Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 539.383

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ОБЛАСТЕЙ КОНТАКТА

Галанов Б. А.

Даются новые формулировки классических и неклассических пространственных контактных задач, основанные на применении метода граничных уравнений типа Гаммерштейна. В формулировках отсутствуют ограничения типа неравенств, как это имеет место в методе вариационных неравенств [1—8] и известных постановках контактных задач [9—13]. Полная система уравнений контактной задачи состоит из одного граничного уравнения типа Гаммерштейна и обычных уравнений равновесия для сжимающей силы и моментов, действующих на тела. Если известны взаимные повороты тел и их сближение, то по решению граничного уравнения типа Гаммерштейна легко определяются контактное давление и область контакта.

Такая формулировка задач и современные методы теории операторных уравнений позволяют в весьма общих случаях (например, многосвязности искомых областей контакта) сравнительно просто выполнять исследования существования и единственности решений, а также их некоторых свойств. Кроме того, создается возможность применения для решения задач известных методов решения уравнений типа Гаммерштейна [14—17]. На примере двух типов задач, одна из которых классическая, проводится исследование корректности постановок контактных задач.

1. Классическая контактная задача. Рассмотрим случай, когда контактная задача сводится к определению в полупространстве $z > 0$ гармонической функции $u(M) = u(x, y, z)$ ($u(M) = O(r^{-1})$ при $r \to \infty$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) и плоской замкнутой области $S \subset E_2 = \{z = 0\}$ из условий

$$
\begin{aligned}
&2\pi\lambda u(M) = g(M);\ u_z'(M) \geqslant 0,\ M \in S \\
&2\pi\lambda u(M) > g(M);\ u_z'(M) = 0,\ M \in (E_2 \setminus S) \\
&(g(M) \in C(E_2),\ \lambda = \text{const} > 0)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Предполагается, что существует ограниченная область $\Omega_0 = \{M: g(M) > 0\}$, $g(M) \leqslant 0$ при $M \notin \Omega_0$ (область Ω_0 может быть многосвязной).

Такая постановка задачи соответствует задаче вдавливания (без трения) штампа в упругое полупространство [9—13], если осадка штампа и его поворот известны, т. е. известна функция $g(M) = h_1 + h_2x + h_3y - f(x, y)$. Функция $f(x, y)$ определяет геометрию штампа.

Если ввести потенциал простого слоя с плотностью $p(M)$, $M \in S$, то при $z = 0$ имеем

$$
u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_S K(M, N)\, p(N)\, dS_N; \quad K(M, N) = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{-1/2}; \qquad M(x, y), \quad N(\xi, \eta)
$$

и задача (1.1) эквивалентна задаче нахождения контактного давления

$p(M)$, а также области контакта S из системы

$$(1.2)\qquad \begin{aligned}&\lambda\int\limits_S K(M,N)\,p(N)\,dS_N = g(M); \quad p(M)\geqslant 0, \quad M\in S\\ &\lambda\int\limits_S K(M,N)\,p(N)\,dS_N > g(M); \quad p(M)=0, \quad M\in(\Omega\setminus S)\end{aligned}$$

где Ω — произвольная ограниченная область, содержащая замыкание Ω_0. Очевидно, $S\in\bar{\Omega}_0$.

Введем положительно однородные ограниченные операторы Q и Q^-, ставящие в соответствие функции $v(M)$, $M\in\Omega$, функции $v^+(M)$ и $v^-(M)$, $M\in\Omega$, по правилам

$$(1.3)\qquad \begin{aligned}&v^+(M) = Q(v(M)) = \sup\{v(M),\ 0\}\\ &v^-(M) = Q^-(v(M)) = \inf\{v(M), 0\}; \ v(M) = v^+(M) + v^-(M)\end{aligned}$$

Рассмотрим относительно неизвестной функции $v(M)$ нелинейное уравнение

$$\mu Q^-(v(M)) + \lambda\int\limits_\Omega K(M,N)\,Q(v(N))\,dS_N = g(M); \quad M, N\in\Omega$$

которое для удобства запишем в операторном виде

$$(1.4)\qquad \mu Q^- v + \lambda KQv = g$$

Параметр $\mu > 0$ может принимать произвольные значения. Зависимость решения уравнения (1.4) от μ определяется далее (теорема 5 и ее следствие).

Элементарными преобразованиями уравнение (1.4) приводится к уравнению типа Гаммерштейна и может быть представлено в следующих эквивалентных формах:

$$v = \mu^{-1}g + BQv, \quad w = BFw$$
$$(B = E - \lambda\mu^{-1}K, \quad w = \mu v - g, \quad Fw = Q(w+g))$$

где B — линейный оператор, E — тождественный оператор.

Теорема 1. Если v^* — решение уравнения (1.4), то ($p = Qv^*$, $S = \{M : v^*\geqslant 0\}$) — решение системы (1.2), причем $S\neq\varnothing$ при $\Omega_0\neq\varnothing$; обратно, если $(p,\ S)$ — решение системы (1.2), то функция

$$(1.5)\qquad v^* = \mu^{-1}g + p - \lambda\mu^{-1}Kp, \quad M\in\Omega$$

— решение уравнения (1.4). Область S может быть многосвязной.

Доказательство. Прежде всего покажем, что $S\neq\varnothing$, если $\Omega_0\neq\varnothing$. Предположим противное. Тогда из (1.4) следует неравенство $g < 0$, которое противоречит существованию $\Omega_0\neq\varnothing$.

Пусть v^* — решение уравнения (1.4). При $M\in S$ из (1.3), (1.4) вытекают соотношения: $p = Qv^*\geqslant 0$, $\lambda Kp = g$. Если $M\notin S$, то $v^* < 0$, $\mu Q^-v^* + \lambda KQv^* = g$ и $\lambda Kp > g$. Это и доказывает прямую часть теоремы.

Пусть теперь $(p,\ S)$ - решение системы (1.2) При $M\in S$ из (1.2), (1.5) следует равенство: $v^* = p$. Если $M\in(\Omega\setminus S)$, то имеем $v^* = \mu^{-1}g - \lambda\mu^{-1}Kp < 0$. Поэтому (1.5) можно записать так:

$$v^* = \mu^{-1}g + Qv^* - \lambda\mu^{-1}KQv^*, \ M\in\Omega$$

т. е. v^* — решение уравнения (1.4).

Таким образом, для решения поставленной контактной задачи (1.2) достаточно найти решение v^* уравнения (1.4), поскольку $p = Qv^*$ и $S = \{M\colon v^*\geqslant 0\}$. Поэтому в дальнейшем исследуется уравнение (1.4).

Наряду с уравнением (1.4) будем рассматривать в $L_2(\Omega)$ регуляризованное граничное уравнение

$$(1.6)\qquad \varepsilon Qv + \mu Q^{-}v + \lambda KQv = g$$

с параметром $\varepsilon > 0$. Запишем уравнение (1.6) в виде

$$(1.7)\qquad v = \mu^{-1}g + B_\varepsilon Qv \quad (B_\varepsilon = (1 - \varepsilon\mu^{-1})E - \lambda\mu^{-1}K)$$

и будем рассматривать его при таких достаточно больших значениях μ, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$, выполняется неравенство

$$\| B_\varepsilon \| = \sup_k | 1 - \varepsilon\mu^{-1} - \lambda\mu^{-1}\lambda_k^{-1} | = q < 1$$

Здесь $\lambda_k > 0$ — характеристические числа оператора K (определение нормы оператора см. [17], с. 191).

Тогда (в силу принципа сжатых отображений, примененного к (1.7)) уравнение (1.6) имеет решение $v_\varepsilon \in L_2(\Omega)$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Поскольку ядро $K(M, N)$ обладает слабой особенностью, то $v_\varepsilon \in C(\Omega)$.

Введем обозначения

$$\Omega_\varepsilon^+ = \{M : v_\varepsilon \geqslant 0\}, \quad \Omega_\varepsilon^- = \{M : v_\varepsilon < 0\}, \quad (a, b) = \int_\Omega a(t)\, b(t)\, dt$$

Дифференциальные свойства решений v_ε уравнения (1.6) устанавливает

Лемма. Если $g' \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то $v_\varepsilon' \in L_p(\Omega)$; если $g' \in C(\Omega)$, то $v_\varepsilon^{+\prime} \in C(\Omega_\varepsilon^+)$, $v_\varepsilon^{-\prime} \in C(\Omega_\varepsilon^-)$.

Доказательство. Для $M \in \Omega_\varepsilon^+$ имеем

$$(1.8)\qquad v_\varepsilon(M) = \varepsilon^{-1}g(M) - \lambda\varepsilon^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon^+} K(M, N)\, v_\varepsilon(N)\, dS_N$$

$$(1.9)\qquad v_\varepsilon'(M) = \varepsilon^{-1}g'(M) - \lambda\varepsilon^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon^+} K'(M, N)\, v_\varepsilon(N)\, dS_N$$

где штрих означает производную по x или по y, смысл которой определяется ниже.

Из теоремы о дифференцировании интегралов со слабой особенностью [18] следует, что второе слагаемое в правой части (1.9) является функцией из $L_2(\Omega)$. Поэтому, интегрируя это слагаемое по частям и учитывая финитность v_ε^+, а также равенства $K_x'(M, N) = -K_\xi'(M, N)$, $K_y'(M, N) = -K_\eta'(M, N)$, получим

$$(1.10)\qquad \varepsilon v_\varepsilon' + \lambda K v_\varepsilon' = g', \quad M, N \in \Omega_\varepsilon^+$$

Отсюда следует, что функция v_ε^+, $M \in \Omega_\varepsilon^+$, принадлежит тому же классу функций, что и $g'(M)$, $M \in \Omega_\varepsilon^+$.

Аналогично (1.8), (1.10) имеем

$$(1.11)\qquad \mu v_\varepsilon + \lambda K v_\varepsilon^+ = g, \quad \mu v_\varepsilon' + \lambda K v_\varepsilon^{+\prime} = g', \quad M \in \Omega_\varepsilon^-$$

Из (1.10), (1.11) непосредственно вытекает первая часть леммы. Из этих же равенств следует, что $v_\varepsilon^{+\prime} \in C(\Omega_\varepsilon^+)$ и $v_\varepsilon^{-\prime} \in C(\Omega_\varepsilon^-)$ при $g' \in C(\Omega)$ (в общем случае $v_\varepsilon' \notin C(\Omega)$).

Следующие далее теоремы устанавливают условия существования (теорема 2) и единственности (теорема 3) решения v^* уравнения (1.4), непрерывную зависимость v^* от вектор-параметра $h = (h_1, h_2, h_3)$ (теорема 4) некоторые свойства v^* (теорема 5 и ее следствие).

Теорема 2. Для существования решения $v^* \in L_2(\Omega)$ уравнения (1.4) необходимо и достаточно, чтобы

$$(1.12)\qquad \| v_\varepsilon \|_{L_2} \leqslant c, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

где постоянная c не зависит от ε.

Доказательство. Необходимость. Пусть $v^* \in L_2(\Omega)$ — решение уравнения (1.4) и $S = \{M : v^* \geqslant 0\}$. Обозначим через $L_2^0(\Omega)$ совокупность всех финитных в Ω функций из $L_2(\Omega)$ и рассмотрим на выпуклом замкнутом в L_2 множестве $\omega = \{v \in L_2^0(\Omega), v \geqslant 0\}$ функционал

$$\varphi(v) = {}^1/_2\lambda(Kv, v) - (g, v)$$

Он строго выпуклый и $\varphi'(v) = \operatorname{grad}\varphi(v) = \lambda Kv - g$. Докажем, что

$$\inf_{v \in \omega} \varphi(v) = \varphi(v^{*+}) \tag{1.13}$$

Для этого достаточно проверить неравенство [19]

$$(\varphi'(v^{*+}), v - v^{*+}) \geqslant 0, \ \forall v \in \omega$$

или

$$(\lambda Kv^{*+} - g, v) \geqslant (\lambda Kv^{*+} - g, v^{*+}), \ \forall v \in \omega \tag{1.14}$$

Так как $\lambda Kv^{*+} - g > 0$, $v^{*+} = 0$ при $M \notin S$ и $\lambda Kv^{*+} - g = 0$, $v^{*+} \geqslant 0$ при $M \in S$, то правая часть в (1.14) равна нулю, а левая часть положительна, что и доказывает (1.13).

Аналогично доказывается, что единственная функция $v_\varepsilon^+ = Qv_\varepsilon$ доставляет минимум функционалу $\varphi_\varepsilon(v) = {}^1/_2\varepsilon(v, v) + \varphi(v)$, $v \in \omega$.

Поскольку для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеем

$$\varphi_\varepsilon(v_\varepsilon^+) < {}^1/_2\varepsilon(v^{*+}, v^{*+}) + {}^1/_2\lambda(Kv^{*+}, v^{*+}) - (g, v^{*+})$$

или

$${}^1/_2\varepsilon[(v^{*+}, v^{*+}) - (v_\varepsilon^+, v_\varepsilon^+)] > \varphi(v_\varepsilon^+) - \varphi(v^{*+}) > 0$$

то

$$\| v_\varepsilon^+ \|_{L_2} < \| v^{*+} \|_{L_2}, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \tag{1.15}$$

Существование постоянной c в неравенстве (1.12) является очевидным следствием неравенства (1.15).

Достаточность. Пусть выполнено неравенство (1.12). Обозначим $Av = \mu Q^- v + \lambda KQv - g$ и образуем последовательность v_{ε_n} ($n = 0, 1, 2, \ldots$), где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Выделим из последовательностей $\{v_{\varepsilon_n}\}$, $\{Qv_{\varepsilon_n}\}$, $\{Q^- v_{\varepsilon_n}\}$ слабо сходящиеся в L_2 подпоследовательности (на основании (1.12) и рефлексивности пространства L_2 это всегда можно сделать (см. [20], с. 60), которые обозначим так же, как и основные последовательности, т. е. $v_{\varepsilon_n} \rightharpoonup v^*$, $Qv_{\varepsilon_n} \rightharpoonup w$, $Q^- v_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$. Покажем, что v^* — решение уравнения (1.4).

Поскольку $Q^- v_{\varepsilon_n} = \mu^{-1} g - \lambda\mu^{-1} KQv_{\varepsilon_n} - \varepsilon_n \mu^{-1} Qv_{\varepsilon_n}$, выполнено неравенство (1.12) и K — вполне непрерывный оператор, то $Q^- v_{\varepsilon_n} \to u$ [20]. Поэтому

$$(Q^- v_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n}) \to (u, v^*) \tag{1.16}$$

Используя монотонность Q^-, для произвольного $t \in L_2$ можем написать $(Q^- t - Q^- v_{\varepsilon_n}, t - v_{\varepsilon_n}) \geqslant 0$. Переходя здесь к пределу (с учетом (1.16)), получим

$$(Q^- t - u, t - v^*) \geqslant 0, \ \forall t \in L_2$$

т. е. $Q^- v^* = u$ (в силу непрерывности Q^- и леммы Минти [14]). Отсюда (поскольку $Qv = v - Q^- v$) следует, что $Qv^* = w$.

Выполняя в равенстве

$$Av_{\varepsilon_n} \equiv \mu Q^- v_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n Qv_{\varepsilon_n} + \lambda KQv_{\varepsilon_n} - g - \varepsilon_n Qv_{\varepsilon_n} = -\varepsilon_n Qv_{\varepsilon_n}$$

переход к пределу при $v_{\varepsilon_n} \rightharpoonup v^*$, получим $Av^* = 0$, т. е. $v^* \in L_2$ — решение уравнения (1.4). Теорема доказана.

Замечание 1. Если $v_{\varepsilon_n} \in W_p^{(1)}(\Omega)$, $p \geqslant 1$, и $\| v_{\varepsilon_n} \|_{W_p^{(1)}} \leqslant c$ (постоянная c не зависит от ε_n), то из последовательности v_{ε_n} (на основании теорем вложения Соболева [17, 18]) можно выделять подпоследовательности, сильно сходящиеся к v^* в пространствах, в которые $W_p^{(1)}$ компактно вкладывается. Например, при $p > 2$ указанная подпоследовательность будет равномерно сходиться к v^*. Условия включения $v_\varepsilon \in W_p^{(1)}(\Omega)$ даны в приведенной выше лемме.

Замечание 2. Из уравнения (1.6) непосредственно следует оценка

$$\| v_\varepsilon^+ \|_{L_1} \leqslant m^{-1} \| g \|_C, \qquad m = \inf_{\Omega\times\Omega} K(M, N) > 0$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \| Av_\varepsilon \|_{L_1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \| v_\varepsilon^+ \|_{L_1} = 0$$

Теорема 3. Если уравнение (1.4) имеет решение $v^* \in L_2(\Omega)$, то оно единственное.

Доказательство. Пусть

$$\mu Q^- v_1 + \lambda KQv_1 = g,\ \mu Q^- v_2 + \lambda KQv_2 = g;\ v_1 \neq v_2 \tag{1.17}$$

Обозначим

$$d = Qv_2 - Qv_1,\ d^- = Q^- v_2 - Q^- v_1,\ \delta = v_2 - v_1 \tag{1.18}$$

Тогда из (1.17) имеем

$$\begin{aligned} &\mu d^- + \lambda Kd = 0 \\ &\mu (d^-, d) + \lambda (Kd, d) = 0;\ \mu\delta - \mu d + \lambda Kd = 0 \\ &(d^-, d) = -(Q^- v_1, Qv_2) - (Q^- v_2, Qv_1) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Поэтому из (1.19) и строгой положительности K получим $d = 0$, $\delta = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. Пусть h — вещественный параметр, $g(M) = h - f(M)$, v_h^*, $h \in [0, h_0]$ — семейство решений уравнения (1.4), зависящее от h. Тогда v_h^* непрерывно зависит от h и непрерывная функция $P(h) = \int_\Omega Q(v_h^*(M))\, dS_M$ является строго возрастающей ($P(h)$ — сила, вдавливающая штамп на глубину h).

Доказательство. Пусть v_1 и v_2 — решения уравнения (1.4), соответствующие значениям $h = h_1$ и $h = h_2$ из промежутка $[0, h_0]$. Тогда, с учетом обозначений (1.18), имеем

$$\begin{aligned} &\mu d^- + \lambda Kd = h_2 - h_1,\ \mu\delta - \mu d + \lambda Kd = h_2 - h_1 \\ &\mu (d^-, d) + \lambda (Kd, d) = (h_2 - h_1, d);\ (d^-, d) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Поскольку $(h_2 - h_1, d) = (h_2 - h_1)(P(h_2) - P(h_1))$ и левая часть последнего равенства (1.20) положительна, то $P(h)$ — строго возрастающая функция. Далее, из последнего равенства (1.20) и строгой положительности K следует, что $d \to 0$ при $h_1 \to h_2$. Поэтому из предпоследнего равенства (1.20) получим $\delta \to 0$ при $h_1 \to h_2$, что и указывает на непрерывную зависимость v_h^* от h. Теорема доказана.

Замечание 3. Аналогично можно показать непрерывную зависимость v_h^* от векторного параметра $h = (h_1, h_2, h_3)$ ($g(M) = h_1 + h_2 x + h_3 y - f(x, y)$). Такая непрерывная зависимость имеет существенное значение, когда в контактной задаче отыскивается значение $h = (h_1, h_2, h_3)$ из условий

$$\int\limits_{\Omega} Q(v_h^*(M))\, dS_M = P, \quad \int\limits_{\Omega} yQ(v_h^*(M))\, dS_M = M_x, \quad \int\limits_{\Omega} xQ(v_h^*(M))\, dS_M = M_y$$

где $\{P, M_x, M_y\}$ — заданные числа (P — сила, прижимающая штамп, M_x, M_y — моменты, действующие на штамп).

Теорема 5. Пусть v_1 и v_2 — решения уравнения (1.4), соответствующие значениям $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда $Qv_1 = Qv_2$.

Доказательство. Для определенности будем считать, что $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1 > 0$. Имеем

$$\mu_1 Q^- v_1 + \lambda KQv_1 = g, \quad \mu_2 Q^- v_2 + \lambda KQv_2 = g \tag{1.21}$$

Вычтем из второго равенства (1.21) первое и результат умножим скалярно на d. Получим

$$\Delta\mu\,(Q^- v_2, d) + \mu_1 (d^-, d) + \lambda\,(Kd, d) = 0 \tag{1.22}$$

Непосредственно проверяется, что слагаемые левой части (1.22) — неотрицательные числа. Поэтому $d = 0$, откуда следует утверждение теоремы.

Следствие. Существование решения уравнения (1.4) для некоторого значения $\mu = \mu^*$ влечет существование решений уравнения (1.4) для всех $\mu > 0$.

Замечание 4. Аналогично могут быть исследованы уравнения типа (1.4) в случае несимметричных ядер $K(M, N)$ (например, для задач, рассмотренных в работе [21] а также в контактных задачах, учитывающих силы трения).

Таким образом, поставленная контактная задача (1.2) сводится к решению уравнения (1.4), для чего могут быть использованы разные приближенные методы [14—17]. Был рассмотрен [22] приближенный метод, основанный на применении регуляризованного граничного уравнения.

2. Контактная задача для тел с линейными и нелинейными покрытиями винклеровского типа [9—11]. В этих задачах первое из условий (1.1) имеет вид

$$\Phi(u_z'(M)) + 2\pi\lambda u(M) = g(M)$$

Здесь $\Phi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — строго возрастающая непрерывная функция аргумента t, $\Phi(0) = 0$.

Система, аналогичная системе (1.2), относительно неизвестной пары $(w(M), S)$ записывается так:

$$w(M) + \lambda \int\limits_S K(M, N)\, H(w(N))\, dS_N = g(M), \quad w(M) \geqslant 0, \quad M \in S \tag{2.1}$$

$$\lambda \int\limits_S K(M, N)\, H(w(N))\, dS_N > g(M), \quad w(M) = 0, \quad M \in (\Omega \setminus S)$$

где H — функция, обратная для Φ, $w(M) = \Phi(p(M))$. Как и прежде, $p(M)$ — контактное давление, S — площадка контакта. В дальнейшем предполагается, что функция H удовлетворяет условию

$$|H(w)| \leqslant c_* |w|^{1/\alpha}; \; c_* = \text{const}, \; 0 < \alpha \leqslant 1$$

Рассмотрим относительно неизвестной функции $v(M)$ уравнение Гаммерштейна

$$v(M) + \lambda \int\limits_{\Omega} K(M, N)\, Q(H(v(N)))\, dS_N = g(M); \quad M, N \in \Omega$$

которое в операторной форме имеет вид

$$v + \lambda KQHv = g \tag{2.2}$$

Если v^* — решение уравнения (2.2), то функция $w = Qv^*$ и множество $S = \{M\colon v^* \geqslant 0\}$ — решение системы (2.1), причем $S \neq \varnothing$ при $\Omega_0 \neq \varnothing$. Верно и обратное: если (w, S) — решение системы (2.1), то функция $v^* = g - \lambda KHw$ $(M \in \Omega)$ — решение уравнения (2.2). Доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы 1.

Таким образом, задача (2.1) сводится к решению уравнения Гаммерштейна (2.2). Единственность решения v^* уравнения (2.2), а также непрерывная зависимость его от параметра $h = (h_1, h_2, h_3)$ устанавливаются так же, как это сделано в теоремах 3, 4. Достаточные условия существования решения уравнения (2.2) даны в теореме 6. В этой теореме несколько ослаблены ограничения на функцию g (предположение существования ограниченной области $\Omega_0 = \{M\colon g \geqslant 0\}$ сохраняется).

Теорема 6. Пусть выполнены условия

$$g \in L_p(\Omega), \ p = 1 + 1/\alpha, \ {}^1/_2 < \alpha \leqslant 1$$

Тогда уравнение (2.2) имеет решение $v^* \in L_p(\Omega)$. При этом, если $g \in C(\Omega)$, то $v^* \in C(\Omega)$.

Доказательство. Оператор K является вполне непрерывным оператором из L_q, $q = 1 + \alpha$, в $L_q^* = L_p$, $p = 1 + 1/\alpha$ [18]. Сужение K на L_2 — самосопряженный строго положительный оператор. Поэтому существует квадратный корень $D = K^{1/2}$, который является вполне непрерывным оператором из L_2 в L_q^* [14]. Сопряженный оператор D^* действует из L_q^* в L_2.

Если в уравнении (2.2) выполнить замену переменных [14] $v = Dt + g$, то получим эквивалентное (2.2) уравнение

$$Ft \equiv t + \lambda D^*QH(Dt + g) = 0; \ t \in L_2 \tag{2.3}$$

с непрерывным монотонным и потенциальным оператором F (монотонность F следует из монотонности функции $QH(v)$).

Оценим снизу скалярное произведение (Ft, t):

$$\begin{aligned}(Ft, t) &= (t, t) + \lambda(QH(Dt + g), Dt + g) - \\ &- \lambda(QH(Dt + g), g) \geqslant (t, t) - \lambda(QH(Dt + g), g) \geqslant \\ &\geqslant (t, t) - \lambda \|g\|_{L_p} \|QH(Dt + g)\|_{L_q}\end{aligned}$$

Используя свойства операторов Q и H, а также неравенство Минковского, получим

$$\|QH(Dt + g)\|_{L_q} \leqslant c_* (\|D\| \|t\|_{L_2} + \|g\|_{L_p})^{1/\alpha}$$

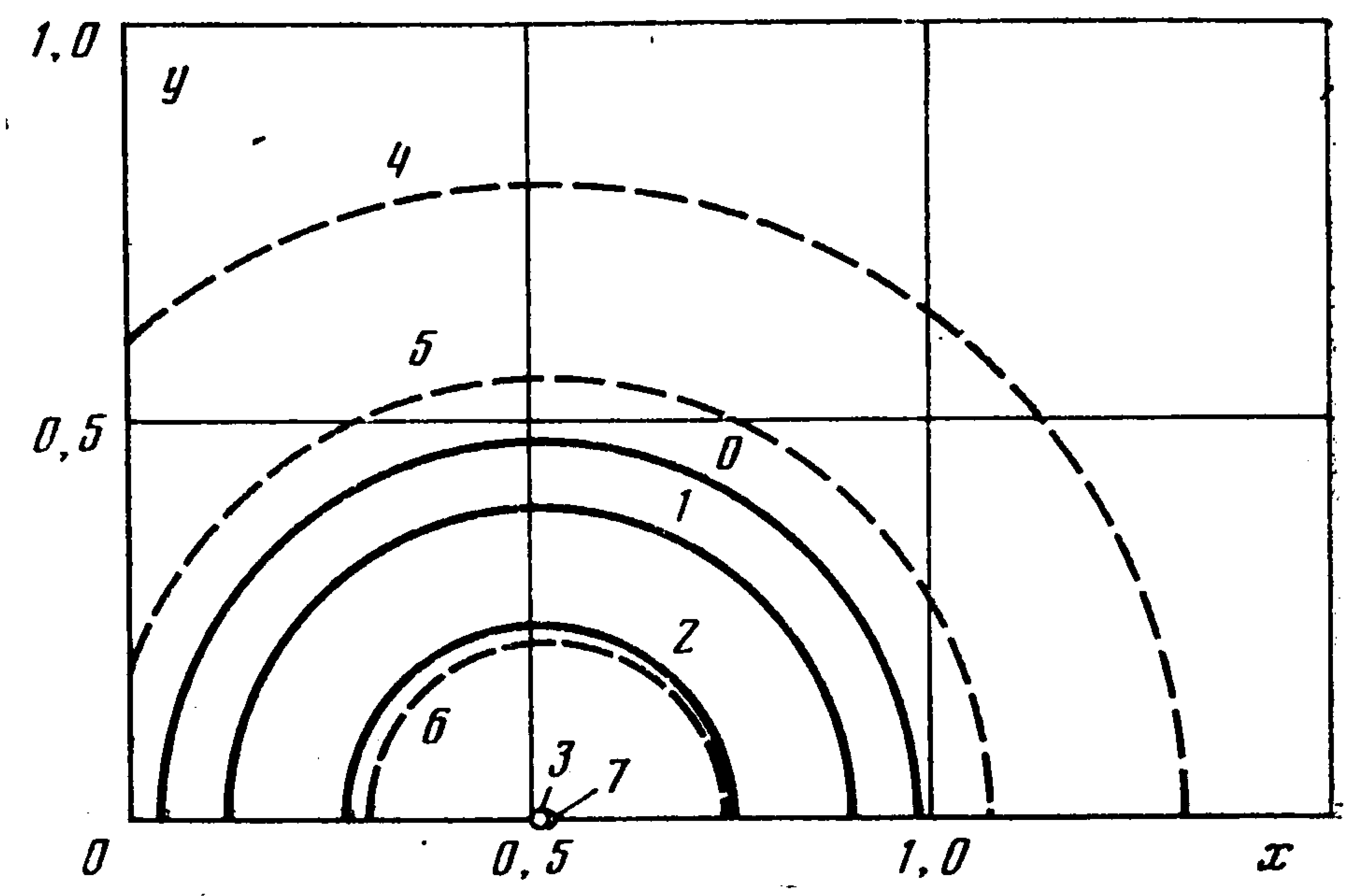
Поэтому имеем оценку

$$(Ft, t) \geqslant \|t\|_{L_2}^2 - c_*\lambda \|g\|_{L_p} \|t\|_{L_2}^{1/\alpha} \left(\|D\| + \frac{\|g\|_{L_p}}{\|t\|_{L_2}}\right)^{1/\alpha}$$

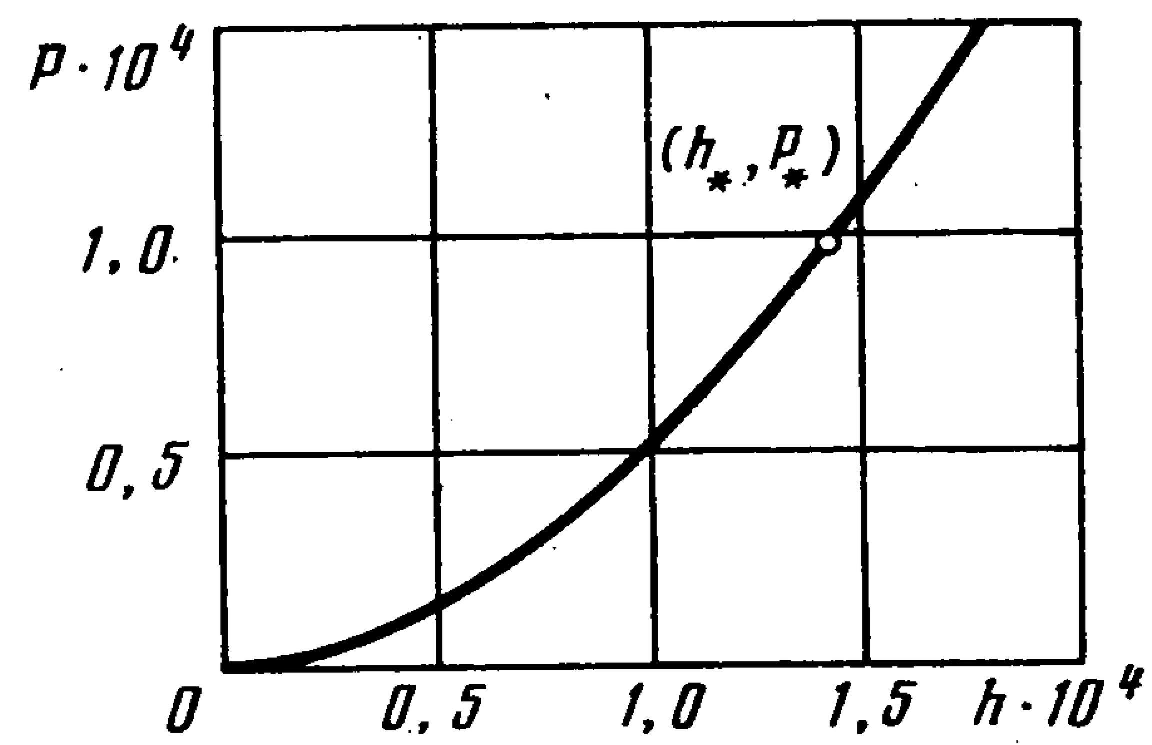
и при $\alpha > {}^1/_2$ существует такое число $\rho > 0$, что при $\|t\|_{L_2} \geqslant \rho$ справедливо неравенство $(Ft, t) > 0$, т. е. на основании теоремы Браудера — Минти ([14], с. 262) уравнение (2.3) имеет решение $t^* \in L_2$, которому соответствует решение $v^* = Dt^* + g$ уравнения (2.2).

Покажем теперь, что $v^* \in C(\Omega)$ при $g \in C(\Omega)$. Пусть $M \in S = \{M\colon v^* \geqslant 0\}$ (существование $S \neq \varnothing$ доказывается точно так же, как это сделано в теореме 1). Тогда при $M \in S$ имеем

$$v^*(M) + \lambda \int_S K(M, N) H(v^*(N)) dS_N = g(M) \tag{2.4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

и возможна альтернатива: 1) $v^*(M)$ $(M \in S)$ — разрывная ограниченная функция, 2) $v^*(M)$ $(M \in S)$ — неограниченная функция.

При первой возможности левая часть равенства (2.4) — разрывная ограниченная функция (поскольку λKHv^* — непрерывная функция), что противоречит непрерывности g. При второй возможности левая часть равенства (2.4) является неограниченной функцией (как сумма неотрицательных функций, из которых по крайней мере одна неограниченная). Это опять противоречит непрерывности g. Поэтому $v^*(M)$ $(M \in S)$ — непрерывная функция. Отсюда и из свойств потенциала простого слоя следует, что функция $v^* = g - \lambda KQHv^*$ $(M \in \Omega)$ — непрерывная. Теорема 6 доказана.

Замечание 5. Если $g \in C(\Omega)$, то вполне непрерывный в $C(\Omega)$ оператор U, определяемый равенством $Uv = g - \lambda KQHv$, отображает отрезок $[Ug, g] \subset C(\Omega)$ в себя (при этом ограничение $|H(w)| \leqslant c_* |w|^{1/\alpha}$ можно опустить). Поэтому из принципа Шаудера [17] непосредственно следует, что уравнение (2.2) для всех $\lambda > 0$ имеет решение $v^* \in [Ug, g]$.

Замечание 6. Уравнение (1.6) при $\mu = \varepsilon$ является уравнением типа (2.2). ∎

Рассмотренный метод исследования контактных задач при помощи граничных уравнений типа Гаммерштейна обладает значительной общностью. Во многих контактных задачах (например, в задачах контакта плит и балок с упругим основанием, в задачах контакта шероховатых тел) условия контакта тел, для которых известна функция Грина (т. е. отклик каждого тела на единичное воздействие), сводятся при помощи оператора Q к уравнению типа Гаммерштейна.

Численный пример. Решалось уравнение (2.2) при $H = E$ методом последовательных приближений

(2.5) $$v_{n+1} = g - \lambda KQv_n; \quad v_0 = g; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

для следующих данных:

$$g(M) = h - f(x, y)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (2R)^{-1}((x-a)^2 + y^2), & x \geqslant 0 \\ (2R)^{-1}((x+a)^2 + y^2), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Omega = \{-1{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5;\ \ -1{,}0 \leqslant y \leqslant 1{,}0\},\quad 0 \leqslant h \leqslant 0{,}5\cdot 10^{-3}$$

что соответствует задаче о вдавливании на глубину h в упругое полупространство с покрытием винклеровского типа штампа в виде «спаренных» параболоидов вращения, вершины которых расположены на расстоянии $2a$ $(a > 0)$.

Дискретизация (2.5) осуществлялась с учетом симметрии решения v^* относительно осей x и y. Узлы сетки, аппроксимирующей прямоугольник Ω, имеют координаты

$$x = ih_x,\quad y = jh_y;\quad i,\ j = 0,\ \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$$

Здесь $h_x = 1{,}5/m$, $h_y = 1{,}0/m$ — шаги сетки соответственно по направлениям x и y. Аппроксимация оператора K осуществлялась аналогично [22] с использованием формулы прямоугольников. Остановка процесса (2.5) производилась по критерию $\| v_{n+1} - v_n \| / \| v_n \| \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

На фиг. 1 показаны изобары $p(M)\cdot 10^5 = c = \mathrm{const}$ для следующих величин параметров: $\lambda = 0{,}07$; $R = 10^3$; $a = 0{,}5$; $m = 10$. Сплошным кривым 0, *1*, *2*, *3* соответствуют значения $c = 0$; 3,46; 7,96; 10,64 и $h = 1{,}25\cdot 10^{-4}$ (область контакта S — двусвязная, прижимающая штамп сила $P = 7{,}9\cdot 10^{-5}$). Штриховым кривым *4*, *5*, *6*, *7* соответствуют значения $c = 0$; 16,5; 26,7; 28,9 и $h = 3{,}75\cdot 10^{-4}$ (площадка контакта S — односвязная, $P = 5{,}7\cdot 10^{-4}$).

На фиг. 2 дан график функции $P = P(h)$. Точка (h_*, P_*) соответствует переходу от двусвязной области контакта к односвязной.

Автор благодарит С. А. Кравченко за проведенные вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. *Kalker J. J.* A survey of the mechanics of contact between solid bodies.— Z. angew. Math. und Mech., 1977, B. 57, H. 5, S. T3—T17.
4. *Кравчук А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров.— Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 2, с. 308—310.
5. *Кравчук А. С.* Решение контактных задач с известной функцией Грина.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 283—288.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
7. Механика деформируемых твердых тел. Направления развития: Сб.статей/Под ред. *Г. С. Шапиро.* М.: Мир, 1983. 346 с.
8. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
9. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
10. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
11. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев, Одесса: Вища школа, 1982. 167с.
12. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 236 с.
13. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.— Л.: Гостехиздат, 1949. 270с.
14. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 415 с.
15. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
16. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
17. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
18. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977. 431 с.
19. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 143 с.
20. *Вайнберг М. М.* Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979. 128 с.
21. *Галанов Б. А.* Постановка и решение некоторых уточненных задач упругого контакта двух тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 6, с. 56—63.
22. *Галанов Б. А.* О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 61—67.

Киев

Поступила в редакцию 4.XII.1984