Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 539.3 : 534.1

ПЕРЕХОДНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ КОРОТКОВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ

Попов А. Л., Чернышев Г. Н.

Рассматривается задача о резонансных коротковолновых колебаниях замкнутой эллипсоидальной упругой оболочки вращения в жидкости. Построено асимптотическое (по большому частотному параметру) решение уравнения Гельмгольца для формы акустического давления, согласованное с решениями системы уравнений относительно перемещений оболочки. Показано, что излучательная способность вибрирующей оболочки определяется положением переходных поверхностей (ПП) в жидкости и переходных линий на оболочке, отделяющих неволновую зону с интенсивным затуханием давления в окрестности оболочки, от удалённого медленно затухающего поля излучения. Исследованы закономерности движения ПП при изменениях частоты колебаний, окружного волнового числа и степени искривленности (вытянутости) оболочки. Даны оценки применимости асимптотического подхода.

Известно, что колебания оболочки вращения непостоянной кривизны в вакууме в определенных диапазонах частот происходят с образованием переходных линий, на которых меняется характер напряженно-деформированного состояния оболочки [1]. Естественно ожидать, что это свойство сохраняется и при колебаниях оболочки в жидкости, причем в силу связности форм колебаний оболочки и жидкости возникают также ПП в жидкости.

Интерес к изучению ПП в жидкости вызван стремлением к построению решения задачи, справедливого как в слое жидкости, окружающем оболочку, так и в дальнем поле. Если не учитывать излучение, то получается задача, сходная с задачей о колебаниях оболочки в несжимаемой жидкости, решение которой для давления в среде не меняет своего характера при удалении от оболочки. Эта задача эффективно решается приближенными аналитическими методами (см., например, [2]). Однако такое решение оставляет открытыми вопросы об амплитудах резонансных форм колебаний системы «оболочка—жидкость», демпфировании их за счет излучения энергии и о самом поле излучения. Ключом к решению этих вопросов в рамках приближенных методов представляется знание положения ПП как связующего звена между ближним и дальним полем давления в жидкости.

1. Рассмотрим коротковолновые квазипоперечные колебания замкнутой вытянутой эллипсоидальной оболочки вращения, погруженной в бесконечную сжимаемую жидкость, возбуждаемые нормальной периодической нагрузкой $Q(\eta)\exp i(m\beta - \omega t)$. Отделим временную компоненту $\exp(-i\omega t)$ и выпишем исходные уравнения для форм установившихся колебаний оболочки в жидкости и жидкости в сфероидальных координатах ξ, η, β $(1 \leqslant \xi < \infty,\ |\eta| \leqslant 1,\ 0 \leqslant \beta < 2\pi)$

$$h_*^2\Delta_2^2 w - \Delta_1 X - \lambda^2 w + P(\xi_0, \eta, \beta) = Q(\eta)e^{im\beta} \tag{1.1}$$

$$\Delta_2^2 X + \Delta_1 w = 0,\ \Delta P + k^2 P = 0,\ w = 2EhW$$

$$H_3^{-1}(\xi_0, \eta) P_{,\xi}|_{\xi=\xi_0} = \lambda^2 g w,\ \lambda^2 = \omega^2 \rho_0 E^{-1},\ k = \omega c^{-1}$$

$$H_3 = \frac{d}{2}\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}\right)^{1/2},\quad g = \frac{1}{2h}\frac{\rho}{\rho_0}$$

$$h_*^2 = \frac{h^2}{3(1-\nu^2)},\quad (\ )_{,\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi}(\ )$$

Здесь W, h — прогиб и полутолщина оболочки, поверхность которой в координатах ξ, η, β совпадает с координатной поверхностью $\xi = \xi_0$, E, ρ_0, ν — модуль Юнга, плотность и коэффициент Пуассона материала оболочки, ω, m — круговая частота и число волн в окружном направлении внешней вибрационной нагрузки, распределенной вдоль меридиана оболочки по закону $Q(\eta)$ X — функция напряжений, P, ρ, c — давление, плотность и скорость звука в жидкости, Δ, Δ_2 — операторы Лапласа в пространстве и на поверхности оболочки, Δ_1 — оператор Власова, d — фокусное расстояние эллипсоида $\xi = \xi_0$.

Отметим, что построение точного решения поставленной задачи в рядах по волновым сфероидальным функциям практически выполнимо лишь при малых значениях частотного параметра $p = kd/2$; с ростом p сходимость рядов резко ухудшается [3].

Ниже предлагается асимптотический способ построения интегралов исходных уравнений при больших p, соответствующих диапазону частот коротковолновых колебаний оболочки в жидкости, в котором допустимо разделение всех функций в (1.1) на две группы: медленно и быстро меняющихся по меридиональной координате η. К медленно меняющимся отнесем параметры Ламе и радиусы кривизны оболочки, к быстро меняющимся — прогиб, функцию напряжений и давление в жидкости.

Представим интегралы уравнения Гельмгольца (1.1) в виде

$$P(\xi, \eta, \beta, p) = R(\xi, \eta, p)\, S(\eta, p) \exp(im\beta) \tag{1.2}$$

с неизвестными функциями $R(\xi, \eta, p)$, $S(\eta, p)$, причем $R(\xi, \eta, p)$ считаем медленно меняющейся по координате η. Введение медленной изменяемости функции R вдоль меридиональной координаты сделано с целью удовлетворить уже в главном члене асимптотики P всем условиям (1.1) на поверхности оболочки. При полном разделении переменных это возможно только для оболочек в форме цилиндра, либо сферы.

Подставим (1.2) в соответствующее уравнение (1.1) и выполним дифференцирование с учетом медленной изменяемости части функций по переменной η. Приходим к системе уравнений относительно $S(\eta, p)$ и $R(\xi, \eta, p)$

$$\begin{gathered}(1 - \eta^2) S_{,\eta\eta} + [\varkappa(\eta) - m^2 (1 - \eta^2)^{-1} - p^2\eta^2] S = 0 \\ [(\xi^2 - 1) R_{,\xi}]_{,\xi} - [\varkappa(\eta) + m^2 (\xi^2 - 1)^{-1} - p^2\xi^2] R = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

в которую вместо константы разделения введена медленно меняющаяся функция $\varkappa(\eta)$. Решения этой квазиразделенной системы должны быть справедливы во всем пространстве, занятом жидкостью, включая поверхность оболочки, на которой необходимо их согласование с решениями системы (1.1)

Рассмотрим сначала согласование осциллирующих в меридиональном направлении интегралов системы (1.1), (1.3). С приближением частоты вынуждающей силы к резонансной частоте системы оболочка — жидкость эти интегралы в основном определяют форму колебаний замкнутой оболочки, а на резонансной частоте фактически совпадают с ней. При этом уменьшается влияние самой силы на форму колебаний и поле излучения; на резонансной частоте вклад в излучение от формы колебаний может оказаться преобладающим.

В случае колебаний вытянутой эллипсоидальной оболочки вращения условие осцилляции по меридиану оболочки выполняется, прежде всего, в менее искривленной экваториальной области (вблизи $\eta = 0$). Считаем, что это относится и к соответствующим интегралам первого уравнения (1.3) на поверхности оболочки. Поэтому при построении осциллирующих интегралов системы (1.3) функция разделения $\varkappa(\eta)$ должна отыскиваться в классе комплексных функций, удовлетворяющих условиям

(1.4) $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2,\ \varkappa_1(0) - m^2 > 0,\ |\varkappa_2(0)|/\varkappa_1(0) \ll 1$

При $|\eta| > 0$ характер интегралов $S(\eta, p)$ останется преимущественно осциллирующим вплоть до значений $\eta = \pm\eta_*$, обращающих в нуль действительную часть коэффициента у S в (1.3)

(1.5) $\varkappa_1(\eta_*) - m^2(1 - \eta_*^2)^{-1} - p^2\eta_*^2 = 0$

При $|\eta| > \eta_*$ интегралы $S(\eta, p)$ станут быстро затухающими. Значения $\eta = \pm\eta_*$ являются точками поворота для первого уравнения (1.3).

Параллельно с условиями (1.4), (1.5), поставим также требование обращения в нуль действительной части коэффициента при недифференциальном члене во втором уравнении (1.3) на некотором множестве значений η из интервала $[-1, 1]$:

(1.6) $\varkappa_1(\eta) + m^2[\xi_*^2(\eta) - 1]^{-1} - p^2\xi_*^2(\eta) = 0$

Это требование задает точки поворота во втором уравнении (1.3) и устанавливает связь между $\varkappa_1(\eta)$ и некоторой поверхностью $\xi = \xi_*(\eta) > \xi_0$, называемой в дальнейшем переходной поверхностью (ПП). ПП будут также поверхности $\eta = \pm\eta_*$.

С учетом соотношений (1.5), (1.6) уравнения (1.3) приводим к виду уравнений с одним большим параметром p

(1.7)
$$
\begin{gathered}
(1 - \eta^2) S_{,\eta\eta} + [p^2\varphi_1(\eta) + i\varkappa_2(\eta)] S = 0 \\
[(\xi^2 - 1) R_{,\xi}]_{,\xi} - [p^2\varphi_2(\xi, \eta) + i\varkappa_2(\eta)] R = 0 \\
\varphi_1 = (\xi_*^2(\eta) - \eta^2)[1 - \varphi_*/(1 - \eta^2)(\xi_*^2(\eta) - 1)] \\
\varphi_2 = (\xi_*^2(\eta) - \xi^2)[1 + \varphi_*/(\xi^2 - 1)(\xi_*^2(\eta) - 1)] \\
\varphi_* = (1 - \eta_*^2)(\xi_*^2(\eta_*) - 1),\quad p^2\varphi_* = m^2
\end{gathered}
$$

При любых η, ξ из области их определения первое уравнение (1.7) может иметь не более двух точек поворота, а второе — не более одной.

Рассмотрим решение второго уравнения (1.7), задающего характер излучающей компоненты давления в жидкости при удалении от оболочки. Равномерная асимптотика решения $R(\xi, \eta, p)$, согласно [4], ищется при помощи линейно-независимых функций Эйри Ai, Bi, аргументы которых и весовые функции перед ними определяются из рекуррентной системы уравнений при различных степенях большого параметра p. Решение $R(\xi, \eta, p)$ должно также удовлетворять условию излучения на бесконечности и условию ограниченности в полюсах сфероидальной системы координат. Опуская промежуточные выкладки, выполненные по типу [4], выпишем главный член асимптотики $R(\xi, \eta, p)$

(1.8)
$$
\begin{gathered}
R(\xi, \eta, p) = \Phi(\xi, \eta)[\mathrm{Bi}(p^{2/3}\Psi) - i\,\mathrm{Ai}(p^{2/3}\Psi)] + O(p^{-1}) \\
\Psi(\xi, \eta) = \operatorname{sign}(\xi_*(\eta) - \xi)\left(\frac{3}{2}\int_{\xi}^{\xi_*(\eta)} f_2^{1/2}(\xi, \eta)\, d\xi\right)^{2/3} \\
\Phi(\xi, \eta) = [(\xi^2 - 1)\Psi_{,\xi}(\xi, \eta)]^{-1/2},\quad f_2 = \varphi_2(\xi, \eta)(\xi^2 - 1)^{-1}
\end{gathered}
$$

(ветви выбраны так, что $(-1)^{2/3} = 1$).

Из формул (1.8) видно, что при переходе через значения $\xi = \xi_*(\eta)$ аргументы функций Эйри меняют свой знак с положительного при $\xi < \xi_*(\eta)$ ($|\eta| < \eta_*$) на отрицательный при $\xi > \xi_*(\eta)$, что приводит к изменению асимптотики этих функций: при положительном аргументе с ростом его модуля функция Bi возрастает, а Ai убывает по закону, близкому к экспоненциальному; при отрицательном аргументе обе функции осциллируют с медленным затуханием.

Подставим решение (1.2) с учетом (1.8) в условие непротекания (1.1). Получим связь между давлением на поверхности оболочки и прогибом

$$(1.9)\qquad P(\xi_0, \eta, \beta) = -\lambda^2\mu(\eta)\, w(\eta, \beta),$$
$$\mu(\eta) = -gH_3(\xi_0, \eta)\,[R_{,\xi}(\xi, \eta)/R]^{-1}_{\xi=\xi_0}$$

Если поверхность $\xi = \xi_*(\eta)$ находится не слишком близко к оболочке, формуле (1.9) для коэффициента $\mu(\eta)$ можно придать более простой вид

$$(1.10)\qquad \mu(\eta) = \frac{gH_3(\xi_0, \eta)}{pf_2^{1/2}(\xi_0, \eta)}(1 + i\varepsilon(\eta)), \qquad \varepsilon = 4\exp\left(-2p\int\limits_{\xi_0}^{\xi_*(\eta)} f_2^{1/2}(\xi, \eta)\, d\xi\right)$$

Назовем $\mu(\eta)$ комплексным коэффициентом присоединенной массы жидкости. Действительная его часть в асимптотической формуле (1.10) определяется отношением экспоненциально затухающей компоненты решения (1.8) к ее производной на поверхности оболочки. Такой же результат получается и при рассмотрении колебаний оболочки в жидкости без учета излучения, когда коэффициент присоединенной массы, соответствующий осциллирующим интегралам w,— действительная функция от η. Следовательно, величина мнимой части μ в формуле (1.10) характеризует (в пределах применимости этой формулы, т. е. при $\varepsilon \ll 1$) излучательную способность формы колебаний оболочки и зависит от положения ПП $\xi = \xi_*(\eta)$ и $\eta = \pm\eta_*$ в жидкости.

2. Определим диапазон частот, в котором справедливо представление комплексной присоединенной массы жидкости в виде (1.10), и закономерности «движения» ПП $\xi = \xi_*(\eta)$ и $\eta = \pm\eta_*$ в этом диапазоне при изменении частоты колебаний. Для этого выполним условие совместности форм коротковолновых колебаний оболочки и жидкости.

Запишем уравнение Гельмгольца в коротковолновом приближении на поверхности оболочки

$$\Delta_2 P + H_3^{-2}P_{,\xi\xi} + k^2 P = 0, \ \xi = \xi_0$$

Заменяя в нем вторую производную по ξ через недифференциальные члены и используя (1.2), (1.7), получим

$$(2.1)\qquad \Delta_2 P + s(\eta)\, P = 0, \ s(\eta) = a^2(\eta) + k^2 + i\delta(\eta)$$
$$a^2 = p^2 f_2(\xi_0, \eta)\, H_3^{-2}(\xi_0, \eta), \ \delta = \varkappa_2(\eta)\, H_3^{-2}(\xi_0, \eta)\,(\xi_0^2 - 1)^{-1}$$

Заметим, что в рамках коротковолновых приближений уравнение (2.1) эквивалентно первому уравнению (1.7).

Вследствие пропорциональности между интегралами $P(\xi_0, \eta, \beta)$ и $w(\eta, \beta)$, на поверхности $\xi = \xi_0$ должны одновременно выполниться три уравнения относительно двух функций — w и X: это первые два уравнения (1.1), в которых $P(\xi_0, \eta, \beta)$ заменено через w, и уравнение (2.1). Условием их совместности является характеристическое уравнение (R_1, R_2 — главные радиусы кривизны оболочки)

$$(2.2)\qquad \{h_*^2 s^2 - \lambda^2[1 + ga^{-1}(1 + i\varepsilon)]\}\, s^2 + (m^2 k_2 H_{20}^{-2} - sR_2^{-1})^2 = 0$$
$$k_2 = R_2^{-1} - R_1^{-1}, \ H_{20}^2 = (d/2)^2(1 - \eta^2)(\xi_0^2 - 1)$$

Выразив в (2.2) характеристический показатель $s(\eta)$ через параметр $a(\eta)$, получим алгебраическое уравнение 9-й степени относительно этого параметра. Так как функция $a(\eta)$, по определению, должна быть действительной, то между δ и ε установим связь

$$\delta = \lambda^2 g a^{-1} s_0^2 \varepsilon \varphi^{-1}(a), \quad s_0^2 = a^2 + k^2,$$
$$\varphi(a) = 2\left[2h_*^2 s_0^3 - \lambda^2 s_0 (1 + g a^{-1}) - R_2^{-1}(m^2 k_2 H_{20}^{-2} - s_0 R_2^{-1})\right]$$

Тогда $a(\eta)$ определится как действительный положительный корень уравнения (2.2) при $\varepsilon = \delta = 0$. Единственность положительного корня $a = a_1 > 0$ следует из анализа, проведенного в работе [2], где было получено аналогичное уравнение (с нулевыми значениями ε и δ) при учете только быстро затухающих у поверхности оболочки компонент функции давления в жидкости.

Таким образом, при малых ε имеется возможность определения координат ПП через положительный корень a_1 алгебраического уравнения 9-й степени, полученного без учета излучения. Считая этот корень известным в каждой точке меридиана оболочки при заданной частоте колебаний ω и окружном волновом числе m, превращаем третье равенство (2.1) в квадратное уравнение относительно $\xi_*^2(\eta)$:

$$x^2 - [1 + b_1(\eta) - c_1]\, x + b_1(\eta) - \xi_0^2 c_1 = 0, \quad x = \xi_*^2(\eta) \tag{2.3}$$
$$b_1(\eta) = \xi_0^2 + (a_1(\eta)/k)^2 (\xi_0^2 - \eta^2), \quad c_1 = m^2 p^{-2} (\xi_0^2 - 1)^{-1}$$

Определив $\xi_*^2(\eta)$, находим η_* как положительный корень трансцендентного уравнения

$$(1 - \eta_*^2)[\xi_*^2(\eta_*) - 1] - (m/p)^2 = 0 \tag{2.4}$$

на интервале $[0, 1]$. После этого могут быть найдены значения $\varepsilon(\eta)$ и по их величине сделан вывод о применимости формулы (1.10), Если в некоторой области изменения координаты η величина $\varepsilon(\eta)$ будет порядка единицы, то для решения исходной задачи в этой области необходимо использовать более общее представление (1.9).

Полученные соотношения принимают наиболее простой вид в случае осесимметричных колебаний. Функция $f_2(\xi, \eta)$ становится равной $|\xi_*^2(\eta) - \xi^2| / (\xi^2 - 1)$, а интеграл от нее в показателе экспоненты (1.10) сводится к разности эллиптических интегралов первого и второго рода. Характеристическое уравнение (2.2) при $m = \varepsilon = 0$ преобразуется к уравнению пятой степени относительно a

$$[h_*^2 (a^2 + k^2)^2 - (\lambda^2 - R_2^{-2})]\, a - \lambda^2 g = 0 \tag{2.5}$$

ПП $\eta = \pm\eta_*$ в случае осесимметричных колебаний отсутствуют; для $\xi_*(\eta)$ получается выражение

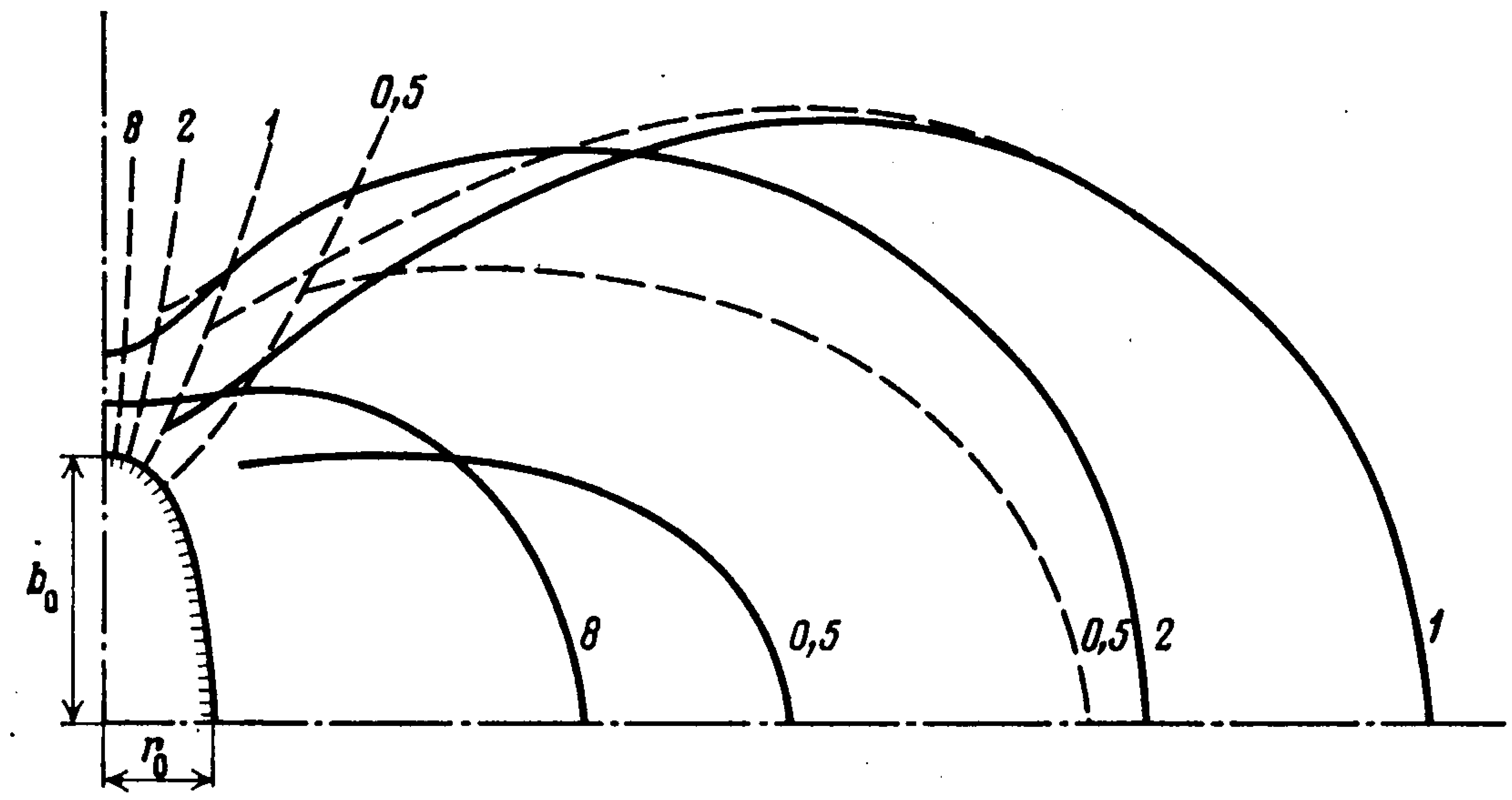
$$\xi_*(\eta) = [\xi_0^2 + (a_1(\eta)/k)^2 (\xi_0^2 - \eta^2)]^{1/2} \tag{2.6}$$

Оно описывает симметричный овалоид вращения, касающийся в экваториальной плоскости эллипсоида $\xi_* = \xi_0 [1 + (a_1(0)/k)^2]^{1/2}$, а в вершинах — эллипсоида $\xi_* = \xi_0 [1 + (a_1(1)/k)^2 (r_0/b_0)^2]^{1/2}$, где $r_0 = R_2(0)$ — радиус экватора; b_0 — большая полуось оболочки.

Из (2.5) и (2.6) видно, что при любой фиксированной частоте колебаний положительный корень a_1 имеет максимум на экваторе оболочки (в соответствии с максимумом кривизны $R_2^{-1}(\eta)$) и плавно убывает к полюсам оболочки, «поджимая» к ним (дополнительно отношению $r_0/b_0 < 1$) ПП $\xi = \xi_*(\eta)$. Следовательно, общим свойством ПП в жидкости при осесимметричных колебаниях является существенно большая отдаленность их от экватора эллипсоидальной оболочки, чем от ее полюсов.

С ростом частоты колебаний уменьшается влияние кривизны оболочки на корень a_1 уравнения (2.5). Тем самым снимается дополнительное поджатие ПП к полюсам оболочки. Неодинаковость расстояний между ПП и оболочкой в полюсах и на экваторе сохранится исключительно из-за несферичности оболочки: чем больше вытянута оболочка, тем ближе ПП подходит к ее полюсам.

С уменьшением разности $\xi_*(\eta) - \xi_0$ (при фиксированной частоте колебаний) возрастает величина $\varepsilon(\eta)$. Как следует из асимптотики решения (1.8), давление в жидкости, вызванное колебаниями оболочки, интенсивно



затухает в области между оболочкой и ПП. За ПП оно преобразуется в осциллирующую с медленным затуханием комплексную функцию — давление излучения. Поэтому, зная при заданной частоте колебаний расстояние от точек меридиана оболочки до ПП в жидкости, или величину мнимой части комплексного коэффициента присоединенной массы (ε), можно определить степень снижения амплитуды давления в жидкости к моменту его преобразования в давление излучения.

Из сказанного ясно, что при осесимметричных колебаниях наибольшее излучение исходит от областей поверхности оболочки, примыкающих к ее полюсам. С уменьшением частоты колебаний и (или) увеличением вытянутости оболочки контраст между излучением от полюсов и от экваториальной области оболочки усиливается. С ростом частоты происходит выравнивание поля излучения от отдельных участков поверхности оболочки.

Сделанные выводы согласуются с известным физическим представлением о связи между длиной волны упругой деформации и излучением в области экватора, где жесткость оболочки минимальна, длина волны деформации также меньше, чем в полюсной области. Соответственно меньшим должно быть и излучение от экваториальной области оболочки.

В качестве примера рассчитаны координаты ПП при осесимметричных колебаниях стальной эллипсоидальной оболочки вращения с $r_0/b_0 = 0{,}4$, $2h/r_0 = 0{,}01$ в воде на частотах, связанных с кривизной экватора оболочки равенствами $\lambda r_0 = n$, $n = 0{,}5$; 1; 2; 8. Результаты представлены на фигуре. Положения ПП $\xi = \xi_*(\eta)$ при $n = 0{,}5$; 1; 2; 8 показаны сплошными линиями с соответствующими обозначениями. Контур меридионального сечения оболочки отделён наклонным штрихом. Вследствие симметрии картины, изображена только четверть сечения. Для контроля применимости асимптотической формулы (1.10) рассчитывались также величины $\varepsilon = \varepsilon(n, \eta)$. В областях, где нарушалось условие $\varepsilon \ll 1$, ПП не строились (на фигуре — это области вблизи полюсов оболочки для кривых с $n = 0{,}5$ и 1). В этих областях почти полностью отсутствуют зоны экспоненциального затухания. Поэтому можно считать, что поведение давления, характерное для дальнего поля, наблюдается здесь непосредственно с поверхности оболочки и применять для коэффициента присоединенной массы жидкости формулу

$$\mu|_{\eta\approx 1} = p^{-2/3} g(d/2)(2\xi_0)^{-1/3} \operatorname{Ai}(0)[\operatorname{Ai}'(0)]^{-1} e^{i\pi/3}$$

При неосесимметричных колебаниях расположение ПП $\xi = \xi_* (\eta)$ в районе экватора для частот, выше или равных «кольцевой» ($n \geqslant 1$), не отличается от осесимметричного случая; на частотах ниже кольцевой она удалена от экватора на большее расстояние. Это иллюстрируют штриховые кривые, построенные на фигуре для формы колебаний оболочки с тремя волнами по параллели. Вблизи вершин оболочки при $m \neq 0$ образуется ПП $\eta = \pm\eta_*$ (двухполостной гиперболоид вращения), которая пересекает оболочку по переходным линиям. Положения ПП $\eta = \pm\eta_*$ при $m = 3$ и $n = 0{,}5$; $1; 2$; 8 также показаны на фигуре штриховыми линиями. Поверхность $\eta = \pm\eta_*$ изолирует вершины оболочки, создавая области звуковой тени в полостях гиперболоидов вращения. Наибольшее излучение при неосесимметричной форме колебаний возникает от участков поверхности оболочки, примыкающих к гиперболоиду $\eta = \pm\eta_*$ со стороны экватора, для которых расстояние между оболочкой и ПП $\xi = \xi_* (\eta)$ минимальное.

Как следует из (2.4), с ростом изменяемости формы колебаний в окружном направлении расширяется неизлучающая область на поверхности оболочки. Напротив, увеличение частоты колебаний при фиксированном числе волн по параллели m перемещает ПП $\eta = \pm\eta_*$ к вершинам эллипсоида.

Вопросы построения интегралов системы уравнений (1.3), соответствующих комплексным значениям $\varkappa$, отличным от (1.4), здесь не затронуты. Они строятся указанным выше способом, но значительно проще: для них нет необходимости определять зависимость параметра разделения переменных $\varkappa$ от η. Достаточно считать величину $\varkappa$ постоянной. Указанные интегралы используются при построении решений краевых задач и, как правило, локализуются у границ оболочки, линий приложения нагрузок и подкреплений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979, 383 с.
2. *Попов А. Л., Чернышев Г. Н.* Коротковолновые колебания замкнутой оболочки в жидкости, возбуждаемые окружной нормальной силой.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 228—237.
3. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наук. думка, 1964. 103 с.
4. *Дородницын А. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка.— Успехи матем. наук, 1952, т. 7, вып. 6, с. 3—96.

Москва

Поступила в редакцию
23.X.1984