УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ О ТОНКИХ ОТСЛОИВШИХСЯ ВКЛЮЧЕНИЯХ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Сметанин Б. И.

Рассматривается интегральное уравнение первого рода, возникающее в некоторых задачах теории упругости для тел с отслоившимися включениями [1]. Устанавливается структура его решения. Асимптотическим методом «больших λ» [2] строится эффективное решение этого уравнения. В качестве примера исследуется антиплоская задача о сдвиге отслоившейся полосы, расположенной в срединной плоскости упругого слоя.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1} q(\xi)\, k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \qquad (|x| \leqslant 1, \lambda \in (0, \infty)) \tag{1.1}$$

Здесь $q(x)$ — функция, подлежащая определению, $k(t)$ и $f(x)$ — заданные функции. Ядро этого уравнения имеет вид

$$k(t) = \int_0^\infty [\Lambda_1(u) \cos ut - \Lambda_2(u) \sin ut] \frac{du}{u} \tag{1.2}$$

Функции $\Lambda_n(z)$ $(n = 1, 2)$ в плоскости комплексного переменного $z = u + iv$ являются мероморфными функциями, действительными при $v = 0$. На оси $v = 0$ функция $\Lambda_1(u)$ имеет единственный нуль $u = 0$ и не имеет полюсов, функция $\Lambda_2(z)$ на оси $v = 0$ не имеет ни нулей, ни полюсов. Функции $\Lambda_n(u)$ при $|u| \to \infty$ удовлетворяют условию

$$\Lambda_n(u) \to 1 + O(e^{-\varkappa_n |u|}) \qquad (|u| \to \infty;\ \varkappa_n > 0;\ n = 1, 2) \tag{1.3}$$

Лемма 1. При всех значениях $0 \leqslant |t| < \infty$ справедливо представление

$$k(t) = -\ln|t| - 0{,}5\pi \operatorname{sgn} t + F(t) \tag{1.4}$$

$$F(t) = \int_0^\infty \{[\Lambda_1(u) - 1] \cos ut + e^{-u} - [\Lambda_2(u) - 1] \sin ut\} \frac{du}{u} \tag{1.5}$$

причем $F(w)$ как функция комплексного переменного $w = t + i\tau$ регулярна в полосе $|t| < \infty$, $|\tau| < \varkappa_* = \min(\varkappa_1, \varkappa_2)$. При $|t| < \varkappa_*$ функция $F(t)$ представима абсолютно сходящимся рядом

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \tag{1.6}$$

Для доказательства представления (1.4), (1.5) следует воспользоваться формулой (22.29) работы [2] и интегралом [3]

$$\int_0^\infty \frac{\sin ut}{u} du = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t$$

Регулярность функции $F(t)$ в полосе $|\tau| < \varkappa_*$ вытекает из свойств функций $\Lambda_n(z)$ и теоремы A, приведенной в § 1.4 работы [4]. Из регулярности $F(w)$ следует, что $F(t)$ при $0 \leqslant |t| < \infty$ непрерывна со всеми производными. Раскладывая $\cos ut$ и $\sin ut$ в (1.5) в степенные ряды, получим представление (1.6) и коэффициенты этого разложения в виде

$$b_0 = \int_0^\infty [\Lambda_1(u) - 1 + e^{-u}] \frac{du}{u} \tag{1.7}$$

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\infty [\Lambda_1(u) - 1] u^{2n-1} du \qquad (n \neq 0)$$

$$b_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^\infty [1 - \Lambda_2(u)] u^{2n} du \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Так как $|t| \leqslant 2/\lambda$, то решение уравнения (1.1), полученное с использованием разложения (1.6), будет иметь смысл по крайней мере при $\lambda > \lambda_1$, где $\lambda_1 = 2/\varkappa_*$.

Преобразуем интегральное уравнение (1.1) с учетом (1.4) к виду

$$\int_{-1}^{1} \left[\ln \frac{\lambda}{|\xi - x|} + b_0 - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\xi - x)\right] q(\xi) d\xi = \tag{1.8}$$

$$= \pi f(x) - \int_{-1}^{1} q(\xi) \left[F\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) - b_0\right] d\xi \qquad (|x| \leqslant 1)$$

Далее рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1} \left[\ln \frac{\lambda}{|\xi - x|} + b_0 - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\xi - x)\right] q(\xi) d\xi = \pi f(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.9}$$

Как будет показано ниже, решение уравнения (1.9) является главным членом асимптотики решения уравнения (1.1) при больших значениях параметра λ. Продифференцировав по x уравнение (1.9), получим сингулярное интегральное уравнение

$$\pi q(x) + \int_{-1}^{1} \frac{q(\xi)}{\xi - x} d\xi = \pi f'(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.10}$$

Решение уравнения (1.10) имеет вид [5]

$$q(x) = \frac{Q}{\pi \sqrt{2} X(x)} + \frac{f'(x)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{X(\xi) f'(\xi)}{X(x)(\xi - x)} d\xi \tag{1.11}$$

$$Q = \int_{-1}^{1} q(x) dx, \qquad X(x) = (1 + x)^{3/4} (1 - x)^{1/4} \tag{1.12}$$

Первое слагаемое, стоящее в правой части равенства (1.11), есть решение однородного уравнения (1.10), поэтому постоянная Q произвольна.

Формула (1.11) представляет собой также решение уравнения (1.9) при условии

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}\,(\ln 4\lambda + b_0)} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{X(-x)} dx \tag{1.13}$$

Для получения (1.13) необходимо уравнение (1.9) умножить на $X^{-1}(-x)$ и проинтегрировать по x в пределах от -1 до 1, воспользовавшись формулой (6.7) из таблицы A работы [1].

Далее понадобятся значения интеграла [6]

$$\int_{-1}^{1} \frac{\xi^n X(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = \pi x^n X(x) - \tag{1.14}$$

$$- \pi \sqrt{2} \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j (-{}^3/_4)_j (-{}^1/_4)_{m-j}}{(m-j)!\, j!}\, x^{n-m+1}$$

$$(z)_m = z(z+1)\ldots(z+m-1), \quad (z)_0 = 1, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Исследуем структуру решения интегрального уравнения (1.9).

Теорема 1. Если функция $f(x) \in H_{n+1}^{\alpha}(-1, 1)$, $n \geqslant 0$, $0 < \alpha$, то решение интегрального уравнения (1.9) $q(x)$ имеет вид

$$q(x) = \omega(x) X^{-1}(x), \quad \omega(x) \in C_n(-1, 1) \tag{1.15}$$

Здесь $H_n^{\alpha}(-1, 1)$ — пространство функций, n-я производная которых удовлетворяет при $x \in [-1, 1]$ условию Гельдера с показателем α, $C_n(-1, 1)$ — пространство функций, n-я производная которых непрерывна при $x \in [-1, 1]$ [7].

Для доказательства теоремы преобразуем (1.11) с учетом (1.14) к следующему виду

$$\omega(x) = Q(\pi\sqrt{2})^{-1} + (2\sqrt{2})^{-1}(1 + 2x) f'(x) - \chi(x) \tag{1.16}$$

$$\chi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{X(\xi)[f'(\xi) - f'(x)]}{\xi - x}\, d\xi \tag{1.17}$$

Продифференцировав формально n раз по x интеграл (1.17) и воспользовавшись формулой (7.4) работы [8], получим

$$\chi^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{X(\xi)\chi_*(x, \xi)}{|\xi - x|^{\beta}}\, d\xi \quad (1 - \alpha < \beta < 1) \tag{1.18}$$

Функция $\chi_*(x, \xi)$ удовлетворяет условию Гельдера при $|x| \leqslant 1$, $|\xi| \leqslant 1$. Из ограниченности функции $X(\xi)\, \chi_*(x, \xi)$ при $|x| \leqslant 1$, $|\xi| \leqslant 1$ следует равномерная относительно x сходимость интеграла (1.18). Тем самым также обосновано дифференцирование под знаком этого интеграла. Следовательно, $\chi^{(n)}(x)$ — непрерывная функция, и теорема доказана.

Теорема 2. Если функция $f(x) \in H_{n+1}^{\alpha}(-1, 1)$, $n \geqslant 0$, ${}^1/_4 < \alpha$ и выполнено соотношение

$$Q - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{f'(\xi)}{Y(\xi)}\, d\xi = 0 \tag{1.19}$$

то решение интегрального уравнения (1.9) имеет вид

$$q(x) = \psi(x) Y(x), \quad \psi(x) \in C_n(-1, 1) \tag{1.20}$$

Для доказательства теоремы соотношение (1.11) следует преобразовать с учетом значения интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{Y(\xi)(\xi - x)} = \pi\left[\frac{1}{Y(x)} - \sqrt{2}\right], \quad Y(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/4} \tag{1.21}$$

и соотношения (1.19) к виду

$$q(x) = \frac{Y(x)}{\sqrt{2}} f'(x) - \frac{Y(x)}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{Y(\xi)(\xi - x)}\, d\xi \tag{1.22}$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Отметим, что условие (1.19) равносильно условию $\omega(-1) = 0$.

Теорема 3. Если функция $f(x) \in H_{n+1}^{\alpha}(-1, 1)$, $n \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, а решение интегрального уравнения (1.1) существует в $L_p(-1, 1)$, $p > 1$, то решение этого уравнения $q(x)$ при всех $\lambda \in (0, \infty)$ имеет вид

$$(1.23) \qquad q(x) = \Omega(x) X^{-1}(x), \quad \Omega(x) \in C_n(-1, 1)$$

Здесь $L_p(-1, 1)$ — пространство функций, абсолютно суммируемых со степенью p при $x \in [-1, 1]$ [7].

Теорема 4. Если функция $f(x) \in H_{n+1}^{\alpha}(-1, 1)$, $n \geqslant 0$, $1/4 < \alpha \leqslant 1$, а решение интегрального уравнения (1.1) существует в $L_p(-1, 1)$, $p > 1$ и выполнено условие

$$(1.24) \qquad \Omega(-1) = 0$$

то решение этого уравнения $q(x)$ при всех $\lambda \in (0, \infty)$ имеет вид

$$(1.25) \qquad q(x) = \Psi(x) Y(x), \quad \Psi(x) \in C_n(-1, 1)$$

Доказательство теорем 3 и 4 строится с использованием теорем 1 и 2, леммы 1 и аналогично доказательству теорем 24.1, 24.2 работы [2].

Лемма 2. Если функция $f(x) \in H_{n+1}^{\alpha}(-1, 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то любое решение интегрального уравнения (1.1) или (1.8) из класса $L_p(-1, 1)$, $p > 1$ является также решением интегрального уравнения

$$(1.26) \qquad q(x) = \frac{Q}{\pi\sqrt{2}\, X(x)} + \frac{f'(x)}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{X(\xi) f'(\xi)}{X(x)(\xi - x)} d\xi + \frac{1}{2\pi^2\lambda X(x)} \int_{-1}^{1} q(\xi) M(x, \xi) d\xi \quad (|x| \leqslant 1)$$

$$(1.27) \qquad M(x, \xi) = \pi X(x) F'\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) - \int_{-1}^{1} \frac{X(\eta)}{\eta - x} F'\left(\frac{\xi - \eta}{\lambda}\right) d\eta$$

$$(1.28) \qquad Q = \frac{1}{\sqrt{2}\ln 4\lambda}\left[\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, dx}{X(-x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{X(-x)} \int_{-1}^{1} q(\xi) F\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi\right]$$

и наоборот. Интеграл, стоящий в правой части уравнения (1.8), благодаря свойствам функции $F(t)$ и условию $q(x) \in L_p(-1, 1)$, $p > 1$, является непрерывной со всеми производными по x функцией при $x \in [-1, 1]$ и $\lambda \in (0, \infty)$. Используя формулу обращения (1.11) с учетом (1.13), получим равенства (1.26) — (1.28). Возможность перестановки порядка интегрирования в двухкратном интеграле в (1.26), (1.27) обосновывается с использованием свойств функций $q(x)$, $F(t)$ и леммы из § 7 работы [5]. Обратное утверждение леммы вытекает из возможности преобразований при $q(x) \in L_p(-1, 1)$, $p > 1$ от (1.26) — (1.28) к (1.1).

Если $f(x) \in H_1^{\alpha}(-1, 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то в силу теоремы 3 решение интегрального уравнения (1.8) в классе $q(x) \in L_p(-1, 1)$, $p > 1$ можно искать в виде (1.23), где $\Omega(x) \in C(-1, 1)$. В этом случае уравнение (1.26) можно представить в форме

$$(1.29) \qquad \Omega = \Omega^0 + A(\Omega)$$

$$(1.30) \qquad \Omega^0(x) = \frac{Q}{\pi\sqrt{2}} + \frac{f'(x)}{2} X(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{X(\xi) f'(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

$$(1.31) \qquad A(\Omega) = \frac{1}{2\pi^2\lambda}\int_{-1}^{1} \frac{\Omega(\xi)}{X(\xi)} M(x, \xi) d\xi$$

Лемма 3. Оператор A, определяемый формулой (1.31), действует в пространстве $C(-1, 1)$.

Для доказательства леммы функцию $M(x, \xi)$ с учетом (1.14) следует преобразовать к виду

$$
(1.32) \qquad M(x,\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+2x)F'\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) - I(x,\xi)
$$

$$
I(x,\xi) = \int_{-1}^{1}\left[F'\left(\frac{\xi-\eta}{\lambda}\right) - F'\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)\right]\frac{d\eta}{X^{-1}(\eta)(\eta - x)}
$$

Дальнейшее доказательство леммы аналогично доказательству леммы 25.2 работы [2].

Теорема 5. Пусть функция $f(x) \in H_1^{\alpha}(-1, 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и справедливо неравенство

$$
(1.33) \qquad \lambda > \lambda_2 = \frac{3}{4}\left[D_1 + \sqrt{D_1^2 + {}^2/_3 D_2}\right]
$$

$$
D_1 = \max |F'(t)|, \quad D_2 = \max |F''(t)|, \quad t \in [0, \infty]
$$

В этом случае решение интегрального уравнения (1.29) в классе $C(-1, 1)$ существует, единственно и может быть получено последовательными приближениями по схеме

$$
(1.34) \qquad \Omega^n(x) = \Omega^0(x) + A(\Omega^{n-1})
$$

Для доказательства теоремы оценим $|M(x, \xi)|$. Из (1.32) получим

$$
(1.35) \qquad |M(x,\xi)| \leqslant \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\max|F'(t)| + |I(x,\xi)| < \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\left(D_1 + \frac{1}{4\lambda}D_2\right)
$$

Учитывая (1.35), из (1.31) определим

$$
(1.36) \qquad \|A(\Omega)\|_C = \frac{1}{2\pi^2\lambda}\max_{|x|\leqslant 1}\left|\int_{-1}^{1}\frac{\Omega(\xi)}{X(\xi)}M(x,\xi)\,d\xi\right| <
$$

$$
< \frac{3}{2\lambda}\|\Omega\|_C\left(D_1 + \frac{1}{4\lambda}D_2\right)
$$

Из (1.36) следует, что при выполнении условия (1.33) в силу принципа Банаха «неподвижной точки» оператор A — сжимающий в $C(-1, 1)$.

Рассмотрим более удобный путь построения приближенного решения интегрального уравнения (1.26) при больших значениях параметра λ. Решение этого уравнения будем искать в виде [2]

$$
(1.37) \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x)\lambda^{-n}
$$

Внося (1.37) и (1.6) в (1.26), (1.27), используя (1.14) и приравнивая затем члены при одинаковых степенях λ в левой и правой частях полученного уравнения, придем к следующей бесконечной системе уравнений для последовательного определения функций $q_n(x)$:

$$
(1.38) \qquad q_0(x) = \frac{Q}{\pi\sqrt{2}X(x)} + \frac{f'(x)}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{X(\xi)f'(\xi)}{X(x)(\xi - x)}d\xi
$$

$$
q_1(x) = \frac{(1+2x)b_1}{2\sqrt{2}\pi X(x)}\int_{-1}^{1}q_0(\xi)\,d\xi
$$

$$q_2(x)=\frac{b_2}{\sqrt{2}\,\pi X(x)}\int_{-1}^{1}q_0(\xi)\left[(1+2x)(\xi-x)+\frac{3}{4}\right]d\xi+$$

$$+\frac{(1+2x)\,b_1}{2\sqrt{2}\,\pi X(x)}\int_{-1}^{1}q_1(\xi)\,d\xi$$

и т. д. Можно показать, что функции $q_n(x)$ должны удовлетворять условию

$$\int_{-1}^{1}q_n(x)\,dx=\begin{cases}Q, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}\tag{1.39}$$

Условие (1.39) можно использовать для контроля правильности определения функций $q_n(x)$ и для облегчения их нахождения по формулам (1.38). Обрывая процесс определения функций $q_n(x)$, получим приближенное решение интегрального уравнения (1.1) в виде

$$q(x)=\sum_{n=0}^{N}q_n(x)\,\lambda^{-n}+O(\lambda^{-N-1})\tag{1.40}$$

После нахождения функций $q_n(x)$ постоянная Q определяется из следующего уравнения, вытекающего из (1.28).

$$Q(\ln 4\lambda+b_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,dx}{X(-x)}-\frac{b_1}{\lambda}\int_{-1}^{1}q_0(\xi)\left(\xi-\frac{1}{2}\right)d\xi-$$
$$-\frac{1}{\lambda^2}\left[b_1\int_{-1}^{1}q_1(\xi)\,\xi\,d\xi+b_2\int_{-1}^{1}q_0(\xi)\left(\xi^2-\xi+\frac{5}{8}\right)d\xi\right]+O(\lambda^{-3})\tag{1.41}$$

Для частного случая $f(x)=f_*=\mathrm{const}$, произведя вычисления по формулам (1.38), (1.41), получим

$$q(x)=\frac{Q}{\pi\sqrt{2}\,X(x)}\left\{1+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{b_1}{\lambda}-\left(x^2+x-\frac{1}{8}\right)\frac{2b_2}{\lambda^2}-\right.$$
$$-\left[\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\right)b_2-\left(x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}\right)b_3\right]\frac{3}{\lambda^3}-$$
$$-\left[b_2^2\left(x+\frac{1}{2}\right)-3b_3\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{32}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+b_4\left(4x^4+8x^3+9x^2+3x-\frac{87}{32}\right)\right]\frac{1}{\lambda^4}+O(\lambda^{-5})\right\}\tag{1.42}$$

$$Q=\pi f_*\left\{\ln 4\lambda+b_0-\frac{b_1}{\lambda}+\left(\frac{3}{8}b_1^2+\frac{7}{4}b_2\right)\frac{1}{\lambda^2}-\right.$$
$$-\left(b_1b_2+\frac{11}{4}b_3\right)\frac{1}{\lambda^3}-\left(\frac{9}{32}b_1b_2-\frac{27}{16}b_1b_3-\frac{31}{64}b_2^2-\frac{329}{64}b_4\right)\frac{1}{\lambda^4}+$$
$$\left.+O(\lambda^{-5})\right\}^{-1}\tag{1.43}$$

Полученное решение интегрального уравнения (1.1) может быть использовано при $\lambda>\lambda_3=\max(\lambda_1,\lambda_2)$.

2. В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть область, занятая упругой средой,— бесконечный слой $|y|\leqslant h$, $|x|<\infty$, $|z|<\infty$. В плоскости $y=0$ при $|x|\leqslant a$, $|z|<\infty$ расположена тонкая жесткая полоса. Верхняя грань полосы скреплена с упругой средой, нижняя грань отслоилась от среды. Под действием силы T (отнесенной к единице длины полосы) полоса сдвинута в направлении оси z на величину ε. Будем также считать, что нижняя грань упругого слоя скреплена с недеформируемым основанием, верхняя грань свободна от нагрузки.

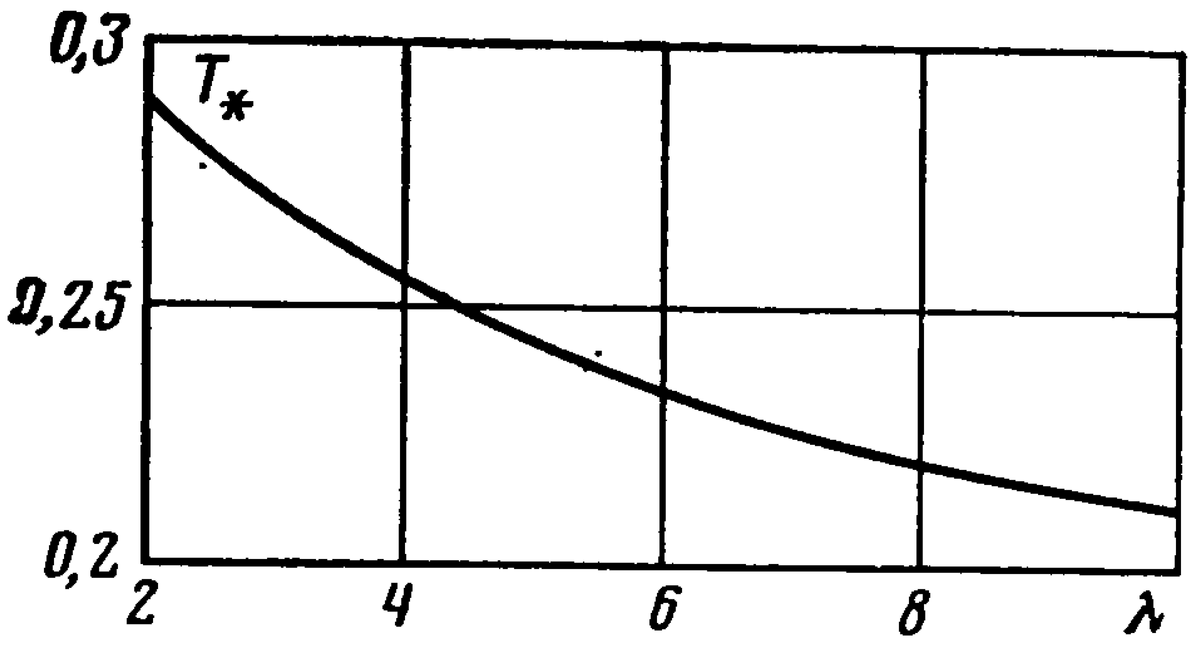
Методом интегральных преобразований эта задача сводится к решению интегрального уравнения (1.1), (1.2). При этом

$$(2.1)\qquad f(x)=f_*=\frac{2\varepsilon}{a},\quad \Lambda_1(u)=\operatorname{th}2u,\quad \Lambda_2(u)=\frac{\operatorname{th}2u}{\operatorname{th}u},\quad \lambda=\frac{h}{a}$$

$$(2.2)\qquad \tau(x)=\frac{\mu}{2}\left[q\left(\frac{x}{a}\right)+q\left(-\frac{x}{a}\right)\right],\qquad T=\int_{-a}^{a}\tau(x)\,dx=a\mu Q$$

$$w_x'(x,-0)=\frac{1}{2}\left[q\left(\frac{x}{a}\right)-q\left(-\frac{x}{a}\right)\right]\qquad (|x|\leqslant a)$$

Здесь μ — модуль сдвига, $\tau(x)$ — функция, характеризующая распределение касательных напряжений в области контакта полосы с упругой средой, $w(x, y)$ — проек-



ция вектора перемещения на ось z. Вычисляя интегралы в (1.7) с учетом значений функций $\Lambda_n(u)$, получим

$$(2.3)\qquad b_0=\ln\frac{8}{\pi},\qquad b_{2n}=\frac{\pi^{2n}(2^{2n-1}-1)B_{2n}}{4^{2n}n(2n)!}\qquad (n=1,2,\ldots)$$

$$b_{2n+1}=-\frac{\pi^{2n+1}E_{2n}}{4^{2n+1}(2n+1)!}\qquad (n=0,1,\ldots)$$

В (2.3) B_m — числа Бернулли, E_m — числа Эйлера [3]. Из (2.1) и (1.5) определим: $\varkappa_1=4$, $\varkappa_2=2$, $D_1=1$, $D_2=1/2$. Следовательно, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=1{,}616$. Практически для рассматриваемого случая формулы (1.42), (1.43) могут быть использованы при $\lambda\geqslant 2$.

На фигуре представлена зависимость величины $T_*=T(2\pi\mu\varepsilon)^{-1}$ от параметра λ, полученная при помощи формул (1.43), (2.1)—(2.3). При $10\leqslant\lambda\leqslant\infty$ с погрешностью, не превышающей 2%, можно использовать формулу

$$(2.4)\qquad T_*=[\ln(32\lambda\pi^{-1})]^{-1}$$

При $\lambda\to\infty$ зависимость между силой T и величиной смещения полосы ε определить нельзя.

Решение интегрального уравнения (1.1) может быть также построено методом ортогональных полиномов. При этом целесообразно использовать спектральное соотношение (6.7) из таблицы A работы [1].

Отметим, что в осесимметричных задачах о тонких отслоившихся включениях в упругих телах функция, характеризующая распределение контактных напряжений, выражается через решение уравнения вида (1.1) при помощи некоторого интегрального оператора. Условие принадлежности этой функции к пространству L_p, $p>1$ приводит к необходимости построения решения уравнения (1.1) в виде (1.25)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
2. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. *Попов Г. Я.* К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1963, т. 16, № 2, с. 15—32.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
26.III.1984