

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОГО И ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ, ЧАСТИЧНО СЦЕПЛЕННОГО С ЖЕСТКОЙ ОБОЙМОЙ

Гриценко С. И.

Рассматривается плоская задача о сдвиге-вибрации бесконечной жесткой накладкой вязкоупругого слоя, частично сцепленного с недеформируемой накладкой-основанием: жестко по полосе ширины $2a$ и контактирующего без трения вне этой полосы. Кроме того, рассматривается аналогичная осесимметричная задача для цилиндрического вязкоупругого слоя. По одной поверхности слой частично сцеплен с обоймой: жестко по полосе ширины $2a$ и без трения вне этой полосы, по другой поверхности он жестко сцеплен с вибрирующей в осевом направлении обоймой.

Смешанные краевые задачи приводятся к решению интегрального уравнения первого рода, которое в свою очередь сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Приводятся некоторые результаты численного решения поставленных задач. Сравняются решения вязкоупругой и соответствующей упругой задачи. Для последней произведено сравнение эффективности двух методов решения интегрального уравнения: сведения к бесконечной системе и аппроксимации его ядра.

1. Рассмотрим плоскую задачу об установившихся колебаниях вязкоупругого слоя $0 \leq z \leq h$, $|x| < \infty$, лежащего на недеформируемом основании $z = 0$. Слой жестко сцеплен с основанием по полосе $|x| \leq a$ ширины $2a$ и контактирует без трения вне этой полосы. По всей верхней границе $z = h$ слой жестко сцеплен с вибрирующей в касательном направлении недеформируемой накладкой (задача А). Краевые условия задачи А имеют вид

$$\begin{aligned} u_x(x, h, t) &= U_0 e^{-i\omega t}, \quad u_z(x, h, t) = 0 \\ u_z(x, 0, t) &= 0, \quad |x| < \infty \\ u_x(x, 0, t) &= 0, \quad |x| \leq a; \quad \tau_{xz}(x, 0, t) = 0, \quad |x| > a \end{aligned}$$

Наряду с задачей А рассмотрим аналогичную осесимметричную задачу для вязкоупругого цилиндрического слоя $R_0 \leq r \leq R_h$, $|x| < \infty$ (третья цилиндрическая координата z заменена здесь на x для единообразия дальнейших выкладок). По внутренней поверхности $r = R_0$ цилиндрический слой жестко сцеплен с неподвижной недеформируемой обоймой по полосе $|x| \leq a$ ширины $2a$ и соприкасается с ней без трения вне полосы. По всей внешней поверхности $r = R_h$ цилиндрический слой жестко сцеплен с вибрирующей в осевом направлении недеформируемой обоймой (задача Б1). Краевые условия задачи Б1 имеют вид

$$\begin{aligned} u_x(R_h, x, t) &= U_0 e^{-i\omega t}, \quad u_r(R_h, x, t) = 0 \\ u_r(R_0, x, t) &= 0, \quad |x| < \infty \\ u_x(R_0, x, t) &= 0, \quad |x| \leq a; \quad \tau_{rx}(R_0, x, t) = 0, \quad |x| > a \end{aligned}$$

Рассмотрим также задачу Б2, отличающуюся от задачи Б1 взаимной перестановкой граничных условий на внутренней и внешней поверхностях цилиндрического слоя. Граничные условия такой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u_x(R_0, x, t) &= U_0 e^{-i\omega t}, \quad u_r(R_0, x, t) = 0 \\ u_r(R_h, x, t) &= 0, \quad |x| < \infty \\ u_x(R_h, x, t) &= 0, \quad |x| \leq a; \quad \tau_{rx}(R_h, x, t) = 0, \quad |x| > a \end{aligned}$$

Соответствующие упругие смешанные краевые задачи интегральным преобразованием Фурье по координате x приводятся к интегральному уравнению первого рода относительно амплитудных значений касательных контактных напряжений $T(x)$ на участке сцепления $|x| \leq a$

$$(1.1) \quad \int_{-a}^a k(x - \xi) T(\xi) d\xi = 2\pi U_0 \Delta f(\kappa_2), \quad |x| \leq a$$

Здесь

$$(1.2) \quad k(t) = \int_{\Gamma} K(u) e^{iut} du, \quad K(u) = \frac{M(u)}{N(u)}$$

$$N(u) = \sigma_1 (u^2 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2)$$

$$M(u) = u^2 \sigma_1 \sigma_2 (\operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2 - 1) -$$

$$- \left(u^4 - u^2 \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2} + \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2}{2} \right) \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2$$

$$f(\kappa_2) = - \frac{\kappa_2^2}{\cos \kappa_2}, \quad \Delta = \frac{G}{2h}, \quad \sigma_j = \sqrt{u^2 - \kappa_j^2}, \quad j = 1, 2$$

$$\kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2 h^2}{G}, \quad \kappa_1^2 = \kappa_2^2 \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (\text{задача А})$$

$$N(u) = \sigma_1 (\sigma_1 \sigma_2 L_{111}^- L_{210}^+ - u^2 L_{100}^+ L_{211}^-)$$

$$M(u) = u^2 \sigma_1 \sigma_2 (L_{210}^+ L_{101}^+ + L_{110}^+ L_{201}^+) -$$

$$- u^4 L_{100}^- L_{211}^- - \sigma_1^2 \sigma_2^2 L_{200}^- L_{111}^- - 2u^2 \beta^{-1}$$

$$L_{jmn}^{\pm} = I_m(\sigma_j) K_n(\sigma_j \beta) \pm I_n(\sigma_j \beta) K_m(\sigma_j)$$

$$f(\kappa_2) = 2\kappa_2 \pi^{-1} (J_0(\kappa_2 \beta) N_1(\kappa_2) - J_1(\kappa_2) N_0(\kappa_2 \beta))^{-1}$$

$$\Delta = \frac{G}{R_0}, \quad \beta = \frac{R_h}{R_0}, \quad \sigma_j = \sqrt{u^2 - \kappa_j^2}, \quad j = 1, 2$$

$$\kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2 R_0^2}{G}, \quad \kappa_1^2 = \kappa_2^2 \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (\text{задача Б1})$$

Функции $M(u)$, $N(u)$, $f(\kappa_2)$ задачи Б2 отличаются от соответствующих функций задачи Б1 взаимной заменой

$$Z_w(\sigma_j) \rightleftharpoons Z_w(\sigma_j \beta), \quad j = 1, 2; \quad w = 0, 1$$

где $Z_w(z)$ означает любую из функций Бесселя $I_w(z)$, $K_w(z)$, $J_w(z)$, $N_w(z)$.

В формулах (1.2) ρ — плотность, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона упругого материала слоя, ω — круговая частота.

Функция $K(u)$ упругой задачи четная, вещественная на вещественной оси и мероморфная в комплексной плоскости. Имеет место представление

$$(1.3) \quad K(u) = K(0) \prod_{n=1}^{\infty} (u^2 - \zeta_n^2)(u^2 - z_n^2)^{-1}$$

где ζ_n, z_n — соответственно нули и полюсы функции $K(u)$ из верхней полуплоскости, модули которых монотонно возрастают с ростом номера, обеспечивая сходимость бесконечного произведения (1.3). Конечное число нулей и полюсов может лежать на вещественной оси. Контур интегрирования Γ выбирается в соответствии с условиями излучения, как в [1]. Отметим также, что при $|u| \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$(1.4) \quad K(u) = \gamma |u|^{-1} + O(|u|^{-3})$$

причем для задачи А $\gamma = -1/8 \kappa_2^2 (3 - 4\nu)(1 - \nu)^{-1}$.

Интегральное уравнение вязкоупругой задачи в случае установившихся гармонических колебаний

$$(1.5) \quad \sigma(t) = \sigma_0 e^{-i\omega t}, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-i\omega t}$$

может быть получено формально из (1.1) путем замены упругих модулей комплексными вязкоупругими модулями [2]. Не нарушая общности, ограничимся в дальнейшем трехконстантным законом линейного деформирования [2]

$$(1.6) \quad G(t) = G_0 + G_1 e^{-t/t_1}$$

Здесь G_0 — длительный модуль сдвига, G_1 — мгновенный модуль сдвига, t_1 — время релаксации. Будем также предполагать, что коэффициент Пуассона — постоянная величина.

Выражение для вещественной и мнимой части комплексного модуля $G^*(\omega)$, соответствующего выбранной функции релаксации (1.6), получаются путем подстановки (1.5) и (1.6) в определяющие соотношения линейной вязкоупругости

$$(1.7) \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau$$

Выполняя интегрирование в (1.7), приходим к соотношению

$$\sigma_0 e^{-i\omega t} = G^*(\omega) \varepsilon_0 e^{-i\omega t}$$

$$\operatorname{Re} G^*(\omega) = G_0 + \frac{p^2}{1+p^2} G_1, \quad \operatorname{Im} G^*(\omega) = -\frac{p}{1+p^2} G_1; \quad p = \omega t_1$$

Аналогично могут быть найдены компоненты комплексного модуля в случае других законов линейного деформирования.

Функция $K(u)$ вязкоупругой задачи ($0 < p < \infty$) четная, мероморфная в комплексной плоскости. Для $K(u)$ имеет место представление (1.3) и оценка (1.4). Вместе с тем эта функция комплекснозначная на вещественной оси и не имеет вещественных нулей и полюсов. Контур Γ в этом случае совпадает с вещественной осью.

2. Перейдем к решению интегрального уравнения (1.1). Для решения упругой и вязкоупругой задачи будем применять один и тот же метод. Следуя [3] и учитывая четность искомого решения, будем разыскивать его в виде

$$(2.1) \quad T(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2B_n e^{i\zeta_n a} \operatorname{ch} i\zeta_n x$$

Здесь B_0, B_n — постоянные, подлежащие определению, ζ_n — нули функции $K(u)$ из верхней полуплоскости.

Удовлетворяя уравнению (1.1) прямой подстановкой в него ряда (2.1) [4], приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных B_0 и B_n (в матричной форме)

$$(2.2) \quad AB = CB + D$$

$$A = \{a_{mn}\} = \{(z_m - \zeta_n)^{-1}\}, \quad B = \{B_n\}, \quad C = \{c_{mn}\}$$

$$c_{mn} = -\exp(2ia\zeta_n) (z_m + \zeta_n)^{-1}, \quad D = \{d_m\} = \{-B_0/z_m\}$$

$$m = 1, 2, \dots$$

$$B_0 = U_0 \Delta f(\kappa_2) / K(0) = 2U_0 \Delta \kappa_2 / \sin \kappa_2 \quad (\text{задача А})$$

$$B_0 = 2U_0 \pi^{-1} \Delta [J_0(\kappa_2) N_0(\kappa_2 \beta) - J_0(\kappa_2 \beta) N_0(\kappa_2)]^{-1} \quad (\text{задача Б1})$$

Полученную систему первого рода с сингулярной матрицей необходимо регуляризовать, т. е., обращая сингулярную часть, привести к системе второго рода

$$(2.3) \quad B = A^{-1}CB + A^{-1}D$$

В работе [3] рассмотрено обращение матрицы A и приведены формулы для нахождения обратной матрицы A^{-1} , которые здесь не выписываются. Там же показано, что система (2.3) будет квазивполне регулярной.

Перемещения поверхности слоя вне участка жесткого сцепления могут быть найдены по формуле

$$(2.4) \quad u(x, 0, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi\Delta\kappa_2^2} \left[-U_0 f(\kappa_2) + \int_{-a}^a k(x - \xi) T(\xi) d\xi \right], \quad |x| > a$$

Подставляя (2.1) в (2.4) и выполняя интегрирование, получим

$$(2.5) \quad u(x, 0, t) = -\frac{U_0 f(\kappa_2) e^{-i\omega t}}{2\pi\Delta\kappa_2^2} + \frac{B_0}{\Delta\kappa_2^2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp [i(z_m(x - a) - \omega t)]$$

$$A_m = \frac{M(z_m)}{N'(z_m)} \left[-\frac{1}{z_m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{B_0} \left(\frac{\exp(2ia\zeta_n)}{\zeta_n - z_m} - \frac{1}{\zeta_n + z_m} \right) \right]$$

Таким образом, для вычисления перемещений по формуле (2.5) необходимо знать решение бесконечной системы (2.3).

3. В качестве численного примера рассмотрим решение вязкоупругой задачи A при следующих значениях параметров:

$$(3.1) \quad \frac{\rho\omega^2 h^2}{G_0} = \kappa_2^0 = 4,5, \quad \frac{G_1}{G_0} = 1, \quad \lambda = \frac{a}{h} = 0,25, \quad U_0 = 1$$

Для вычисления контактных напряжений по формуле (2.1) необходимо определить неизвестные постоянные B_0, B_n , решив систему уравнений (2.3). Для этого в первую очередь требуется найти нули и полюсы функции $K(u)$, лежащие в верхней полуплоскости. Их положение существенно зависит от значения параметра $p = \omega t_1$. На фиг. 1 показаны траектории движения первых трех нулей и полюсов функции $K(u)$ при изменении параметра p от нуля (светлая точка) до бесконечности (крестик). Стрелка указывает направление роста p , конец стрелки соответствует значению $p = 0,1$, темная точка — значению $p = 1$. Видно, что положение нулей и полюсов наиболее сильно зависит от p при малых его значениях. Ноль и полюс, вещественные при $p = 0$ (упругая задача), уже при $p = 0,1$ располагаются сравнительно далеко от вещественной оси, что приводит к уменьшению безразмерных контактных напряжений $T(x)/B_0$.

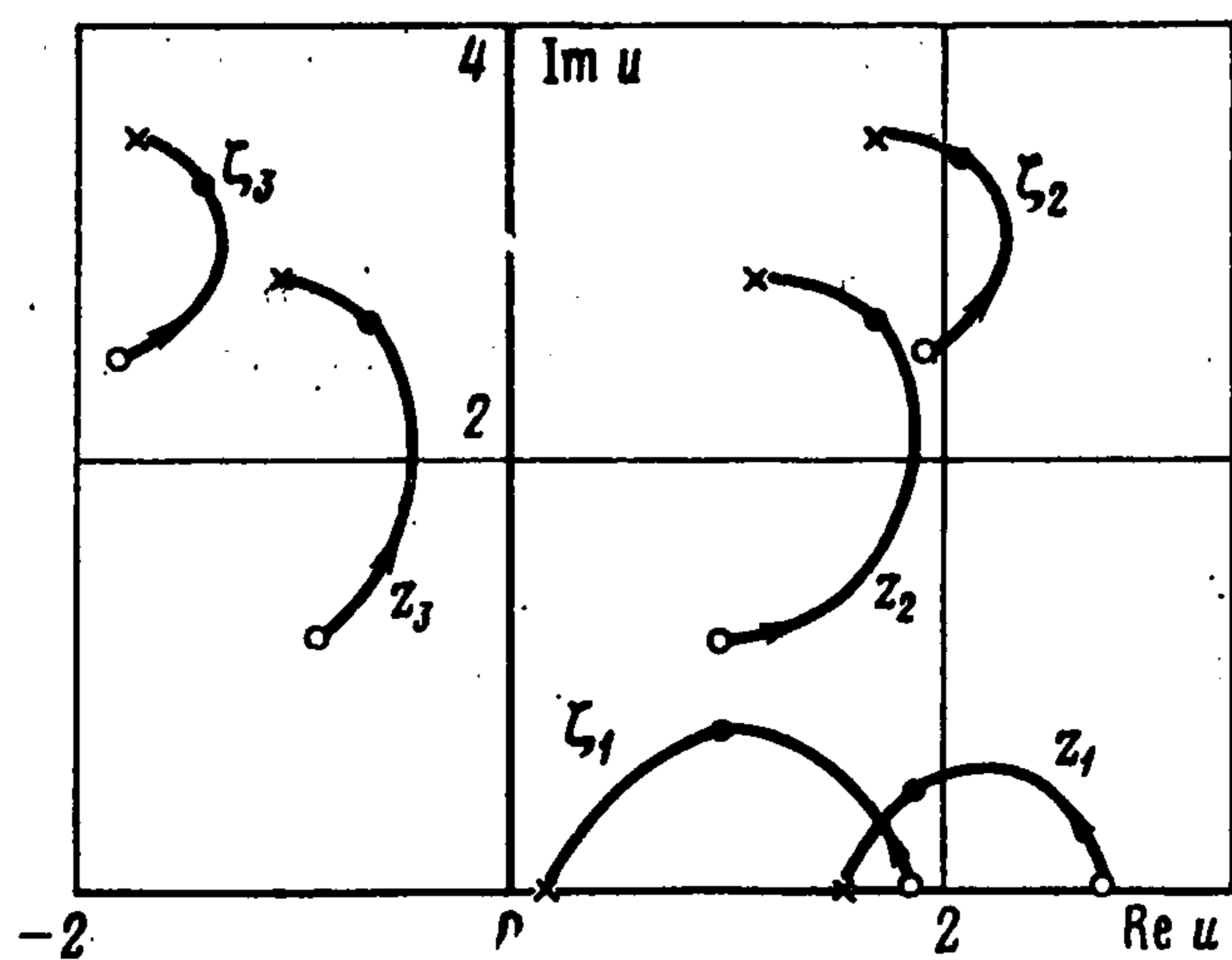
Зная ζ_n и z_n , можно найти B_0 и B_n из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.3). Для ее решения можно использовать метод редукции, эффективный при малых значениях геометрического параметра λ . Метод можно использовать и при больших λ , увеличивая число уравнений.

Для численного решения системы (2.2) ее не обязательно приводить к виду (2.3), что приводит к громоздким формулам, а решать непосредственно в виде (2.2). Численный эксперимент показал, что решения системы (2.3) методом итераций и системы (2.2) методом Гаусса с выбором главного элемента практически совпадают. Этот факт был отмечен и в [5].

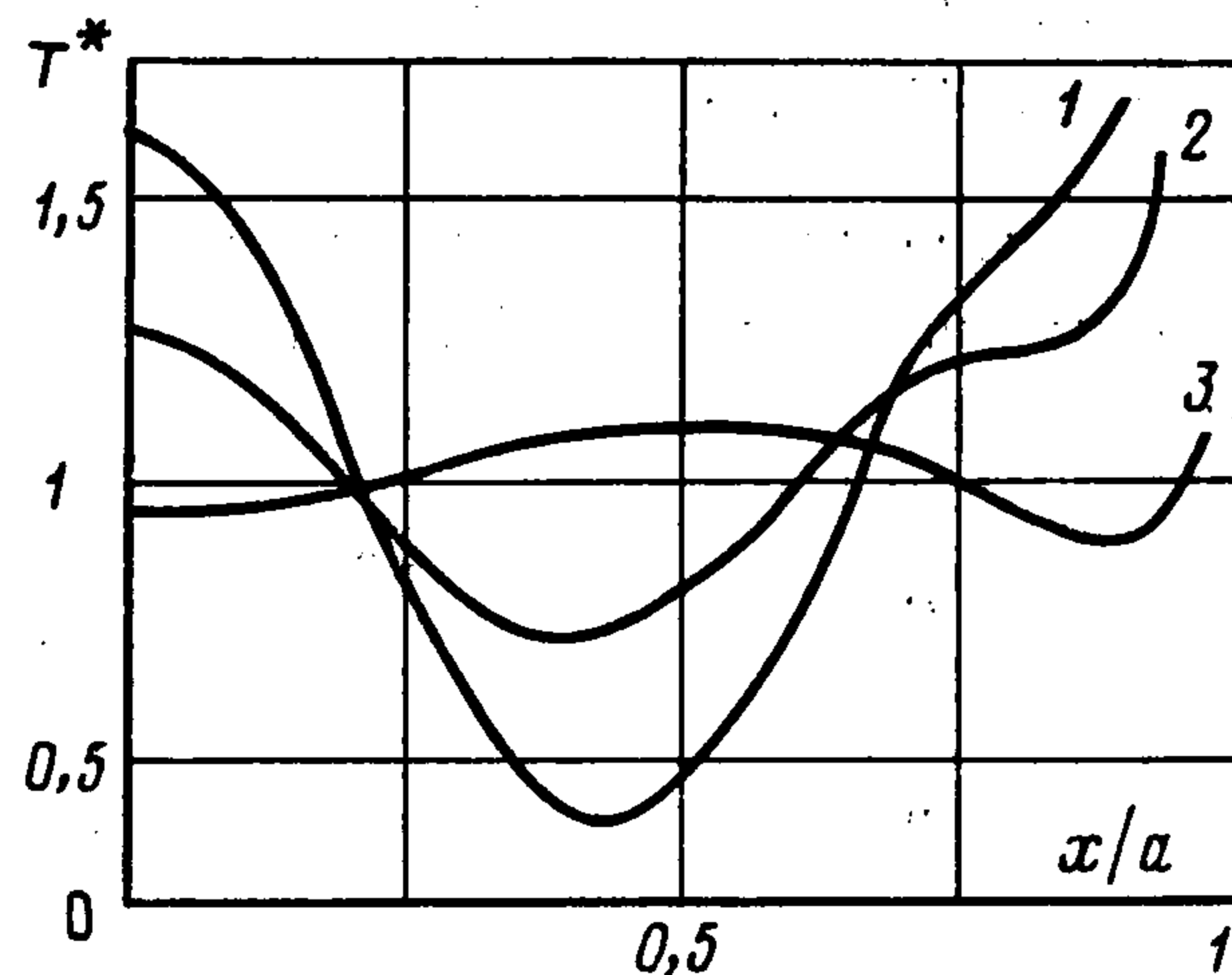
На фиг. 2 приведены графики вещественной части безразмерных контактных напряжений $T^*(x) = \text{Re}[T(x)/B_0]$ для $p = 0; 0,05; 0,5$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). При увеличении параметра p от 0 до 0,5 амплитуда $T^*(x)$ сильно уменьшается, при $p \in [0,5; 1]$ меняется незначительно, а при возрастании p до ∞ несколько увеличивается. При $p = \infty$ снова приходим к упругой задаче. При проведении вычислений для построения графиков фиг. 2 система (2.2) урезалась до 20-го порядка, что позволило найти $T^*(x)$ с точностью 0,5% при $|x| \leq 0,8$.

На фиг. 3 представлена зависимость $T_0 = |T^*(0)|$ от безразмерной частоты κ_2^0 в случае $\lambda \leq 1$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $p = 0,15; 0,5; 2$. Видно, что с увеличением параметра p резонансные частоты сдвигаются вправо.

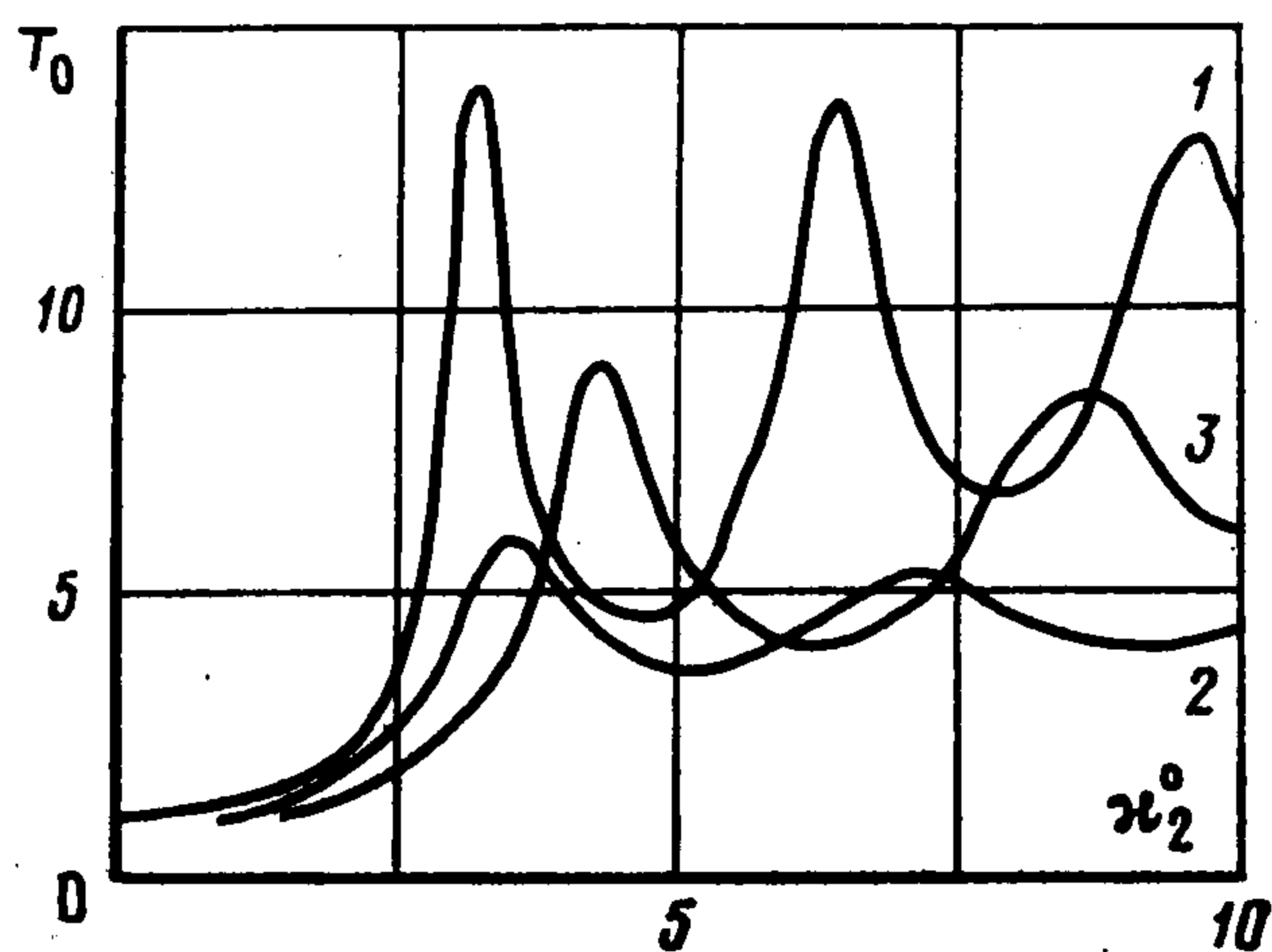
4. Для упругой задачи возможен другой метод решения интегрального уравнения (1.1), основанный на аппроксимации функции $K(u)$ другой функцией $K^*(u)$ [3], нули и полюсы которой легко находятся. Вид



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

аппроксимирующей функции может быть, например, следующим:

$$(4.1) \quad K^*(u) = \gamma \varphi(u) \prod_{i=1}^M (u^2 - \zeta_i^2) \prod_{i=1}^L (u^2 - z_i^2)^{-1} \frac{P_{2N}(u)}{Q_{2N}(u)}$$

где $\varphi(u) = u^{-1} \operatorname{th} \alpha u$ или $\varphi(u) = (u^2 + \alpha^{-2})^{-1/2}$, α, γ — постоянные, причем величина γ , та же, что и в (1.4), ζ_i, z_i — действительные нули и полюсы функции $K(u)$, P_{2N}, Q_{2N} — приведенные многочлены четных равных степеней относительно u , коэффициенты которых подбираются из условия наилучшего равномерного приближения функции $K(u)$ на вещественной оси.

Используя произвол в выборе параметра α , положим $\alpha \ll 1$. При этом в случае $\varphi(u) = u^{-1} \operatorname{th} \alpha u$ нули функции $\operatorname{th} \alpha u$, по которым строится решение (2.1), будут очень большими по сравнению с нулями многочлена $P_{2N}(u)$, и основной вклад в решение будут давать слагаемые, соответствующие вещественным нулям ζ_n ($n = 1, 2, \dots, M$) функции $K(u)$ и нулям ζ_n^* ($n = M + 1, \dots, M + N$) многочлена $P_{2N}(u)$:

$$(4.2) \quad T(x) = B_0 + \sum_{n=1}^M 2B_n \exp(i\zeta_n a) \operatorname{ch}(i\zeta_n x) + \\ + \sum_{n=M+1}^{M+N} 2B_n \exp(i\zeta_n^* a) \operatorname{ch}(i\zeta_n^* x) + O\left(\exp\left(-\frac{\pi a}{\alpha}\right)\right)$$

Полагая $\alpha \ll 1$ в аппроксимации (4.1) при $\varphi(u) = (u^2 + \alpha^{-2})^{-1/2}$, можно поднять точку ветвления $u = \alpha^{-1}i$ функции $K^*(u)$ сколь угодно высоко, что позволяет оценить и сделать сколь угодно малыми значения интегралов по берегам разреза $|u| > |\alpha^{-1}i|$, $\arg u = \pi/2$, который проведем для замыкания контура Γ в верхней полуплоскости. В этом случае при использовании аппроксимации (4.1) для любой из указанных

функций $\varphi(u)$ естественным будет урезание бесконечной системы (2.2) до $(M + N)$ -го порядка.

В качестве численного примера рассмотрим решение упругой задачи A ($p = 0$) при значениях параметров (3.1). Аппроксимирующая функция вида (4.1) при $N = 2$ такова:

$$(4.3) \quad K^*(u) = \gamma \varphi(u) \frac{u^2 - \zeta_1^2}{u^2 - z_1^2} \frac{u^4 + Au^2 + B}{u^4 + Cu^2 + D}$$

$$\varphi(u) = u^{-1} \operatorname{th} \alpha u, \quad \gamma \alpha \frac{\zeta_1^2}{z_1^2} \frac{B}{D} = K(0)$$

$$\gamma = -6,508929, \quad \zeta_1 = 1,82985, \quad z_1 = 2,69083, \quad \alpha = 0,1 \quad A = 30,3394, \quad B = 134,45382, \\ C = 1,29137, \quad D = 3,87876$$

Погрешность такой аппроксимации не превышает 4%. Для определения постоянных B_n в решении (4.2) при использовании аппроксимации (4.3) необходимо решить систему (2.2), урезанную до третьего порядка, причем $z_{2,3}^* = \pm 1,14349 + 0,81356i$, $\zeta_2^* = 2,32138i$, $\zeta_3^* = 4,99506i$.

Безразмерные контактные напряжения $T^*(x)$, найденные методом аппроксимации, имеют погрешность по амплитуде 16%. При уменьшении параметра λ погрешность увеличивается и при $\lambda = 0,15$ составляет уже 25%. Оценка погрешностей производилась путем сравнения с решением, найденным в п.3 методом редукции (кривая 1, фиг. 2), которое имело сравнительно высокую точность.

Аналогичная картина наблюдается и при использовании аппроксимации вида (4.3) при $\varphi(u) = (u^2 + \alpha^{-2})^{-1/2}$, $\alpha^{-2} = 60$, $A = 21,03274$, $B = 131,23141$, $C = 1,3782173$, $D = 4,887442$ (γ, ζ_1, z_1 — те же, что и в (4.3)), погрешность которой составляет 6%.

Таким образом, метод аппроксимации следует применять с осторожностью.

Для уменьшения погрешности необходимо увеличивать порядок полиномов $P_{2N}(u)$ и $Q_{2N}(u)$, но это существенно усложняет вычисления. Вместе с тем если известны первые комплексные нули и полюсы функции $K(u)$ из верхней полуплоскости $\zeta_{2,3} = \pm 1,8603 + 2,4859i$, $z_{2,3} = \pm 0,9875 + 1,3009i$, то можно определить A, B, C, D , не решая задачу минимизации функционала

$$F(K^*) = \max_{u \in [0, \infty)} |K(u) - K^*(u)|$$

а полагая

$$u^4 + Au^2 + B = (u^2 - \zeta_2^2)(u^2 - \zeta_3^2) \\ u^4 + Cu^2 + D = (u^2 - z_2^2)(u^2 - z_3^2)$$

При этом параметр α выбирается уже не произвольно, а исходя из условия $K^*(0) = K(0)$. В этом случае для аппроксимации (4.3) при $\varphi(u) = (u^2 + \alpha^{-2})^{-1/2}$ получаем значения входящих в нее параметров: $\alpha^{-2} = 14,1973$, $A = 5,43797$, $B = 92,9376$, $D = 7,11554$, $C = 1,43437$. При этом погрешность аппроксимации на вещественной оси не превышает 5,5%. Зная последующие комплексные нули и полюсы функции $K(u)$, можно повышать порядок полиномов $P_{2N}(u)$ и $Q_{2N}(u)$ и получать соответственно аппроксимации с меньшей погрешностью. Так, при $N = 4$ погрешность равна 3% ($\alpha^{-2} = 43,6148$), при $N = 6$ погрешность уменьшается до 2% ($\alpha^{-2} = 87,5302$) и т. д.

Выше предполагалось частичное сцепление слоя с недеформируемой накладкой, когда область жесткого сцепления Ω — отрезок $[-a; +a]$. Следует отметить, что рассмотренные задачи могут быть решены и для областей Ω вида

$$[-a; -b] \cup [+b; +a] \text{ и } (-\infty; -a] \cup [+a; +\infty)$$

теми же методами, что и в работе [6].

Автор благодарит В. М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979, 319 с.
2. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. *Александров В. М., Зеленцов В. Б.* Асимптотические методы решения двумерных динамических задач для вязкоупругого слоя со смешанными краевыми условиями.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 2, с. 329—337.
5. *Александров В. М., Зеленцов В. Б.* Динамические задачи об изгибе прямоугольной пластины со смешанными условиями закрепления по контуру.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 116—123.
6. *Гриценко С. И., Зеленцов В. Б.* Смешанные задачи для полосы, частично сцепленной с жестким основанием.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 108—114.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
7.VII.1984