Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ РЕЛАКСАЦИОННОГО ТИПА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Кондауров В. И.

Для описания конечных деформаций вязкоупругих материалов релаксационного типа рассматривается представление полных деформаций в виде композиции упругой и необратимой составляющих. Согласно методу внутренних параметров, принимается, что термодинамический потенциал, тензор напряжений, плотность энтропии, тепловой поток и скорость изменения неупругих деформаций — функции полной деформации, температуры, градиента температуры и необратимой деформации. На основании требований инвариантности определяющих уравнений дается определение изотропных идеальных и упрочняющихся вязкоупругих тел. Формулируются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять уравнения состояния таких сред. В качестве иллюстрации рассматривается распространение изотермических волн слабого разрыва в идеальной вязкоупругой среде с малыми упругими и конечными полными деформациями.

Рассматриваемые ниже определяющие соотношения релаксационного типа по степени общности занимают промежуточное положение между уравнениями сред с инфинитиземальной памятью и уравнениями состояния со слабо затухающей памятью общего вида [1]. Простейшим уравнением такого типа является одномерное уравнение Максвелла. Различные его обобщения, обзор которых можно найти в [2—4], в чисто механической теории сводятся в основном к рассмотрению пространственного напряженно-деформированного состояния и введению временных производных тензоров напряжений и деформаций порядка более высокого, чем первый. Для конечных деформаций при этом возникает проблема выбора предпочтительного вида объективных производных.

В термомеханике вязкоупругих сред релаксационного типа подход, основанный на введении обобщенных уравнений Максвелла не только для напряжений, но и для других реологических соотношений термодинамического характера, не нашел широкого применения. Более общим и плодотворным оказался метод скрытых, или внутренних, параметров [5]. В соответствии с этим методом текущее состояние материальной частицы описывается не только деформацией, температурой и градиентом температуры, но и внутренними параметрами. Для последних вводится система дополнительных реологических соотношений. Как правило, эти соотношения представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения с начальными данными. Интегрирование уравнений для внутренних параметров при заданных предысториях деформаций, температуры и ее градиента показывает, что все реологические характеристики являются функционалами процесса деформирования, но функционалами частного вида, определяемого решением указанной выше задачи с начальными данными.

В качестве внутренних параметров состояния среды в работе принимается набор N тензоров неупругих составляющих градиента невырожденного отображения отсчетной конфигурации тела в действительную. Такой подход, в котором градиент отображения представляется в виде произведения мгновенно упругой и N неупругих составляющих, является обобщением разложения, широко используемого при описании кинематики упругопластических сред при конечных деформациях [6—8]. Он позволяет учесть явления, которые в линейном случае характеризуются спектром N времен релаксации.

Далее, без привлечения предположений частного характера (типа предположений о малости деформаций) изучаются ограничения, налагаемые на определяющие соотношения неравенством энтропии и требованиями инвариантности. Помимо известных требований инвариантности определяющих уравнений относительно смены системы отсчета (принцип объективности) и ортогональных преобразований неискаженной отсчетной конфигурации (изотропия материала) [1] существенным образом используется инвариантность относительно ортогональных преобразований евклидовых пространств, касательных в данной точке тела к пространствам мгновенно разгруженных промежуточных конфигураций. Последнее есть не что иное, как предположение [8] об отсутствии влияния движения как жесткого целого' на реологические характеристики однородно сдеформированного и разгруженного тела.'

Указанные требования позволяют сформулировать необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять определяющие уравнения. Эти условия инвариантности не дают, конечно, однозначного ответа на вопрос — каков конкретный вид входящих в уравнения функций, но существенно сужают класс допустимых уравнений состояния. Особенно ярко это проявляется при наличии дополнительных ограничений, как это проиллюстрировано на примере изотермической идеальной вязкоупругой среды с малыми упругими, но конечными полными деформациями.

1. Кинематика. Пусть $\mathbf{X}$ — радиус-вектор материальной частицы тела в отсчетной конфигурации (ОК) $\varkappa$, $\mathbf{x}$ — в действительной конфигурации (ДК) χ, соответствующей текущему моменту времени t, так что

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t),\quad d\mathbf{x}=\mathbf{F}(\mathbf{X},t)\,d\mathbf{X},\quad \Delta=\det\mathbf{F}\neq 0 \tag{1.1}$$

Тензор $\mathbf{F}$ представляет собой градиент невырожденного отображения (1.1), вектор $\mathbf{v}=\partial\mathbf{x}(\mathbf{X},t)/\partial t$ определяет скорость материальной частицы.

Если отображение (1.1) дважды непрерывно дифференцируемо, то имеет место локальный закон сохранения совместности полей скорости и полной деформации, который в переменных $\mathbf{X}$, t записывается в виде ($\mathbf{I}$ — единичный тензор)

$$\mathbf{F}^{\cdot}-\mathrm{Div}\,(\mathbf{v}\otimes\mathbf{I})=0 \tag{1.2}$$

Введем помимо ОК и ДК тела N промежуточных конфигураций (ПК) $\varkappa_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,N$, $N\geqslant 1$. Радиус-вектор частицы $\mathbf{X}$ в этих конфигурациях равен

$$\mathbf{X}_\alpha=\mathbf{X}_\alpha(\mathbf{X}_{\alpha-1},t),\quad \mathbf{X}_0\equiv\mathbf{X},\ \alpha=1,2,\ldots,N$$

Отображения $\varkappa_{\alpha-1}\to\varkappa_\alpha$ будем считать взаимно однозначными и достаточно гладкими. Градиенты отображения $\varkappa_{\alpha-1}\to\varkappa_\alpha$ обозначим $\mathbf{P}_\alpha$, так что

$$d\mathbf{X}_\alpha=\mathbf{P}_\alpha\,d\mathbf{X}_{\alpha-1},\quad \det\mathbf{P}_\alpha\neq 0 \tag{1.3}$$

и будем называть градиентами неупругих отображений.

Здесь и далее суммирование по α отсутствует, если это специально не оговорено.

В отличие от ОК и ДК ПК тела принадлежат в общем случае неевклидову пространству. Поэтому тензоры второго ранга $\mathbf{P}_\alpha$ следует рассматривать как отображение евклидовых пространств, касательных в данной точке $\mathbf{X}$ к трехмерным пространствам, содержащим конфигурации $\varkappa_{\alpha-1}$ и $\varkappa_\alpha$. Касательное евклидово пространство можно трактовать как пространство, в котором находилась бы ПК однородно деформированного тела с деформациями, равными всюду деформациям в точке $\mathbf{X}$.

Если обозначить $\mathbf{E}$ — градиент невырожденного отображения $\varkappa_N\to\chi$, который будем называть градиентом упругого отображения, то из (1.1), (1.3) следует

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}\mathbf{P}_N\mathbf{P}_{N-1}\ldots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 \tag{1.4}$$

Введение ПК $\varkappa_\alpha$ и представление (1.4) градиента $\mathbf{F}$ в виде произведения градиентов упругого и необратимых отображений широко используется при построении моделей упругопластических тел с конечными деформациями [6—8]. Как и в теории пластичности, разложение (1.4) не определяет порядка во времени процессов упругого и вязкого деформирования, которые развиваются в теле физически одновременно.

Поскольку все используемые отображения неособые, то, пользуясь теоремой о полярном разложении тензора второго ранга, можно записать

$$(1.5)\qquad \mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U},\quad \mathbf{E}=\mathbf{R}_e\mathbf{U}_e,\quad \mathbf{P}_\alpha=\mathbf{H}_\alpha\mathbf{W}_\alpha$$

где $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_e$, $\mathbf{H}_\alpha$ — ортогональные, а $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_e$, $\mathbf{W}_\alpha$ — симметричные положительно-определенные тензоры.

2. Определяющие сооотношения. Будем рассматривать однородные термовязкоупругие материалы релаксационного типа. Считается, что состояние материальной частицы $\mathbf{X}$ в момент времени t полностью задано, если известен набор величин

$$(2.1)\qquad \lambda(\mathbf{X},t)=\{\mathbf{F}(\mathbf{X},t),\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{X},t),\theta(\mathbf{X},t),\gamma(\mathbf{X},t)\}$$

где γ — градиент скалярного поля абсолютной температуры $\theta>0$, т. ч. $d\theta=\gamma d\mathbf{X}$. Параметрически зависящее от t семейство состояний будем называть обобщенным процессом деформирования частицы.

Определяющие, или реологические, уравнения рассматриваемых материалов представляют собой конечные, недифференциальные соотношения

$$(2.2)\qquad A=A^+(\lambda),\quad \mathbf{T}=\mathbf{T}^+(\lambda),\quad \eta=\eta^+(\lambda),\quad \mathbf{q}=\mathbf{q}^+(\lambda)$$

и эволюционные уравнения

$$(2.3)\qquad \Phi_\alpha(\mathbf{P}_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}},\ \lambda)=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,N$$

В соотношениях (2.2) величины A, η — плотности свободной энергии и энтропии, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока. Второго ранга тензор-функции Φ_α, связывающие скорость изменения градиентов $\mathbf{P}_\alpha$ с текущим состоянием частицы, определяют уравнения для скорости производства неупругих деформаций.

Пусть $\mathbf{K}=\mathrm{const}$ — градиент унимодулярного преобразования одной ОК $\varkappa$ в другую ОК $\varkappa'$. Если определяющие уравнения (2.2), (2.3) не меняют своей формы при отображении $\varkappa\to\varkappa'$, то такие две конфигурации называются равноправными, а отображение $\varkappa\to\varkappa'$ — преобразованием равноправности [1, 9]. Учитывая, что при смене отсчетной конфигурации

$$\mathbf{F}\to\mathbf{F}\mathbf{K},\ \mathbf{P}_1\to\mathbf{P}_1\mathbf{K},\ \mathbf{P}_\beta\to\mathbf{P}_\beta,\quad \mathbf{P}_1^{\boldsymbol{\cdot}}\to\mathbf{P}_1^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{K},\quad \gamma\to\mathbf{K}^T\gamma$$
$$\beta=2,3,\ldots,N$$

находим, что условием равноправности $\varkappa$ и $\varkappa'$ служат соотношения

$$(2.4)\qquad A^+(\mathbf{F},\mathbf{P}_\beta,\mathbf{P}_1,\theta,\gamma)=A^+(\mathbf{F}\mathbf{K},\mathbf{P}_\beta,\mathbf{P}_1\mathbf{K},\theta,\mathbf{K}^T\gamma),\ldots,\Phi_1(\mathbf{P}_1^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{K},\cdot)=0$$
$$\Phi_\beta(\mathbf{P}_\beta^{\boldsymbol{\cdot}},\cdot)=0$$

Градиенты преобразований равноправности образуют группу, которую будем обозначать $g_\varkappa$.

Пусть $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(t)$ — ортогональный тензор, который является градиентом преобразования одной ДК χ в другую ДК χ' при фиксированных ОК и ПК. При таких преобразованиях

$$\mathbf{F}\to\mathbf{Q}\mathbf{F},\quad \mathbf{P}_\alpha\to\mathbf{P}_\alpha,\ \mathbf{T}\to\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T,\quad \mathbf{q}\to\mathbf{Q}\mathbf{q},\quad \theta\to\theta,\ \gamma\to\gamma$$

и в силу принципа объективности [1, 9] для значений определяющих отображений (2.2), (2.3) справедливы равенства

$$(2.5)\qquad A^+(\mathbf{Q}\mathbf{F},\mathbf{P}_\alpha,\theta,\gamma)=A^+(\mathbf{F},\cdot),\ \mathbf{T}^+(\mathbf{Q}\mathbf{F},\cdot)=\mathbf{Q}\mathbf{T}^+(\mathbf{F},\cdot)\,\mathbf{Q}^T$$
$$\eta^+(\mathbf{Q}\mathbf{F},\cdot)=\eta^+(\mathbf{F},\cdot),\quad \mathbf{q}^+(\mathbf{Q}\mathbf{F},\cdot)=\mathbf{Q}\mathbf{q}^+(\mathbf{F},\cdot),$$
$$\Phi_\alpha(\mathbf{P}_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}},\mathbf{Q}\mathbf{F},\cdot)=0;\quad \alpha=1,2,\ldots,N$$

Рассмотрим теперь преобразования какой-либо промежуточной конфигурации $\varkappa_\alpha$. Если $\mathbf{Z}_\alpha = \mathbf{Z}_\alpha(\mathbf{X}, t)$ ($\det \mathbf{Z}_\alpha = 1$) — градиент унимодулярного преобразования $\varkappa_\alpha \to \varkappa_\alpha'$, то при остальных фиксированных конфигурациях связь между аргументами (2.1) определяющих соотношений имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{F} \to \mathbf{F}, \quad \mathbf{P}_\beta \to \mathbf{P}_\beta, \quad \mathbf{P}_\alpha \to \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{P}_\alpha, \quad \mathbf{P}_{\alpha+1} \to \mathbf{P}_{\alpha+1}\mathbf{Z}_\alpha^{-1}, \quad \theta \to \theta\\ \gamma \to \gamma; \quad \beta = 1, 2, \ldots, N, \quad \beta \neq \alpha, \alpha + 1\end{gathered}$$

Для промежуточных конфигураций, как и ранее для отсчетной, введем определение равноправности, в соответствии с которым две промежуточные конфигурации $\varkappa_\alpha$ и $\varkappa_\alpha'$ равноправны, если преобразование $\varkappa_\alpha \to \varkappa_\alpha'$ оставляет неизменным значение термодинамического потенциала, тензора напряжений Коши, энтропии, теплового потока и не изменяет форму эволюционных уравнений, т. е.

$$\begin{gathered}A^+(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\beta, \mathbf{Z}_\alpha\mathbf{P}_\alpha, \mathbf{P}_{\alpha+1}\mathbf{Z}_\alpha^{-1}, \theta, \gamma) = A^+(\mathbf{F}, \mathbf{P}_\beta, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{P}_{\alpha+1}, \theta, \gamma), \ldots,\\ \Phi_\beta(\mathbf{P}_\beta^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_\beta, \mathbf{Z}_\alpha\mathbf{P}_\alpha, \mathbf{P}_{\alpha+1}\mathbf{Z}_\alpha^{-1}, \theta, \gamma) = 0,\\ \Phi_\alpha(\mathbf{Z}_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{Z}_\alpha\mathbf{P}_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}, \cdot) = 0, \quad \Phi_{\alpha+1}(\mathbf{P}_{\alpha+1}\mathbf{Z}_\alpha^{-1\boldsymbol{\cdot}} + \dot{\mathbf{P}}_{\alpha+1}\mathbf{Z}_\alpha^{-1}, \cdot) = 0\end{gathered} \tag{2.6}$$

Градиенты преобразований $\varkappa_\alpha$ в равноправные конфигурации $\varkappa_\alpha', \varkappa_\alpha'', \ldots$ образуют группу, которую обозначим $g_{\varkappa_\alpha}$.

Определим изотропное вязкоупругое тело релаксационного типа как материал, у которого существует отсчетная конфигурация $\varkappa_0$ с группой равноправности, содержащей полную ортогональную группу o; последняя принадлежит также группам равноправности всех промежуточных конфигураций. Иными словами, в случае изотропного материала

$$o \in g_{\varkappa_0}, \quad o \in g_{\varkappa_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, N$$

Поскольку $o \in g_{\varkappa_0} \in u$, u — унимодулярная группа, то, как показано в [10], либо $g_{\varkappa_0} = o$, либо $g_{\varkappa_0} = u$. Аналогично $g_{\varkappa_\alpha} = o$ или $g_{\varkappa_\alpha} = u$. Поэтому даже в простейшем случае, когда $N = 1$ и имеется одна ПК, возможны четыре типа материалов, определяемых соотношениями

$$g_{\varkappa_0} = g_{\varkappa_1} = o; \quad g_\varkappa = u, g_{\varkappa_1} = o; \quad g_{\varkappa_0} = o, \quad g_{\varkappa_1} = u; \quad g_\varkappa = g_{\varkappa_1} = u$$

Рассмотрим два вязкоупругих материала релаксационного типа. Первый из них определяется условием

$$g_{\varkappa_0} = g_{\varkappa_\alpha} = o, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, N \tag{2.7}$$

и будет называться упрочняющимся вязкоупругим телом. Для второго предполагается, что

$$g_\varkappa = g_{\varkappa_\beta} = u, \quad g_{\varkappa_N} = o, \quad \beta = 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{2.8}$$

Этот материал будет называться идеальным вязкоупругим телом.

Для упрочняющегося вязкоупругого тела (2.7) необходимо и достаточно, чтобы определяющие уравнения имели вид

$$\begin{gathered}A = A^+(\lambda_1), \quad \mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{T}^+(\lambda_1)\mathbf{R}^T, \quad \eta = \eta^+(\lambda_1), \quad \mathbf{q} = \mathbf{R}\mathbf{q}^+(\lambda_1)\\ \mathbf{V}_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} = \Psi_\alpha(\lambda_1)\end{gathered} \tag{2.9}$$

и выполнялись свойства изотропности

$$\begin{gathered}A^+(\lambda_1) = A^+(\lambda_1^Q), \quad \mathbf{Q}\mathbf{T}^+(\lambda_1)\mathbf{Q}^T = \mathbf{T}^+(\lambda_1^Q),\\ \eta^+(\lambda_1) = \eta^+(\lambda_1^Q), \quad \mathbf{Q}\mathbf{q}^+(\lambda_1) = \mathbf{q}^+(\lambda_1^Q), \quad \mathbf{Q}\Psi_\alpha(\lambda_1)\mathbf{Q}^T = \Psi_\alpha(\lambda_1^Q)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь

$$(2.11)\qquad \begin{aligned}&\lambda_1(\mathbf{X},t)=\{\mathbf{U},\mathbf{V}_\alpha,\theta,\gamma\}\\&\lambda_1^Q=\{\mathbf{QUQ}^T,\mathbf{QV}_\alpha\mathbf{Q}^T,\theta,\mathbf{Q}\gamma\}\\&\mathbf{V}_1\equiv\mathbf{W}_1,\quad \mathbf{V}_\alpha=(\mathbf{H}_{\alpha-1}\mathbf{H}_{\alpha-2}\ldots\mathbf{H}_1)^T\,\mathbf{W}_\alpha\,(\mathbf{H}_{\alpha-1}\mathbf{H}_{\alpha-2}\ldots\mathbf{H}_1)\\&\alpha=2,3,\ldots,N\end{aligned}$$

Для доказательства необходимости (2.9), (2.10) рассмотрим условия инвариантности (2.4) относительно постоянного ортогонального преобразования неискаженной ОК. Полагая градиент преобразования $\mathbf{K}=\mathbf{R}^T(\mathbf{X}_0,\ t_0)$, $\mathbf{X}_0=\mathrm{const}$, $t_0=\mathrm{const}$, получим

$$(2.12)\qquad \begin{aligned}&A=A^+(\mathbf{F},\mathbf{P}_\beta,\mathbf{P}_1,\theta,\gamma)=A^+(\mathbf{RUR}^T,\mathbf{P}_\beta,\mathbf{P}_1\mathbf{R}^T,\theta\,\mathbf{R}\gamma),\ldots,\\&\Phi_1(\mathbf{P}_1{}^{\cdot}\mathbf{R}^T,\ \cdot)=\theta,\ \Phi_\beta(\mathbf{P}_\beta{}^{\cdot},\ \cdot)=0\\&\beta=2,\ 3,\ \ldots,\ N\end{aligned}$$

Пусть теперь $\mathbf{Z}_1(\mathbf{X},\ t)=\mathbf{R}(\mathbf{X},\ t_0)\,\mathbf{H}_1^T(\mathbf{X},\ t)(t\leqslant t_0)$ — зависящий от времени градиент преобразования евклидового пространства, касательного в точке $\mathbf{X}$ к ПК $\varkappa_1$. Это преобразование ортогонально. Его производная по времени имеет вид $\mathbf{Z}_1{}^{\cdot}(\mathbf{X},\ t)=\mathbf{R}(\mathbf{X},\ t_0)\,\mathbf{H}_1^{T\cdot}(\mathbf{X},\ t)$. Тогда условия (2.6), примененные к (2.12), дают

$$(2.13)\qquad \begin{aligned}&A=A^+(\mathbf{RUR}^T,\mathbf{P}_\beta,\mathbf{P}_2\mathbf{H}_1\mathbf{R}^T,\mathbf{RW}_1\mathbf{R}^T,\theta,\mathbf{R}\gamma),\ldots,\ \Phi_1(\mathbf{RW}_1{}^{\cdot}\mathbf{R}^T,\ \cdot)=0\\&\Phi_2\left(\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{P}_2\mathbf{H}_1)\,|_X\mathbf{R}^T,\ \cdot\right)=0,\Phi_\beta(\mathbf{P}_\beta^{\cdot},\ \cdot)=0,\qquad \beta=3,4,\ldots,N\end{aligned}$$

Аналогично, рассматривая последовательно ортогональные преобразования

$$\mathbf{Z}_\alpha(\mathbf{X},\ t)=\mathbf{R}(\mathbf{X},\ t_0)\,\mathbf{H}_{\alpha-1}^T(\mathbf{X},\ t)\,\mathbf{H}_{\alpha-2}^T(\mathbf{X},\ t)\ldots\mathbf{H}_1^T(\mathbf{X},\ t)$$

евклидовых пространств, касательных в точке $\mathbf{X}$ к ПК $\varkappa_\alpha$ ($\alpha=2,\ 3,\ \ldots,\ N$), придем к необходимому виду определяющих уравнений

$$\begin{aligned}&A=A^+(\lambda_1^R),\quad \mathbf{T}=\mathbf{T}^+(\lambda_1^R),\quad \eta=\eta^+(\lambda_1^R),\quad \mathbf{q}=\mathbf{q}^+(\lambda_1^R)\\&\Phi_\alpha(\mathbf{RV}_\alpha{}^{\cdot}\mathbf{R}^T,\ \lambda_1^R)=0\end{aligned}$$

где λ_1^R дано выражением (2.11).

Если уравнения для скоростей производства неупругих деформаций допускают разрешенную относительно производных по времени форму, то

$$\mathbf{RV}_\alpha{}^{\cdot}\mathbf{R}^T=\Psi_\alpha(\lambda_1^R)$$

Отсюда с учетом принципа объективности при $\mathbf{Q}(t)=\mathbf{R}^T(\mathbf{X}_0,\ t)$ получаем соотношения (2.9), (2.10).

Достаточность формы (2.9), (2.10) определяющих уравнений для выполнения (2.7) и справедливости принципа объективности следует из непосредственной подстановки в (2.9) формул

$$\begin{aligned}&\mathbf{F}^*=\mathbf{QFK}=(\mathbf{QRK})(\mathbf{K}^T\mathbf{UK})\\&\mathbf{P}_\alpha{}^*=\mathbf{Z}_\alpha\mathbf{P}_\alpha\mathbf{Z}_{\alpha-1}^T=(\mathbf{Z}_\alpha\mathbf{H}_\alpha\mathbf{Z}_{\alpha-1}^T)(\mathbf{Z}_{\alpha-1}\mathbf{W}_\alpha\mathbf{Z}_{\alpha-1}^T),\qquad \mathbf{Z}_0\equiv\mathbf{K}\\&\mathbf{R}^*=\mathbf{QRK},\qquad \mathbf{U}^*=\mathbf{K}^T\mathbf{UK}\\&\mathbf{H}_\alpha{}^*=\mathbf{Z}_\alpha\mathbf{H}_\alpha\mathbf{Z}_{\alpha-1}^T,\qquad \mathbf{W}_\alpha{}^*=\mathbf{Z}_{\alpha-1}\mathbf{W}_\alpha\mathbf{Z}_{\alpha-1}^T\end{aligned}$$

получаемых с учетом единственности полярного разложения и определения (2.11) тензоров $\mathbf{V}_\alpha$.

В случае идеальных вязкоупругих сред для выполнения условий (2.8) и принципа объективности необходимо и достаточно, чтобы определяющие соотношения имели вид

$$(2.14)\qquad \begin{aligned}&A=A^+(\lambda_2),\quad \mathbf{T}=\mathbf{RT}^+(\lambda_2)\,\mathbf{R}^T,\quad \eta=\eta^+(\lambda_2),\quad \mathbf{q}=\mathbf{Rq}^+(\lambda_2)\\&\mathbf{V}_N{}^{\cdot}\mathbf{V}_N^{-1}=\Psi_N(\lambda_2),\quad \mathbf{V}_\alpha{}^{\cdot}\mathbf{V}_\alpha^{-1}=\mathbf{V}_{\alpha+1}^{-1}\ldots\mathbf{V}_N^{-1}\Psi_\alpha(\lambda_2)\,\mathbf{V}_N\ldots\mathbf{V}_{\alpha+1}\\&\alpha=1,2,\ldots,N-1\end{aligned}$$

где A^+, $\mathbf{T}^+$, η^+, $\mathbf{q}^+$ и Ψ_α — изотропные функции, т. е.

$$(2.15)\qquad A^+(\lambda_2)=A^+(\lambda_2^Q),\quad \mathbf{Q}\mathbf{T}^+(\lambda_2)\mathbf{Q}^T=\mathbf{T}^+(\lambda_2^Q),$$
$$\eta^+(\lambda_2)=\eta^+(\lambda_2^Q),\quad \mathbf{Q}\mathbf{q}^+(\lambda_2)=\mathbf{q}^+(\lambda_2^Q),\quad \mathbf{Q}\Psi_\alpha(\lambda_2)\mathbf{Q}^T=\Psi_\alpha(\lambda_2^Q)$$

Здесь

$$(2.16)\qquad \lambda_2(\mathbf{X},t)=\{\mathbf{B},\Delta_\alpha,\theta,\mathbf{B}^{-1T}\nabla\theta\},\quad \lambda_2^Q=\{\mathbf{QBQ}^T,\Delta_\alpha,\theta,\mathbf{QB}^{-1T}\nabla\theta\}$$
$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\mathbf{V}_1^{-1}\mathbf{V}_2^{-1}\ldots\mathbf{V}_N^{-1},\quad \Delta_\alpha=\det\mathbf{P}_\alpha=\det\mathbf{V}_\alpha$$

Для доказательства необходимости (2.14), (2.15) следует рассмотреть унимодулярное преобразование ОК $\varkappa$ с постоянным градиентом $\mathbf{K}=\Delta^3(\mathbf{X}_0,t_0)\,\mathbf{P}_1^{-1}(\mathbf{X}_0,t_0)$, унимодулярные преобразования ПК $\varkappa_\beta$ ($\beta=1,2,\ldots,N-1$) с постоянными градиентами $\mathbf{Z}_\beta=\Delta^3_{\beta+1}(\mathbf{X}_0,t_0)\,\mathbf{P}_{\beta+1}(\mathbf{X}_0,t_0)$, ортогональное преобразование $\varkappa_N$ с градиентом $\mathbf{Z}_N(t)=\mathbf{R}(t_0)\,\mathbf{H}_1^T(t_0)\ldots\mathbf{H}_{N-1}^T(t_0)\,\mathbf{H}_N^T(t)$ и принцип объективности при $\mathbf{Q}(t)=\mathbf{R}^T(\mathbf{X}_0,t)$. При этом уравнения для скорости производства неупругих деформаций удобно использовать в эквивалентной (2.3) форме

$$\Phi_\beta'\left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{P}_N\mathbf{P}_{N-1}\ldots\mathbf{P}_\beta),\ \mathbf{F},\ \mathbf{P}_\alpha,\ \theta,\ \gamma\right]=0$$

$\alpha,\beta=1,2,\ldots,N$

Достаточность (2.14), (2.15) для выполнения принципа объективности очевидна. Чтобы показать достаточность (2.14), (2.15), для выполнения (2.8), следует воспользоваться тем, что (2.14) является сужением систем, аналогичных (2.12), (2.13), достаточность которых ясно видна.

Рассмотрим ограничения на определяющие соотношения вязкоупругих тел релаксационного типа, накладываемые вторым законом термодинамики

$$(2.17)\qquad -\rho A^\cdot-\rho\eta\theta^\cdot+\operatorname{tr}(\mathbf{TF}^{-1T}\mathbf{F}^\cdot)+\theta^{-1}\mathbf{q}\nabla\theta\geqslant 0$$

Предполагая, что функции A^+, $\mathbf{T}^+$, η^+, $\mathbf{q}^+$ и Ψ_α определены и непрерывно дифференцируемы в открытой односвязной области переменных $\{\mathbf{F},\mathbf{V}_\alpha,\theta,\gamma\}$, можно показать, что

$$(2.18)\qquad A=A^+(\mathbf{U},\mathbf{V}_\alpha,\theta),\quad \eta=-\frac{\partial A^+}{\partial\theta}$$
$$\mathbf{T}=\rho\frac{\partial A^+}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{F}^T=\rho\mathbf{R}\frac{\partial A^+}{\partial\mathbf{U}}\mathbf{R}^T$$
$$\delta=-\sum_{\alpha=1}^{N}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial A^+}{\partial\mathbf{V}_\alpha}\Psi_\alpha\right)+\frac{1}{\rho\theta}\mathbf{q}\nabla\theta\geqslant 0$$

Из (2.18) видно, что для изучаемых материалов неравенство (2.17) приводит к частичному расщеплению эффектов температурных градиентов и деформаций — напряжение, энтропия и свободная энергия не зависят от $\nabla\theta$.

Для случая идеального вязкоупругого тела соотношения (2.18) допускают бо́льшие упрощения. Чтобы произвести их, заметим, что невырожденный тензор $\mathbf{B}$ в общем случае несимметричен. Поэтому $\mathbf{B}=\mathbf{Q}\mathrm{S}$, где где $\mathbf{Q}$ — ортогональный, а S — симметричный положительно-определенный тензоры. Для них из формул (1.4), (1.5) и единственности полярного разложения следует

$$\mathbf{Q}=\mathbf{R}^T\mathbf{R}_e\mathbf{H},\quad \mathrm{S}=\mathbf{H}^T\mathbf{U}_e\mathbf{H},\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_N\mathbf{H}_{N-1}\ldots\mathbf{H}_1$$

Плотность свободной энергии A^+ — функция S — не зависит от $\mathbf{Q}$.

Чтобы показать это, рассмотрим при $t\geqslant t_0$ процесс деформирования частицы $\mathbf{X}=\mathbf{X}_0$, при котором все аргументы состояния неизменны, кроме $\mathbf{Q}$. Тогда

$$A^{\cdot} = \frac{\partial A^+}{\partial B_{ab}} \frac{\partial B_{ab}}{\partial Q_{ij}} Q_{ij}{}^{\cdot} = \frac{\partial A^+}{\partial B_{ab}} \delta_{ai} Q_{ij}{}^{\cdot} Q_{jp}{}^T B_{pb}$$

Поскольку

$$\mathbf{T} = \rho \mathbf{R} \frac{\partial A^+}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}^T \mathbf{R}^T$$

то в силу симметрии тензора напряжений Коши

$$\rho A^{\cdot} = \mathrm{tr}\,[(\mathbf{R}^T \mathbf{T} \mathbf{R})\,\mathbf{\Omega}] \equiv 0, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{Q}^{\cdot} \mathbf{Q}^T$$

Здесь и в дальнейшем используются индексные обозначения в декартовых ортогональных координатах в тех соотношениях, где фигурируют тензоры третьего и выше рангов.

Если воспользоваться изотропностью функции A^+, то зависимость от $\mathbf{S}$ можно представить в форме

$$A = A_1(\mathbf{e}, \Delta_\alpha, \theta), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1T} \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{F}^{-1}) \tag{2.19}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \ldots \mathbf{V}_N, \quad \mathbf{V} \neq \mathbf{V}^T$$

из которой следует

$$\mathbf{T} = \rho\,(\mathbf{I} - 2\mathbf{e})\,\partial A_1 / \partial \mathbf{e} \tag{2.20}$$

3. *Пример*. Рассмотрим важный для приложений случай идеальной вязкоупругой среды с малыми градиентами температуры и малыми упругими деформациями, развивающимися на фоне больших необратимых деформаций и больших поворотов. Для простоты ограничимся случаем $N = 1$.

Если симметричная часть $\mathbf{U}_e$ градиента $\mathbf{E}$ стремится к единице, то $\mathbf{F} = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e \mathbf{H} \mathbf{W} \to \mathbf{R}_e \mathbf{H} \mathbf{W}$, где $\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}_1$, $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}_1$ и, следовательно, $\mathbf{U} \to \mathbf{W}$, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_e \mathbf{H}$. Вводя тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ малых упругих деформаций, такой, что

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T, \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1 \tag{3.1}$$

находим, что также малы тензоры

$$\mathbf{B} - \mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{W}^{-1}, \quad \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{I} = \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{e} = {}^1\!/_2 \mathbf{R}\,(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{W}^{-1} + \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon})\,\mathbf{R}^T$$

Разложение плотности свободной энергии (2.19) в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{e} = 0$ с точностью до членов второго порядка с учетом изотропии A_1 и связи (2.20) запишем в виде

$$\rho_* A_1 = \rho_* A_0(\theta, \Delta) - p_*(\theta, \Delta)\, I_1 + {}^1\!/_2\, \lambda(\theta, \Delta)\, I_1{}^2 + \mu(\theta, \Delta)\, I_2 \tag{3.3}$$

$$\Delta \equiv \Delta_1, \quad I_1 = \mathrm{tr}\,\mathbf{e}, \quad I_2 = \mathrm{tr}\,\mathbf{e}^2$$

где $\rho_* = \rho_0 / \Delta$ — плотность материала в ПК $\varkappa_1$, $\mathbf{T}_* = -p_* \mathbf{I}$ — тензор напряжений Коши в этой конфигурации, λ, μ — скаляры, возможно зависящие от θ и Δ. Из (3.3) и (2.20) следует, что

$$\mathbf{T} = -(1 - I_1)\, p_* \mathbf{I} + \lambda I_1 \mathbf{I} + 2(\mu + p_*)\,\mathbf{e} \tag{3.4}$$

$$\eta = -\frac{\partial A_0}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p_*}{\partial \theta} I_1$$

Рассмотрим уравнение для скорости производства неупругих деформаций

$$\mathbf{W}^{\cdot} \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{\Psi}(\mathbf{B}, \Delta, \theta, \mathbf{B}^{-1T} \nabla \theta)$$

При малых градиентах температуры из симметрии изотропной функции

$$\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{W}, \theta, \nabla\theta) \equiv \Psi(\mathbf{B}, \Delta, \theta, \mathbf{B}^{-1T}\nabla\theta)\,\mathbf{W}$$

следует, что $\partial\varphi/\partial(\mathbf{B}^{-1T}\nabla\theta)\,|_{\nabla\theta=0} \equiv 0$.

Это означает, что в линейном по $\nabla\theta$ приближении $\Psi = \Psi(\mathbf{B}, \Delta, \theta)$.

В силу малости упругих деформаций, определенных (3.1), (3.2), имеем для непрерывно дифференцируемых по $\mathbf{B}$ функций

$$\Psi_{ij}(\mathbf{B}, \Delta, \theta) = \Psi_{ij}|_{e=0} + \left.\frac{\partial\Psi_{ij}}{\partial B_{ab}}\right|_{e=0}(B_{ab} - \delta_{ab}) + O(\|e\|^2)$$

причем из изотропности тензоров второго и четвертого рангов следует

$$\Psi_{ij}|_{e=0} = \psi_0(\theta, \Delta)\,\delta_{ij}$$

$$\left.\frac{\partial\Psi_{ij}}{\partial B_{ab}}\right|_{e=0} = \frac{\delta_{ij}\delta_{ab}}{3\tau_\lambda(\theta, \Delta)} + \frac{\delta_{ia}\delta_{jb}}{\tau_\mu(\theta, \Delta)} + \frac{\delta_{ib}\delta_{ja}}{\tau_\nu(\theta, \Delta)}$$

Учитывая, что $\operatorname{tr}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \operatorname{tr}(\varepsilon\mathbf{W}^{-1}) = \operatorname{tr}\mathbf{e} = I_1$, а из симметрии $\mathbf{W}^{\cdot}$ следует $1/\tau_\nu \equiv 0$, находим окончательную форму уравнения для скорости производства неупругих деформаций идеального вязкоупругого материала с малыми упругими деформациями и малыми градиентами температуры

$$\mathbf{W}^{\cdot} = \left\{\psi_0(\theta, \Delta) + \frac{I_1}{3\tau_\lambda(\theta, \Delta)}\right\}\mathbf{W} + \frac{1}{\tau_\mu(\theta, \Delta)}(\mathbf{U} - \mathbf{W}) \tag{3.5}$$

Для теплового потока в рассматриваемом приближении аналогично получаем закон Фурье $\mathbf{q} = k_0(\theta, \Delta)\nabla\theta$ со скалярным коэффициентом теплопроводности, возможно, зависящим от температуры и объемной неупругой деформации.

Вычислим в качестве иллюстрации скорости распространения волн слабого разрыва в рассматриваемом материале. Дополнительно предполагаем, что процесс изотермический и протекает при температуре θ_0 неискаженной ОК, ПК $\varkappa_1$ представляет собой разгруженную конфигурацию с нулевыми напряжениями, $\Delta \equiv 1$, т. е. объемные неупругие деформации отсутствуют. Тогда $\psi_0 = 0$, $\tau_\lambda{}^{-1} + \tau_\mu{}^{-1} = 0$, $\lambda, \mu, \tau_\mu = \mathrm{const}$, а уравнения (3.4), (3.5) приводятся к виду

$$\mathbf{T} = \lambda I_1\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}, \quad \mathbf{W}^{\cdot} = \frac{1}{\tau}\left\{\mathbf{U} - \left(1 + \frac{1}{3}I_1\right)\mathbf{W}\right\}, \quad \tau \equiv \tau_\mu \tag{3.6}$$

Из системы (3.6) следует дифференциальное уравнение ($\mathbf{T}' = \mathbf{T} - {}^1/_3(\operatorname{tr}\mathbf{T})\,\mathbf{I}$ — девиатор тензора напряжений Коши)]

$$\mathbf{T}^{\cdot} + \tau^{-1}\mathbf{T}' = \lambda\operatorname{tr}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{e}\nabla\mathbf{v})\,\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T + \mathbf{e}\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T\mathbf{e}) \tag{3.7}$$

Отсюда видно, что в случае остановки процесса деформирования в момент времени $t = t_0$, т. е. при $\nabla\mathbf{v} = 0$, шаровая часть тензора напряжений остается неизменной, а девиаторная релаксирует по закону

$$\mathbf{T}'(t) = \mathbf{T}'(t_0)\exp(-(t - t_0)/\tau)$$

Присоединяя к (3.7) уравнение движения

$$\rho\mathbf{v}^{\cdot} - \operatorname{div}\mathbf{T} = \rho\mathbf{b} \tag{3.8}$$

и учитывая, что $\mathbf{e}$ линейным образом выражается через $\mathbf{T}$ из первого соотношения (3.6), получаем замкнутую систему уравнений относительно переменных $\mathbf{v}$, $\mathbf{T}$.

Пусть $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ — уравнение поверхности слабого разрыва, $D = -|\nabla\varphi|^{-1}\,\partial\varphi/\partial t$, $\mathbf{n} = |\nabla\varphi|^{-1}\nabla\varphi$ — скорость распространения и единичная нормаль к поверхности. Обозначим $c = D - \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ — скорость распространения [поверхности относительно частиц среды, $\mathbf{V} = [\partial\mathbf{v}/\partial n]_-^+$, $\mathbf{S} = [\partial\mathbf{T}/\partial n]_-^+$, $\mathbf{E} = [\partial\mathbf{e}/\partial n]_-^+$ — скачки нормальных производных вектора скорости, тензора напряжений Коши и тензора упругих деформаций. Из (3.7), (3.8) для $c \neq 0$ следует

$$a\mathbf{V} - b(N + \delta M)\,\mathbf{n} - \mu\mathbf{e}\mathbf{V} = 0 \tag{3.9}$$

$$a = \rho c^2 - \mu, \quad b = \lambda + \mu, \quad \delta = \|\mathbf{e}\| = (\operatorname{tr}\mathbf{e}^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}\mathbf{n}/\delta, \quad N = \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}, \quad M = \mathbf{V}\cdot\mathbf{m}$$

В нулевом приближении, соответствующем $\mathbf{e} = 0$, уравнение (3.9) принимает вид $a_0\mathbf{V} + bN\mathbf{n} = 0$, из которого следует $a_0 = b$, $\mathbf{V} = N\mathbf{n}$ или $N = 0$, $a_0 = 0$.

Первый случай описывает продольную волну с вектором амплитуды слабого разрыва скорости, коллинеарным $\mathbf{n}$, так что

$$\rho c_0^2 = \lambda + 2\mu, \quad \mathbf{V} = N\mathbf{n}$$

Второй случай отвечает поперечной волне, на которой

$$\rho c_0^2 = \mu, \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} = 0$$

Обозначим $\mathbf{l} = \mathbf{een}/\delta^2$, $|\mathbf{l}| = O(1)$, $L = \mathbf{l}\cdot\mathbf{n}$. Если векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{l}$ линейно независимы, то, свертывая (3.9) с $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{l}$ и используя теорему Гамильтона — Кэли, придем к системе трех линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned}
&(b-a)N + \delta(b+\mu)M = 0\\
&b(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})N + [\delta b(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}) - a]M + \delta\mu L = 0\\
&[b(\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}) + \delta\mu J_3]N + \delta[b(\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}) - \mu J_2]M + [\delta\mu J_1 - a]L = 0\\
&J_1 = \delta^{-1}\operatorname{tr}\mathbf{e}, \qquad J_2 = {}^1/_2[J_1^2 - \delta^{-2}\operatorname{tr}\mathbf{e}^2], \qquad J_3 = \delta^{-3}\det\mathbf{e}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Из равенства нулю определителя матрицы коэффициентов системы (3.10) в случае $a_0 \neq 0$ следует в линейном по δ приближении, что $a = a_0 + \delta a_1 = b + \delta(\lambda + \mu)(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})$ или

$$\rho c^2 = (\lambda + 2\mu)(1 + \mathbf{n}\cdot\mathbf{en}) \tag{3.11}$$

Волны слабого разрыва, распространяющиеся со скоростью (3.11), могут быть названы квазипродольными волнами, поскольку поляризация таких волн определяется формулой

$$\mathbf{V} = V_0(\mathbf{n} + \delta\mu b^{-1}\mathbf{m})$$

В случае $a_0 = 0$ имеем $a = \delta a_1 + O(\delta^2)$. Для a_1 получается уравнение

$$a_1^2 - \mu(J_1 - \mathbf{m}\cdot\mathbf{n})a_1 + \mu^2(J_2 - J_1\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{l}\cdot\mathbf{n}) = 0$$

решение которого

$$a_1 = \frac{\mu}{2}\left\{J_1 - \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} \pm (J_1 + \mathbf{m}\cdot\mathbf{n})\left[1 - \frac{4(J_2 + \mathbf{l}\cdot\mathbf{n})}{(J_1 + \mathbf{m}\cdot\mathbf{n})^2}\right]^{1/2}\right\} \tag{3.12}$$

Для того чтобы показать неотрицательность подкоренного выражения в решении (3.12), воспользуемся ортонормированным базисом, совпадающим с тройкой собственных векторов тензора $\mathbf{e}$. Тогда условие неотрицательности сводится к неравенству

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{i=1}^{3}(1 + n_i^2)e_i\right\}^2 + 2\sum_{i=1}^{3}(1 - 2n_i^2)e_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{3}e_i\right)^2 =\\
&= (1 - n_1^2)^2 e_1^2 + (1 - n_2^2)^2 e_2^2 + (1 - n_3^2)^2 e_3^2 + 2(n_1^2 n_2^2 - n_3^2)e_1e_2 +\\
&+ 2(n_1^2 n_3^2 - n_2^2)e_1e_3 + 2(n_2^2 n_3^2 - n_1^2)e_2e_3 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Рассматриваемая симметричная квадратичная форма будет неотрицательной тогда и только тогда, когда неотрицательны все миноры определителя, симметричные относительно главной диагонали матрицы коэффициентов. Непосредственным вычислением находим, что все миноры второго порядка равны $4n_1^2n_2^2n_3^2 \geqslant 0$, минор третьего порядка равен нулю. Таким образом, квадратичная форма неотрицательна и рассматриваемые скорости распространения

$$\rho c^2 = \mu + \frac{\mu}{2}\left\{\operatorname{tr}\mathbf{e} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{en} \pm (\operatorname{tr}\mathbf{e} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{en})\left[1 - \frac{4(J_2\|\mathbf{e}\|^2 + \mathbf{en}\cdot\mathbf{en})}{(J_1\|\mathbf{e}\| + \mathbf{n}\cdot\mathbf{en})^2}\right]^{1/2}\right\}$$

— действительные величины. В отличие от нулевого приближения эти скорости не являются кратными при $\|\mathbf{e}\| \neq 0$. Поляризация таких волн определяется единственным образом системой (3.10) и, в частности, характеризуется тем, что вектор слабого разрыва скорости имеет нормальную составляющую, пропорциональную $\delta = \|\mathbf{e}\|$. Это свойство позволяет назвать рассматриваемые волны квазипоперечными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Truesdell C.*, *Noll W.* Handbuch der Physik. Bd./111/3. The nonlinear field theories of mechanics. B: Springer, 1965. 602s.
2. *Ильюшин А. А.*, *Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. *Лодж А.* Эластичные жидкости. М.: Наука, 1969. 463с.

4. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
5. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория. М.: Высш. школа, 1983. 399с.
6. *Lee E. H.* Elastic—plastic deformation at finite strains.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, v. 36, No. 1, p. 1—6.—Рус. перев.: Тр. Амер. о-ва инж. мех. Сер. Е. Прикл. механика 1969, № 1, с. 1—8.
7. *Freund L. B.* Constitutive equations for elastic—plastic materials at finite strain.— Intern. J. Solids and Struct., 1970, № 6, p. 1193—1209.
8. *Кондауров В. И.* Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями.— ПМТФ, 1982, № 4, с. 133—139.
9. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
10. *Noll W.* Proof of maximality of the orthogonal group in the unimodular. group.— Arch. Rat. Mech. and Analys., 1965, v. 18 No. 1, p. 100—102.

Москва

Поступила в редакцию
27.IX.1984