Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 539.3

ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Плевако В. П.

Рассматривается следующая задача: найти закон распределения параметров упругости материала в теле по заданному напряженному состоянию. Выделены три разновидности этой проблемы: 1) заданы напряжения и модуль сдвига, требуется определить закон изменения коэффициента Пуассона в теле; 2) заданы напряжения и коэффициент Пуассона, нужно определить характер изменения модуля сдвига материала тела; 3) найти множество функций, описывающих закон изменения двух параметров упругости материала при известном напряженном состоянии тела.

Показано, что первый тип обратной задачи сводится к решению уравнения Пуассона. Остальные два — к решению дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Исследованы его решения для напряженных состояний с нулевыми касательными напряжениями. Как известно из классической теории упругости, напряженные состояния подобного вида могут возникать в телах типа длинной трубы, находящейся под действием внутреннего и внешнего давлений, при чистом изгибе кривого бруса, в клине, в задачах о концентрации напряжений около отверстий и др.

Для второго типа обратной задачи получен обширный класс частных решений, когда на напряжения можно не налагать никаких ограничений, за исключением интегрируемости заданных функций.

Показано, что при решении третьего типа обратных задач, когда переменны оба параметры упругости, законы их изменения могут быть выражены через одну произвольную функцию.

Впервые подобные проблемы были исследованы в работах [1, 2]. Полученные к настоящему времени решения относятся в основном к телам простейших форм и элементарных напряженных состояний. Так, рассматривались [1] прямоугольные элементы с напряженными состояниями типа чистого сдвига, растяжения — сжатия или изгиба. Изучалась [2, 3] проблема отыскания закона изменения модуля Юнга в клине с радиальным распределением напряжений. Получено [4] приближенное решение двумерной задачи для длинного цилиндра. Обзоры работ, посвященных рассматриваемой проблеме, даны в библиографических указателях [5, 6] и монографиях [7, 8].

В теории упругости неоднородных сред термином «обратная задача» принято обозначать весь комплекс проблем, связанных с отысканием закона изменения параметров упругости материала по заданным напряжениям [7]. Такое определение не может охватить все возможные постановки обратных задач, и его нужно дополнить. Для этого по аналогии с классической теорией упругости все многообразие проблем разделим на три группы, выделив первую, вторую и смешанную обратные задачи механики неоднородных сред. Конечной целью при решении каждой из них является отыскание закона распределения параметров упругости в теле, а различаются задачи лишь исходными данными. В первой обратной задаче считаются заданными напряжения в теле, во второй — перемещения, а в смешанной — отдельные компоненты тензора напряжений и вектора смещений.

Различия в исходных данных предопределяют и существенные различия в методиках решения. Ниже рассматривается первая обратная задача теории упругости неоднородных сред.

1. Для решения первой обратной задачи теории упругости неоднородных сред необходимо разрешить уравнение неразрывности, в котором деформации выражены через напряжения. В полярной системе координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\beta = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$ это уравнение может быть записано в форме

$$
\left[\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]\left[\frac{1-2\nu}{2G^*}(\sigma_r+\sigma_\beta)\right]-
\tag{1.1}
$$

$$
-\left[\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+2r\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]\frac{\sigma_r-\sigma_\beta}{2G^*}-2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\frac{\tau_{r\beta}}{G^*}=0
$$

$$
G^*=\frac{G}{G_0}
$$

Здесь σ_r, σ_β, $\tau_{r\beta}$ — компоненты тензора напряжений, $\nu=\nu\,(r,\,\beta)$ — коэффициент Пуассона, $G^*=G^*\,(r,\,\beta)$ — относительный модуль сдвига, G_0 — значение модуля сдвига в какой-либо точке тела. Уравнение (1.1) составлено для случая плоской деформации. При плоском напряженном состоянии ν нужно заменить на $\nu/(1+\nu)$.

Анализ уравнения (1.1) показывает, что возможны три разновидности первой обратной задачи: 1) заданы σ_r, σ_β, $\tau_{r\beta}$ и $G\,(r,\,\beta)$, нужно в области S, занятой телом, найти закон изменения коэффициента Пуассона $\nu\,(r,\,\beta)$; 2) заданы напряжения и функция $\nu\,(r,\,\beta)$, требуется отыскать закон изменения модуля сдвига $G\,(r,\,\beta)$; 3) известны только напряжения и нужно найти множество функций $G\,(r,\,\beta)$ и $\nu\,(r,\,\beta)$, при которых реализуется заданное напряженное состояние.

2. Первый случай наиболее простой. Для решения этого типа обратных задач уравнение (1.1) следует записать в виде (Δ — двумерный оператор Лапласа)

$$
\Delta N=Q\,(r,\,\beta),\quad N=\frac{1-2\nu}{G^*}(\sigma_r+\sigma_\beta)
\tag{2.1}
$$

$$
Q=\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]\frac{\sigma_r-\sigma_\beta}{G^*}+
$$

$$
+4\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{\tau_{r\beta}}{G^*}
$$

Располагая функциями σ_r, σ_β, $\tau_{r\beta}$ и $G^*\,(r,\,\beta)$, можно определить Q, и проблема отыскания $\nu\,(r,\,\beta)$ сведется к решению уравнения Пуассона (2.1). Обозначим через $\psi\,(r,\,\beta)$ какое-нибудь частное решение уравнения (2.1), а через $\Psi\,(r,\,\beta)$ — произвольную гармоническую функцию. Тогда из уравнения (2.1) следует, что

$$
\nu\,(r,\,\beta)=\frac{1}{2}-\frac{G^*(r,\,\beta)}{2\,(\sigma_r+\sigma_\beta)}(\Psi+\psi)
$$

3. Положим теперь, что удалось найти какое-либо частное решение обратной задачи. Обозначим через $G^*\,(r,\,\beta)$ и $\nu^0\,(r,\,\beta)$ функции, описывающие характер изменения параметров упругости материала в области S, занятой телом. Покажем, что, располагая таким решением, можно перейти к более общему случаю неоднородности.

Пусть $\nu^+\,(r,\,\beta)$ — закон изменения коэффициента Пуассона, не учтенный функцией $\nu^\circ\,(r,\,\beta)$. При этом в теле с относительным модулем сдвига $G^*\,(r,\,\beta)$ возникают те же напряжения, что и при коэффициенте Пуассона $\nu^\circ\,(r,\,\beta)$. Тогда более общий случай неоднородности будет описываться функциями

$$
G^*=G^*\,(r,\,\beta),\quad \nu=\nu^\circ\,(r,\,\beta)-\nu^+\,(r,\,\beta)
\tag{3.1}
$$

Задача, таким образом, состоит в отыскании $\nu^+\,(r,\,\beta)$.

Такая постановка проблемы близка по форме к рассмотренной в п. 2. Подставляя функции (3.1) и заданные напряжения σ_r, σ^β, $\tau_{r\beta}$ в уравнение (2.1) и учитывая, что G^* и ν° — его частные решения, получаем Δ [ν^+ (σ_r +

$+ \sigma_\beta)/G^*] = 0$. Отсюда следует, что

$$\nu^+ = G^* (\sigma_r + \sigma_\beta)^{-1} \Psi (r, \beta) \tag{3.2}$$

4. Решение задач, соответствующих другим разновидностям первой обратной задачи, связано с математическими трудностями. Чтобы упростить проблему, дальнейшие исследования будем вести применительно к частному случаю напряженного состояния, когда в области S, занятой телом, $\tau_{r\beta} \equiv 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда известны только напряжения и нужно найти множество функций $G^* (r, \beta)$, $\nu (r, \beta)$, при которых реализуется заданное напряженное состояние.

Введем в рассмотрение функцию $\Phi = \Phi (r, \beta)$, такую, что

$$G^* = \frac{\sigma_r - \sigma_\beta}{\Delta_1 \Phi}, \quad \nu = \frac{1}{2} - \frac{(\sigma_r - \sigma_\beta) \Delta_2 \Phi}{2 (\sigma_r + \sigma_\beta) \Delta_1 \Phi} \tag{4.1}$$

$$\left(\Delta_1 = \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad \Delta_2 = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1\right)$$

Подставляя эти зависимости в уравнение (1.1), видим, что при $\tau_{r\beta} \equiv 0$ оно тождественно удовлетворяется при любом выборе функции Φ. Таким образом, соотношения (4.1) дают общее решение рассматриваемого типа обратной задачи теории упругости неоднородных сред. Физический смысл, очевидно, имеют лишь те функции G^* и ν, которые в области, занятой телом, удовлетворяют условиям

$$0 < G < \infty, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant {}^1/_2 \tag{4.2}$$

Решая уравнения равновесия при $\tau_{r\beta} \equiv 0$, найдем, что допустимыми являются напряжения, которые могут быть представлены в виде

$$\sigma_\beta = \sigma (r), \quad \sigma_r = \frac{\varphi_1 (\beta)}{r} + \frac{1}{r} \int\limits_{\varphi_2(\beta)}^{r} \sigma (r)\, dr \tag{4.3}$$

причем $\sigma (r)$, $\varphi_{1,2} (\beta)$ — произвольные функции.

5. Наиболее трудным представляется тот тип обратной задачи, когда по известным напряжениям и коэффициенту Пуассона $\nu (r, \beta)$ требуется найти закон изменения модуля сдвига $G^* (r, \beta)$, так как приходится решать уравнение в частных производных с переменными коэффициентами (1.1), которое, как правило, не удается свести к изученным.

Исследуем это уравнение при $\tau_{r\beta} \equiv 0$. Кроме того, сначала будем полагать, что коэффициент Пуассона и напряжения — известные функции одной координаты r.

Запишем уравнение (1.1) в виде (штрих означает дифференцирование по r)

$$F'' + \frac{f+1}{r} F' + \frac{f'}{r} F - \frac{f-1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = 0$$

$$\left(f = \frac{\sigma_r - \sigma_\beta}{\nu \sigma_r - (1 - \nu) \sigma_\beta}, \quad F = \frac{\nu \sigma_r - (1 - \nu) \sigma_\beta}{G^*}\right)$$

Воспользовавшись методом разделения переменных $F = R_m (r) B_m (\beta)$, для отыскания функций $R_m (r)$ и $B_m (\beta)$ получим два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения (m — числовой параметр)

$$\frac{d^2 B_m}{d\beta^2} + m^2 B_m = 0 \tag{5.1}$$

$$R_m'' + \frac{f+1}{r} R_m' + \frac{1}{r}\left(f' + m^2 \frac{f-1}{r}\right) R_m = 0 \tag{5.2}$$

Интегрируя уравнение (5.1), имеем (A_{1m}, A_{2m} — произвольные постоянные)

(5.3) $$B_m = A_{1m}\cos m\beta + A_{2m}\sin m\beta, \quad m \neq 0; \quad B_0 = A_{10} + A_{20}\beta$$

Рассмотрим теперь уравнение (5.2). Можно указать [9] общий интеграл этого уравнения для многих простейших зависимостей $f(r)$, однако наибольший интерес представляет проблема отыскания решений хотя бы для отдельных значений параметра m и коэффициента Пуассона, когда на функцию $f(r)$ не требуется налагать никаких ограничений, за исключением ее интегрируемости, что позволило бы исследовать ряд обратных задач для тел с произвольными полями напряжений вида (4.3). Можно было бы рассмотреть даже случаи, когда напряжения $\sigma_\beta = \sigma(r)$ при некоторых r скачкообразно изменяются от одного конечного значения к другому.

Для параметра m такими частными значениями будут $m = 0$ и $m = 1$, причем на $\nu(r)$ ограничения, за исключением (4.2), не налагаются.

Действительно, в этом случае уравнение для R_m может быть записано в виде

(5.4) $$\left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r}\right)\left(\frac{d}{dr} + \frac{f-m}{r}\right)R_m = 0 \quad (m = 0,\ 1)$$

т. е. оно распадается на два уравнения первого порядка, решая которые, находим (C_{1m}, C_{2m} — произвольные постоянные)

(5.5) $$R_m = r^m e^{-\varphi}\left(C_{1m} + C_{2m}\int r^{-(2m+1)}e^{\varphi}\,dr\right), \quad \varphi = \int f\,\frac{dr}{r}$$

Приведем еще одну форму записи решения уравнения (5.4) в случае, когда напряжения и коэффициент Пуассона в теле таковы, что

(5.6) $$\frac{f-m}{r} = \frac{Q_1(r)}{Q_2(r)} \quad (m = 0,\ 1)$$

причем $Q_{1,2}(r)$ — полиномы, степень полинома $Q_2(r)$ больше степени $Q_1(r)$, а правая часть равенства (5.6) — несократимая дробь, которая, как известно, может быть преобразована в сумму элементарных дробей

$$\frac{f-m}{r} = \frac{a_1}{r-r_1} + \frac{a_2}{r-r_2} + \ldots + \frac{a_n}{r-r_n} \quad (Q_2(r_i) = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Решение уравнения (5.4) может быть представлено в эквивалентной решению (5.5) форме:

(5.7) $$R_m = (r-r_1)^{-a_1}(r-r_2)^{-a_2}\ldots(r-r_n)^{-a_n}\Big[C_{1m} + C_{2m}\int r^{-(m+1)}(r-r_1)^{a_1}\ldots(r-r_n)^{a_n}\,dr\Big]$$

Итак, общий интеграл уравнения (5.2) при $m = 0$, 1 и произвольных $\sigma_\beta(r)$, $\sigma_r(r)$, $\nu(r)$ имеет вид (5.5), а в частном случае, когда функция $(f - m)/r$ относится к типу (5.6), может быть представлен в форме (5.7).

Закон изменения модуля сдвига в теле имеет вид

(5.8) $$\frac{1}{G^*} = \frac{1}{\nu\sigma_r - (1-\nu)\sigma_\beta}\sum_{m=0}^{1} R_m(r)\,B_m(\beta)$$

Располагая этим решением, при помощи соотношений (3.1), (3.2) можно найти более общий случай неоднородности.

Если материал тела несжимаем ($\nu = 1/2$) и работает в условиях плоской деформации, то $f = 2$ при любых σ_r и σ_β, заданных в форме (4.3). Уравнение (5.2) преобразуется к виду

$$R_m'' + \frac{3}{r} R_m' + \frac{m^2}{r^2} R_m = 0$$

Его решения

$$(5.9) \qquad R_m = r^{-1} (C_{1m} \cos n\rho + C_{2m} \sin n\rho), \quad n = \sqrt{m^2 - 1}$$
$$\rho = \ln r, \quad m \neq 0, 1$$
$$R_0 = C_{10} + C_{20} r^{-2}, \quad R_1 = r^{-1} (C_{11} + C_{21} \ln r)$$

Таким образом, в случае плоской деформации неоднородного тела из несжимаемого материала закон изменения модуля сдвига в нем можно формально представить в виде ряда

$$(5.10) \qquad \frac{1}{G^*} = \frac{1}{\sigma_r - \sigma_\beta} \sum_{m=0}^{\infty} R_m(r) B_m(\beta)$$

При помощи соотношений (3.1), (3.2) от этого решения можно перейти к более общему случаю неоднородности, когда модуль сдвига в теле описывается зависимостью (5.10), а коэффициент Пуассона

$$(5.11) \qquad \nu = \frac{1}{2} - \frac{G^*}{\sigma_r + \sigma_\beta} \Psi(r, \beta)$$

Формула (5.11) получена для случая плоской деформации. При обобщенном плоском напряженном состоянии ν нужно заменить на $\nu/(1+\nu)$. Окончательно закон изменения коэффициента Пуассона в теле примет форму

$$(5.12) \qquad \nu = \frac{\sigma_r + \sigma_\beta - 2G^*\Psi(r, \beta)}{\sigma_r + \sigma_\beta + 2G^*\Psi(r, \beta)}$$

6. Если воспользоваться известными из теории упругости соотношениями между смещениями, деформациями и напряжениями, то можно определить компоненты вектора перемещений u_r и u_β.

Так, если ввести новые постоянные и обозначения

$$\chi_n^{\pm}(r) = \int e^{\pm\varphi} \frac{dr}{r^n}, \qquad U_{kl} = A_{k1} \cos\beta + A_{l1} \sin\beta$$
$$V_{kl} = A_{k1} \sin\beta - A_{l1} \cos\beta$$

то, согласно зависимостям (5.3), (5.5) и (5.8), закон изменения модуля сдвига при $\nu = {}^1/_2$ и $m = 0$ можно записать в форме

$$(6.1) \qquad \frac{1}{G^*} = \frac{e^{-\varphi}}{(1-\nu)\sigma_\beta - \nu\sigma_r} [A_{10} + A_{20}\beta + (A_{30} + A_{40}\beta)\chi_1^+(r)]$$

Отсюда находим

$$(6.2) \qquad 2G_0 u_r = (A_{10} + A_{20}\beta) re^{-\varphi} + (A_{30} + A_{40}\beta) r [e^{-\varphi}\chi_1^+(r) - 1] +$$
$$+ a \sin\beta + b \cos\beta$$
$$2G_0 u_\beta = -A_{20} r \chi_1^-(r) - A_{40} r \left[\int e^{-\varphi}\chi_1^+(r) \frac{dr}{r} - \ln r\right] +$$
$$+ \left(A_{30}\beta + A_{40}\frac{\beta^2}{2}\right) r + cr + a\cos\beta - b\sin\beta$$

При $m = 1$ имеем

$$(6.3) \qquad \frac{1}{G^*} = \frac{re^{-\varphi}}{\nu\sigma_r - (1-\nu)\sigma_\beta} [U_{12}(\beta) + \chi_3^+(r) U_{34}(\beta)]$$

$$(6.4) \qquad 2G_0 u_r = [\chi_{-1}^-(r) - r^2 e^{-\varphi}] U_{12}(\beta) +$$
$$+ \left[\int e^{-\varphi}\chi_3^+(r) r\,dr - r^2 e^{-\varphi}\chi_3^+(r) + \ln r - \frac{1}{2}\right] U_{34}(\beta) + \frac{\beta}{2} V_{34}(\beta)$$
$$2G_0 u_\beta = -\chi_{-1}^-(r) V_{12}(\beta) - \left[\int e^{-\varphi}\chi_3^+(r) r\,dr + \ln r\right] V_{34}(\beta) +$$
$$+ {}^1/_2 \beta U_{34}(\beta)$$

Аналогичные соотношения можно получить при $\nu = {}^1/_2$ и любых m.

7. Рассмотрим первую обратную задачу для длинного неоднородного цилиндра, находящегося в условиях плоской деформации под действием внутреннего p_0 и внешнего p_1 давлений (a и b — внутренний и внешний радиусы цилиндра). Ограничимся случаем, когда нужно отыскать функцию G^* (r, β) при известном коэффициенте Пуассона.

Если материал цилиндра однороден, то, как показал Ламе, напряженное состояние характеризуется отсутствием касательных напряжений. Положим, что и в случае неоднородного материала $\tau_{r\beta} \equiv 0$, а остальные компоненты тензора напряжений (σ_r, σ_β) зависят лишь от r. Кроме того, будем полагать, что $\nu \neq {}^1/_2$.

Как было показано выше, уравнение (5.2) для произвольной функции ν (r) удается проинтегрировать лишь для двух значений параметра m, причем модуль сдвига может быть представлен в форме (5.8) или, что то же самое, в виде суммы функций (6.1) и (6.3).

В решение обратной задачи входят произвольные постоянные и, чтобы избежать неопределенности, его нужно дополнить соответствующими краевыми условиями.

Из формул для смещений (6.2) и (6.4) следует, что перемещения в рассматриваемом случае будут определены однозначно, если положить

$$A_{20} = A_{30} = A_{40} = A_{31} = A_{41} = 0 \tag{7.1}$$

Оставшиеся произвольные постоянные можно определить потребовав, чтобы функция G^* (r, β) принимала заданные значения на одной из границ области, например при $r = a$.

Из соотношений (6.1) и (6.3) следует, что обратную задачу можно решить лишь при следующих краевых условиях (α_0, α_1, α_2 — постоянные):

$$r = a, \quad 1/G^* = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\beta + \alpha_2 \sin\beta$$

В качестве примера рассмотрим обратную задачу для неоднородного цилиндра при $\nu = \mathrm{const}$ и граничном условии

$$r = a, \quad G^* = 1 \tag{7.2}$$

Условие не зависит от β, и поэтому можно обойтись формулами (6.1) и (6.2), которые соответствуют случаю $m = 0$.

В инженерных расчетах труб на воздействие внутреннего и внешнего давлений для упрощения вычислений часто принимают $\sigma_\beta = c_1$. Исследуем возможный характер неоднородности цилиндра при этом допущении.

Из зависимостей (4.3) и граничных условий задачи следует, что

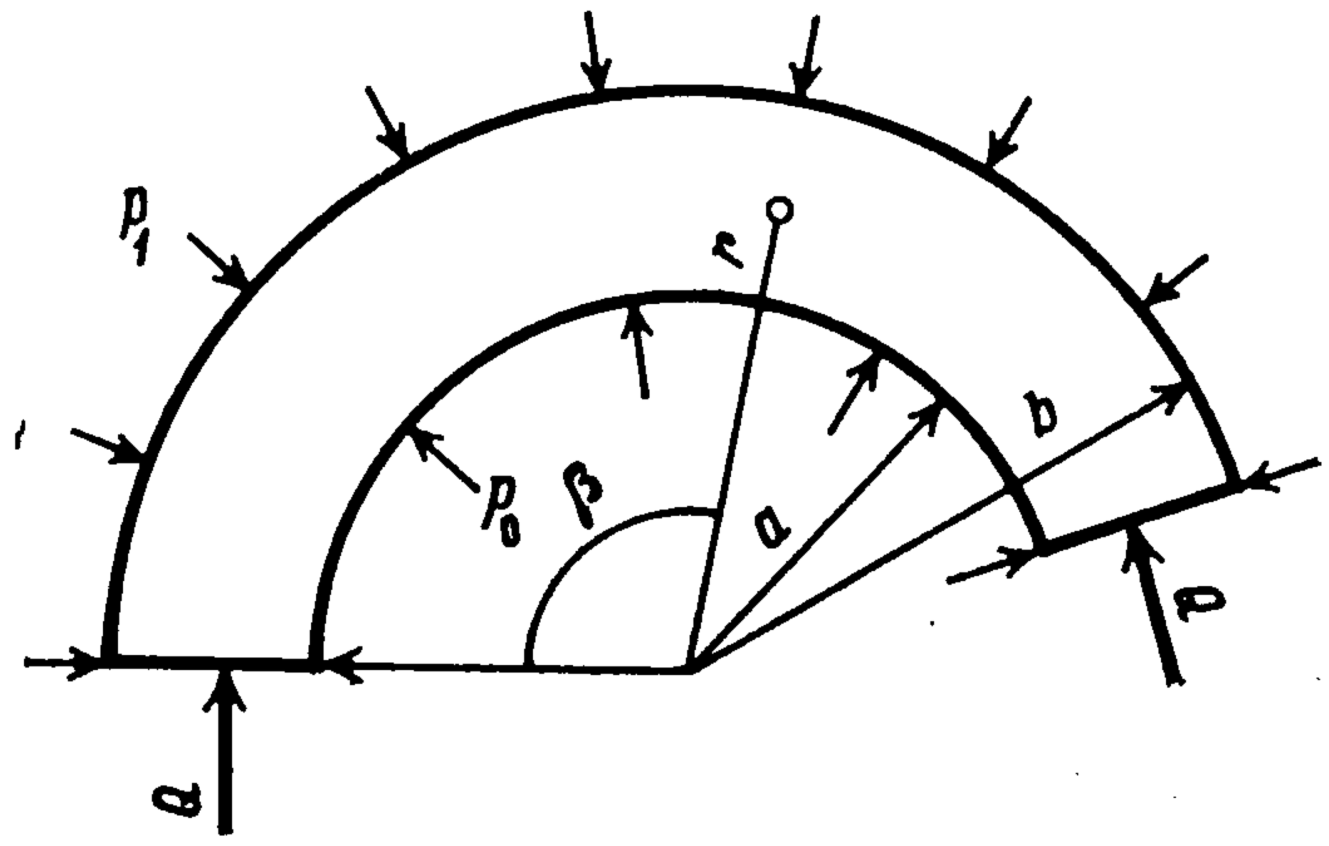
$$\sigma_r = \frac{c_0}{r} + c_1, \qquad c_0 = \frac{p_1 - p_0}{b - a}\, ab, \qquad c_1 = \frac{p_0 a - p_1 b}{b - a} \tag{7.3}$$

При $\nu \neq 0$, $1/2$ имеем

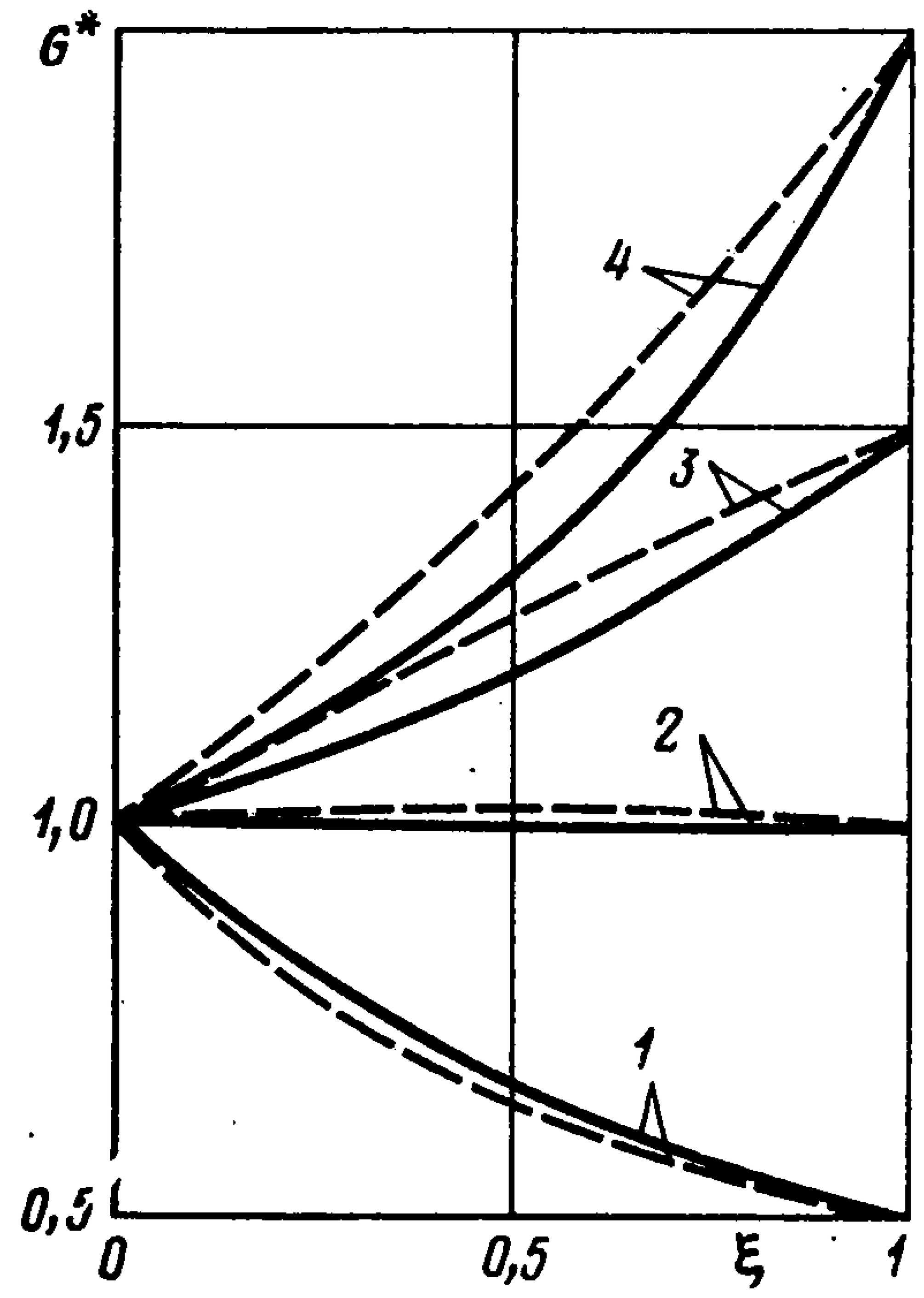
$$\frac{f}{r} = \frac{c_0}{\nu c_0 r - (1 - 2\nu) c_1 r^2} = \nu^{-1}\left[r^{-1} + \left(r - \frac{\nu}{1 - 2\nu}\alpha\right)^{-1}\right] \qquad \left(\alpha = \frac{c_0}{c_1}\right) \tag{7.4}$$

Из формул (5.7), (5.8) с учетом (6.1), (7.1) и (7.2) имеем

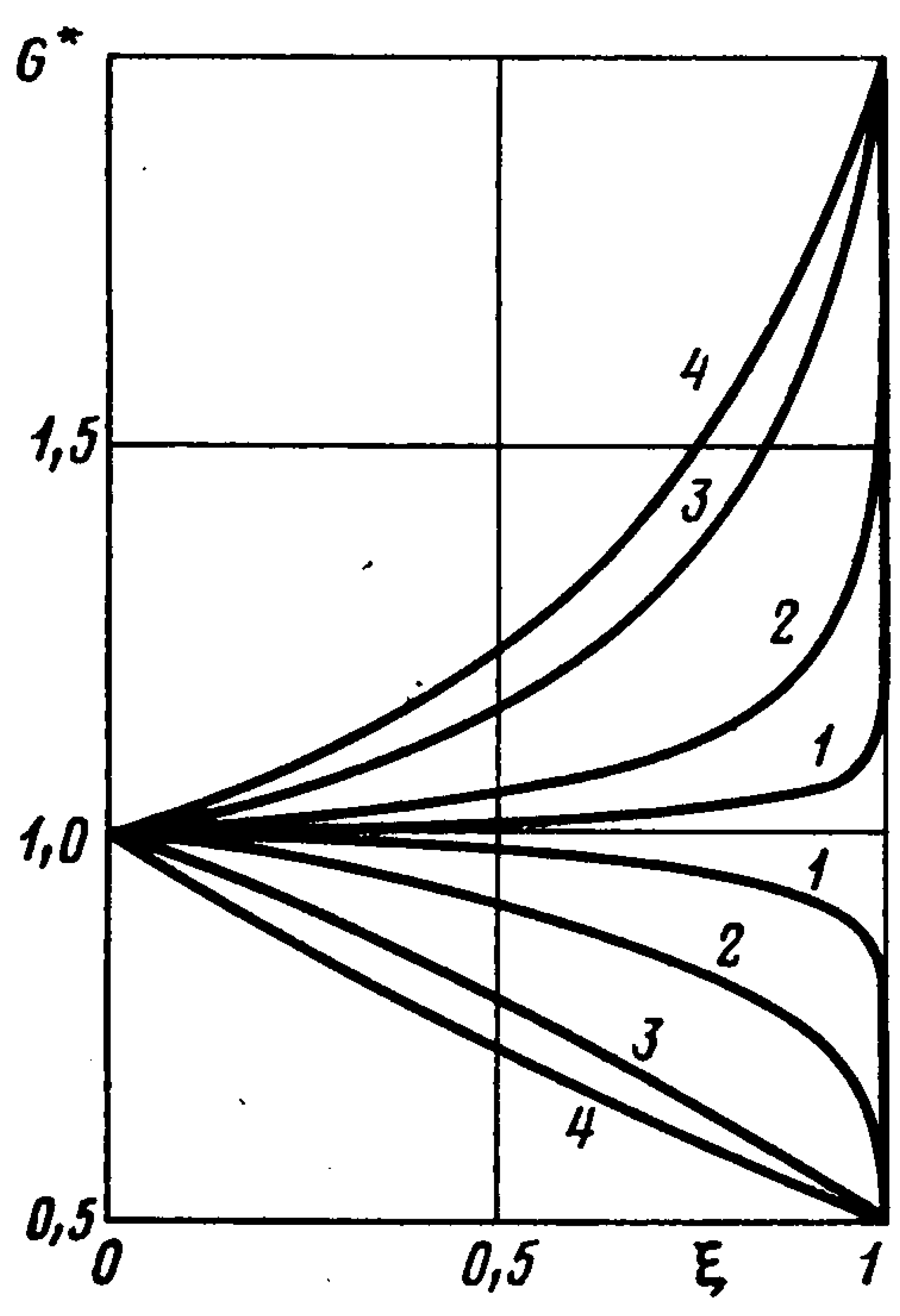
$$\frac{1}{G^*} = A_{10}\left[1 - \frac{\nu\alpha}{(1 - 2\nu) r}\right]^{1/\nu - 1} \qquad \left(A_{10} = \left[1 - \frac{\nu\alpha}{(1 - 2\nu) a}\right]^{1 - 1/\nu}\right)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Ниже приведены значения G^*, которые показывают характер изменения относительного модуля сдвига по толщине трубы при различных $\nu = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}4$ при $p_1 = 0$ и $b : a = 3 : 2$ ($\xi = (r - a)/(b - a)$, $G^* = 1$ при $\xi = 0$)

ν	$\xi = 0{,}2$	0,4	0,6	0,8	1
0,1	1,096	1,183	1,263	1,337	1,404
0,3	1,097	1,189	1,275	1,356	1,433
0,4	1,098	1,193	1,285	1,373	1,458

Видно, что изменение ν незначительно сказывается на функции $G^* (r)$.

8. Если решается обратная задача для односвязной области, то требование (7.1) можно не налагать. При этом удается выявить ряд важных эффектов влияния характера неоднородности на напряженное состояние тела.

Решим обратную задачу для неоднородного кривого бруса, занимающего область S: $[a < r < b,\ 0 < \beta < \alpha^*]$. На внутренней и внешней гранях бруса действуют сжимающие усилия p_0 и p_1, а на торцах $\beta = 0$ и $\beta = \alpha^*$ — нормальные усилия с равнодействующей Q (фиг. 1). Ограничимся случаем, когда требуется отыскать функцию G^* (r, β) при известном коэффициенте Пуассона.

Из зависимостей (6.1) и (6.3) следует, что при $\nu \neq {}^1/_2$ обратную краевую задачу можно решить при следующих краевых условиях на гранях:

$$
\begin{aligned}
(8.1)\qquad & r = a, \quad 1/G^* = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\beta + \alpha_2 \sin\beta + \alpha_3 \beta \\
& r = b, \quad 1/G^* = \gamma_0 + \gamma_1 \cos\beta + \gamma_2 \sin\beta + \gamma_3 \beta
\end{aligned}
$$

Если коэффициент Пуассона $\nu = {}^1/_2$ или меняется в пределах тела в соответствии с зависимостью (5.11), то рассматриваемую задачу удается решить для наиболее общего случая краевых условий

$$(8.2)\qquad r = a,\quad G^* = G_0^*(\beta);\quad r = b,\quad G^* = G_1^*(\beta)$$

Действительно, модуль сдвига в этом случае может быть записан в форме (5.10).

Выражая $B_m(\beta)$ через тригонометрические функции при $A_{1m} = 1$, $A_{2m} = 0$, подставим зависимость (5.10) в краевые условия (8.2). В результате найдем

$$(8.3)\qquad \left\|\begin{matrix} 1/G_0^* \\ 1/G_1^* \end{matrix}\right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \cos m\beta \left\|\begin{matrix} H_m(a) \\ H_m(b) \end{matrix}\right\| \left(H_m(r) = \frac{R_m(r)}{\sigma_r - \sigma_\beta},\ m = \frac{2k\pi}{\alpha^*}\right)$$

Разложив теперь левую часть в ряд Фурье

$$\left\|\begin{matrix} 1/G_0^* \\ 1/G_1^* \end{matrix}\right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \cos m\beta \left\|\begin{matrix} \alpha_{0k} \\ \alpha_{1k} \end{matrix}\right\|$$

и собрав подобные члены при всех $\cos m\beta$, приравняем их нулю. В результате для каждого k получим простые алгебраические уравнения для определения всех произвольных постоянных, которые входят в функции $H_m(r)$.

В качестве примера рассмотрим первую обратную задачу для кривого бруса при $\nu = \text{const}$ и следующих граничных условиях:

$$(8.4)\qquad r = a,\ G^* = 1;\quad r = b,\quad G^* = G_1^*\quad (G_1^* = \text{const})$$

Условия не зависят от β, и поэтому закон изменения модуля сдвига можно представить в форме (6.1) при $A_{20} = A_{40} = 0$.

Исследуем случай, когда напряженное состояние неоднородного бруса совпадает с напряженным состоянием однородного, т. е. имеет вид

$$(8.5)\qquad \sigma_r = \frac{A}{r^2} + B,\quad \sigma_\beta = -\frac{A}{r^2} + B,\quad A = \frac{a^2b^2(p_1 - p_0)}{b^2 - a^2},\quad B = \frac{a^2p_0 - b^2p_1}{b^2 - a^2}$$

Тогда

$$\frac{f}{r} = \frac{2A}{r[A - (1 - 2\nu)Br^2]} = \frac{2}{r} - \frac{1}{r - r_0} - \frac{1}{r + r_0}$$

$$r_0 = \left[\frac{A}{(1 - 2\nu)B}\right]^{1/2}$$

Таким образом, функция f/r относится к типу (5.6), что позволяет воспользоваться формулой (5.7). Определив произвольные постоянные из условий (8.4), окончательно найдем

$$(8.6)\qquad G^* = \left[1 + \frac{1 - G_1^*}{G_1^*}\frac{T(r, a)}{T(b, a)}\right]^{-1} \left(T(r, a) = \ln\frac{A - (1 - 2\nu)Br^2}{A - (1 - 2\nu)Ba^2}\right)$$

На фиг. 2 сплошными линиями показан характер изменения модуля сдвига G^* при $\nu = 1/3$, $b : a = 3 : 2$ и различных $G_1^* = 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2$ (кривые *1—4* соответственно). Брус находится под действием давления p_1 а $p_0 = 0$.

Из формулы (8.6) следует, что решение рассматриваемой задачи с краевыми условиями (8.4) всегда существуют, за исключением случая, когда внутри области S функция $A - (1 - 2\nu)Br^2$ меняет знак, проходя через нуль. Однако при этом всегда возможно тривиальное решение уравнения (1.1): $G^* = \text{const}$.

Исследуем характер изменения модуля сдвига в теле, когда величина $A - (1 - 2\nu)Br^2$ обращается в нуль у границы области $S : [a < r < b,\ 0 < \beta < \alpha^*]$ при $r = l$ ($b = l - \varepsilon$, причем ε — малая величина). Это возможно, если $\nu \neq 1/2$ и

$$\frac{p_1}{p_0} = \left[1 + (1 - 2\nu)\frac{l^2}{b^2}\right]\left[1 + (1 - 2\nu)\frac{l^2}{a^2}\right]^{-1}$$

В рассматриваемом случае $T(r, a) = \ln[(l^2 - r^2)/(l^2 - a^2)]$.

На фиг. 3 показан характер изменения модуля сдвига в теле при $\nu = 1/3$, $\varepsilon = 10^{-10},\ 10^{-3},\ 10^{-1},\ 5\cdot10^{-1}$ (кривые *1—4* соответственно) для случая $b : a = 3 : 2$ и двух значений относительного модуля сдвига у внешней поверхности трубы: $G_1^* =$

$= 0{,}5$ (кривые, расположенные ниже прямой $G^* = 1$) и $G_1^* = 2$ (остальные кривые). Видно, что модуль сдвига начинает резко меняться лишь при приближении ξ к единице, принимая при $\xi = 1$ заданное значение G_1^*.

Следует подчеркнуть, что все эти эффекты неоднородности никак не сказываются на напряженном состоянии бруса — оно совпадает с напряженным состоянием однородного.

При $\nu = 1/2$ эти эффекты отсутствуют, так как закон изменения модуля сдвига принимает форму

$$G^* = \left[1 + \frac{1 - G_1^*}{G_1^*} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right]^{-1}$$

Исследуем теперь случай, когда $\sigma_\beta = c_1 = \text{const}$. Тогда функции σ_r, f/r имеют вид (7.3), (7.4). Задачу будем решать для граничных условий (8.4).

Из формулы (6.1) имеем

$$\frac{1}{G^*} = \left(1 - \frac{\nu\alpha}{(1-2\nu) r}\right)^{1/\nu - 1} \left[A_{10} + A_{30} \int \left(r - \frac{\nu\alpha}{1 - 2\nu}\right)^{-1/\nu} r^{1/\nu - 1}\, dr\right]$$

$$\left(\alpha = \frac{c_0}{c_1}\right)$$

Интеграл берется методом рационализации при любых $\nu = m/n$, где m и n — натуральные числа. Так, при $\nu = 1/3$ получим

$$\frac{1}{G^*} = \frac{(r-\alpha)^2}{r^2} \left[A_{10} + A_{30} \left(\ln|r - \alpha| - \frac{2\alpha}{r - \alpha} - \frac{\alpha^2}{2(r-\alpha)^2}\right)\right]$$

Произвольные постоянные определяются из краевых условий (8.4).

Штриховые кривые на фиг. 2 иллюстрируют характер изменения относительного модуля сдвига по толщине бруса. Размеры бруса, коэффициент Пуассона материала и граничные условия те же, что и в первом примере.

Если сравнить между собой кривые *1* или *2*, то можно заметить, что функциональные зависимости $G^*(r, \beta)$, которым они соответствуют, очень близки. А напряженные состояния тел, между тем, сильно разнятся. Отсюда можно сделать вывод, что в некоторых случаях незначительное изменение неоднородности тела может повести к большим изменениям полей напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Olczak W.*, *Rychlewsky J.* Nichthomogenitäts — Probleme im elastischen und vor plastischen Bereich.— Österr. Ingr.-Arch., 1961, B. 15, H. 1—4, S. 130—152.
2. *Лехницкий С. Г.* Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 1, с. 146—151.
3. *Ростовцев Н. А.* К теории упругости неоднородной среды.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 601—611.
4. *Торлин В. Н.* Прямая и обратная задачи плоской теории упругости неоднородного тела.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 8, с. 49—52.
5. *Колчин Г. Б.*, *Фаверман Э. А.* Теория упругости неоднородных тел. (Библиографический указатель отечеств. и иностр. лит-ры). Кишинев: Штиинца, 1972. 246с.
6. *Колчин Г. Б.*, *Фаверман Э. А.* Теория упругости неоднородных тел. (Библиографический указатель отечеств. и иностр. лит-ры). Кишинев: Штиинца, 1977. 146 с.
7. *Колчин Г. Б.* Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. Кишинев: Картя молдовеняскэ, 1971. 170 с.
8. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

Харьков

Поступила в редакцию
13.VI.1984