вида (2.6) симметрично и обладает свойством

$$(2.7)\qquad \int_c^1\int_c^1 \varphi_2(\rho,t)\,k(\rho,r)\,d\rho\,dr=0$$

Введем в рассмотрение пространство $L_2^0(c,\ 1)$ функций, интегрируемых с квадратом на сегменте $[c,\ 1]$ и удовлетворяющих условию

$$(2.8)\qquad \int_c^1 g(r)\,dr=0$$

Можно показать, что пространство $L_2^0(c,\ 1)$ является подпространством $L_2(c,\ 1)$.

Теорема. Интегральный оператор

$$(2.9)\qquad H^0\varphi=\frac{2}{\pi}\int_c^1 \varphi(\rho)\,k(\rho,r)\,d\rho$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительным оператором, действующим в $L_2^0(c,\ 1)$.

Первые два утверждения теоремы непосредственно следуют из симметрии ядра (2.6), его квадратичной суммируемости и условия (2.7). Установим положительность оператора (2.9) в $L_2^0(c, 1)$. Для этого воспользуемся соотношением [7]

$$\frac{2}{\pi(r+\rho)}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{\rho+r}\right)=\int_0^\infty J_0(ru)\,J_0(\rho u)\,du$$

Составляя затем скалярное произведение при $\varphi \not\equiv 0$, найдем

$$(\varphi, H^0\varphi)_{L_2^0} = \int\limits_0^\infty F^2(u)\,du > 0, \quad F(u) = \int\limits_c^1 \varphi(r) J_0(ur)\,dr$$

Последнее и означает положительность оператора H^0 в $L_2^0\,(c,\ 1)$.

Методами работ [1, 4] построим систему собственных функций $\{\varphi_n(r)\}$ и соответствующую им последовательность собственных чисел $\{\lambda_n\}$ оператора (2.9). В соответствии с теоремой эта система ортонормирована и полна в $L_2^0\,(c,\ 1)$, а все $\lambda_n \geqslant 0$, причем $\lambda_n \sim n^{-1}$ $(n \to \infty)$. Функцию $\varphi_2(r,\ t)$, входящую в формулу (2.5), будем разыскивать в виде (2.10)

$$\varphi_2(r,\ t) = \varphi_2^{(1)}(r,\ t) + \varphi_2^{(2)}(r,\ t) \tag{2.10}$$

где $\varphi_2^{(1)}(r,\ t)$ — общее решение однородного уравнения (2.5), а $\varphi_2^{(2)}(r,\ t)$ — решение этого же неоднородного уравнения. Выбирая постоянную D в (2.6) таким образом, чтобы $g(r,\ t) \in L_2^0\,(c,\ 1)$ при любом t (см. (2.8)), представим функции $\varphi_2^{(1)}(r,\ t)$, $\varphi_2^{(2)}(r,\ t)$ и $g(r,\ t)$ в форме следующих рядов:

$$\varphi_2^{(i)}(r,t) = \sum_{n=1}^\infty a_n^{(i)}(t)\,\varphi_n(r) \quad (i = 1, 2) \tag{2.11}$$

$$g(r,t) = [\varphi_1{}^*(t) - \varphi_1{}^*(0)] \sum_{n=1}^\infty b_n \varphi_n(r) \tag{2.12}$$

$$b_n = \frac{\pi(1-c)}{2} \int\limits_c^1 \varphi_n(r)\,B(r)\,dr$$

Однородное уравнение (2.5) в сочетании с первым соотношением (2.11) приводится к интегральному уравнению (1.13), решение которого имеет вид (1.14). Подстановка второго равенства (2.11) и (2.12) в уравнение (2.5) и сравнение в полученном выражении коэффициентов левой и правой частей при собственных функциях оператора H^0 одинакового номера дает

$$\alpha_n^{-1}[a_n^{(2)}(t) - a_n^{(2)}(0)] + \int\limits_0^t a_n^{(2)}(\tau)\,d\tau = \tag{2.13}$$

$$= b_n[\varphi_1{}^*(t) - \varphi_1{}^*(0)] \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

Поскольку система экспонент $\{\exp(-\alpha_n t)\}$ с учетом последнего условия (1.14) замкнута в $C\,(0,\ T)$ [6], то, принимая во внимание формулы (2.3), запишем

$$\frac{1}{2\pi(1-c)}\,P_*(t) = \varphi_1{}^*(t) = \sum_{n=1}^\infty \delta_n \exp(-\alpha_n t) \tag{2.14}$$

Уравнение (2.13) в согласии с равенством (2.14) будет удовлетворено, если $a_n^{(2)}(t)$ имеет структуру (1.17), (1.18).

Наконец, используя соотношения (2.10), (2.11), (2.14), (1.14) и (1.17), из (2.4) найдем неизвестную под штампом добавку к осадке основания и функции $\varphi_2(r,\ t)$, $\Phi(r)$

$$\gamma_*(t) = \sum_{n=1}^\infty \{[(D + \lambda_n)\,\delta_n + a_n^{(1)}(0)\,\beta_n] \exp(-\alpha_n t) + \beta_n \psi_n(t)\}, \tag{2.15}$$

$$\beta_n = \int\limits_c^1 \varphi_n(r)\,B(r)\,dr$$

$$\varphi_2(r,t) = \sum_{n=1}^\infty [a_n^{(1)}(0)\exp(-\alpha_n t) + \psi_n(t)]\,\varphi_n(r) \tag{2.16}$$

$$\Phi(r) = (1 - r)\,r^{-1}\varphi_\infty \tag{2.17}$$

Здесь, как и ранее, в выражении (2.17) для $\Phi(r)$ остальными слагаемыми можно пренебречь при $T \gg 0$ по сравнению с удержанным.

Неизвестные постоянные $a_n^{(1)}(0)$, входящие в равенство (2.16), определим подставив контактное напряжение $\varphi(r, 0)$ в интегральное уравнение (1.5) при $t = 0$ и проделав следующие преобразования. Пополним систему $\{\varphi_n(r)\}$ $(n \geqslant 1)$ собственных функций оператора H^0 (2.9) элементом $\varphi_0(r) = (1-c)^{-1/2}$. Тогда последовательность функций $\{\varphi_n(r)\}$ $(n \geqslant 0)$ будет ортонормирована и полна в пространстве $L_2(c, 1)$. Разложим функции $f(r)$, $(1-c)B(r)$, $(1-r)r^{-1} \in L_2(c, 1)$ в ряды по системе $\{\varphi_n(r)\}$ $(n \geqslant 0)$

$$(2.18)\qquad f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(r), \quad (1-c)B(r) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \varphi_n(r)$$

$$(1-r)r^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \varphi_n(r) \quad (\{f_n\}, \{d_n\}, \{e_n\} \in l_2)$$

сходящиеся, по крайней мере, по норме пространства $L_2(c, 1)$. Из формул (2.1) — (2.3), (2.17) найдем

$$(2.19)\qquad \varphi(r, 0) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} X_n \varphi_n(r), \quad X_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-c}} P(0)$$

$$X_n = a_n^{(1)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty}{}' c_{nm} \quad (n \geqslant 1)$$

Теперь при помощи равенств (2.18), (2.19) и с учетом ортонормированности системы функций $\{\varphi_n(r)\}$ $(n \geqslant 0)$ в согласии с уравнением (1.5) при $t = 0$ получим

$$(2.20)\qquad X_n = -\alpha_n (X_0 d_n (1-c)^{-1/2} + f_n + l e_n) \quad (n \geqslant 1)$$

$$X_0 = -\frac{1}{l\sqrt{1-c} + d_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n d_n + \sqrt{1-c}(f_0 + l e_0) - (1-c)\gamma(0) \right]$$

При написании равенств (2.20) принято во внимание то обстоятельство, что $\varphi_n(r)$ $(n \geqslant 1)$ являются собственными функциями оператора (2.9) и удовлетворяют условию (2.8). Из (2.19), (2.20) найдем постоянные $a_n^{(1)}(0)$; далее по формуле (2.15) определим $\gamma_*(t)$, а из последнего соотношения (2.20) найдем постоянную γ, входящую в представление (1.3).

Относительно функции $\varphi(r, t)$ может быть доказано утверждение, аналогичное сформулированному в конце п. 1.

3. Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть, например, в (1.3) $\gamma_\infty = \gamma_*(t) \equiv 0$. Это означает, что поступательное перемещение штампа не зависит от времени [2]. Из формул (1.4), (1.22) — (1.24) найдем, что

$$(3.1)\qquad a_m^{(1)}(0) = \alpha_m (\gamma b_m - f_m - l e_m) \quad (m \geqslant 1)$$

$$\varphi(r, t) = r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(0)\, \varphi_n(r) \exp(-\alpha_n t), \qquad P(t) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(0)\, b_n \exp(-\alpha_n t)$$

т. е. в этом случае контактное давление и сила, прижимающая штамп к основанию, с течением времени стремятся к нулю.

Допустим теперь, что в (1.3) только $\gamma_*(t) \equiv 0$. Последнее означает, что скорость поступательного перемещения штампа постоянна во времени и равна γ_∞. Из равенств (1.17), (1.18) получим, что $\delta_n = c_{ni} = 0$.

Изучим еще предельный вариант интегрального уравнения (1.1) при $l = 0$. Сделав в нем замену переменных $r = c \exp[(1+x)/\lambda]$, $\rho = c \exp[(1+\xi)/\lambda]$ и введя обозначения по формулам $\psi(\xi, t) = \rho^{3/2} \varphi(\rho, t)$, $\lambda = -2(\ln c)^{-1}$, $\beta(x, t) = \lambda\sqrt{r}[\gamma(t) -$

$-f(r)]$, $m(z)=\operatorname{sch}(^1/_2 z)\,K[\operatorname{sch}(^1/_2 z)]$, получим интегральное уравнение первого рода с разностным ядром

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(\xi,t)\,m\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\beta(x,t)-\lambda\int_{0}^{t}\psi(x,\tau)\,d\tau\qquad(|x|\leqslant 1)\tag{3.2}$$

$$m(z)\sim-\ln|z|\ (z\to 0)\tag{3.3}$$

Введем далее малый параметр $\varepsilon\lambda^{-1}$ ($\varepsilon\lambda^{-1}\ll 1$) и перепишем (3.2) в форме

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(\xi,\varepsilon)\,m\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\beta(x,\varepsilon)-\lambda\int_{0}^{\varepsilon\lambda^{-1}}\psi(x,\tau)\,d\tau\ (|x|\leqslant 1)\tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}[\psi(\xi,t)-\psi(\xi,\varepsilon)]\,m\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\beta(x,t)-\beta(x,\varepsilon)-\tag{3.5}$$

$$-\lambda\int_{\varepsilon\lambda^{-1}}^{t}\psi(x,\tau)\,d\tau\ (|x|\leqslant 1,\ \varepsilon\lambda^{-1}\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

Заметим, что решение интегрального уравнения (3.5) может быть найдено методами пп. 1, 2, поэтому здесь останавливаться на его построении не будем. Исследуем уравнение (3.4). Принимая в расчет, что $\psi(x,t)=\psi(x,\varepsilon)+O(\varepsilon\lambda^{-1})$ ($t\in(0,\varepsilon\lambda^{-1})$, $\varepsilon\lambda^{-1}\ll 1$), и пренебрегая в полученном выражении малыми порядка $(\varepsilon\lambda^{-1})^2$, получим

$$\varepsilon\psi(x,\varepsilon)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\psi(\xi,\varepsilon)\,m\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\beta(x,\varepsilon)\qquad(|x|\leqslant 1)\tag{3.6}$$

Решение уравнения (3.6) получено методом сращиваемых асимптотических разложений и имеет вид [8]

$$\psi(x,\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\omega(x)-\frac{\omega(1)}{2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\right]+\tag{3.7}$$

$$+\frac{\omega(1)}{\sqrt{2\varepsilon}}\left[q\left(\frac{1+x}{\varepsilon}\right)+q\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\right]$$

В (3.7) в силу (3.3) $\omega(x)=\psi(x,0)\sqrt{1-x^2}\in C(-1,1)$, причем функция $\psi(x,0)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.6) при $\varepsilon=0$, а $q(s)$ — решение уравнения

$$q(s)-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}q(\tau)\ln\left|\frac{\tau-s}{\tau}\right|d\tau=q(0)\qquad(0\leqslant s<\infty)$$

Последнее, как показано в [8], эквивалентно функциональному разностному уравнению со сдвигом [9], допускающему замкнутое решение.

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна и В. М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 58—66.
2. *Галин Л. А., Горячева И. Г.* Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 807—812.
3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2, с. 324—328.
4. *Коваленко Е. В.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, № 5, с. 14—26.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
6. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100с.
8. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа.— Докл. АН СССР, 1984, т. 275, № 4, с. 827—830.
9. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные однородные разностные уравнения. М.: Наука, 1981. 206 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.X.1984