Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 533.6.011

НОВЫЙ КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Пославский С. А.

Получены новые точные решения уравнений одномерной газовой динамики с сильными ударными волнами, распространяющимися по движущейся среде. Течение газа за скачком описывается решением с однородной деформацией [1, 2]. Построены решения задачи о взрыве без противодавления в однородно расширяющемся (сжимающемся) газе с произвольным показателем адиабаты и неоднородным начальным распределением плотности и задачи о коллапсе полости в пылевом облаке с образованием ударной волны.

Сопряжение решения [1, 2] с ударными и детонационными волнами, распространяющимися по покоящемуся газу, проводилось в [3—6]. Задача о склейке посредством ударной волны решения для движущейся самогравитирующей среды с нулевым давлением и автомодельного решения рассматривалась в [7]. Точное решение задачи о сильном взрыве в однородно расширяющемся (сжимающемся) газе со специальным показателем адиабаты, равном 5/3, получено в [8].

1. Точное частное решение системы уравнений, описывающей одномерное адиабатическое движение идеального совершенного газа, найденное Л. И. Седовым [1, 2], представимо формулами (точкой обозначена производная по времени t)

$$r = R(t)\,\xi,\quad dR = \pm\,[2\varepsilon\lambda^{-1}(R^{-\lambda} + A)]^{1/2}dt,\quad \lambda = \nu(\gamma - 1) \tag{1.1}$$

$$v = R^{-1}R^{\cdot}r,\quad p = \frac{p_0(\xi)}{R^{\nu\gamma}},\quad \rho = \frac{\rho_0(\xi)}{R^{\nu}} \tag{1.2}$$

$$p_0(\xi) = p_0(\xi_0)\exp\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{\varepsilon\xi\,d\xi}{G(\xi)},\quad \rho_0(\xi) = \frac{p_0(\xi)}{G(\xi)}$$

Здесь r и ξ — эйлерова и лагранжева координаты, v — скорость, p — давление, ρ — плотность, γ — показатель адиабаты ($\gamma > 1$), $\nu = 1, 2, 3$ для движений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами соответственно, A, ε, ξ_0, $p_0(\xi_0)$ — произвольные постоянные, $\xi_0 > 0$, $p_0(\xi_0) > 0$, $G(\xi)$ — произвольная функция. Выбором лагранжевых координат можно положить $\varepsilon = \pm 1$.

Рассмотрим задачу о сопряжении решения (1.1), (1.2) с ударной волной (УВ), распространяющейся по газу с нулевым давлением (по пылевой среде). Запишем условия на разрыве, отмечая величины перед ударной волной индексом 1, учитывая, что $p_1 = 0$, и используя соотношения (1.1), (1.2)

$$\rho_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\frac{p_0(\xi_0)}{R^{\nu}G(\xi_*)}\exp\int\limits_{\xi_0}^{\xi_*}\frac{\varepsilon\xi\,d\xi}{G(\xi)} \tag{1.3}$$

$$\xi_*^{\cdot} = \left[\frac{\gamma-1}{2}R^{-\lambda-2}G(\xi_*)\right]^{1/2},\quad G(\xi_*) = \frac{\gamma-1}{2}R^{\lambda}(R^{\cdot}\xi_* - v_1)^2 \tag{1.4}$$

($\xi_* = r_*/R$ — лагранжева координата частиц газа, находящихся на фронте УВ, r_* — радиус УВ).

Движение пылевой среды перед разрывом определяется соотношениями

$$(1.5)\qquad r = vt + f(v),\quad \rho = \frac{h(v)}{[vt + f(v)]^{\nu-1}[f'(v) + t]}$$

Здесь $f(v)$, $h(v)$ — произвольные функции (вообще говоря, неоднозначные и определенные не на всей оси v).

Пусть УВ выходит из центра (оси, плоскости) симметрии в некоторый момент времени t'. Возможны следующие две постановки задачи о сшивании решений (1.1), (1.2) и (1.5) посредством скачка.

Задача А. Если заданы распределения плотности и давления за УВ, т. е. известна функция $G(\xi)$, то интегрирование первого уравнения (1.4) дает закон движения УВ $\xi_*(t)$ (функция $R(t)$ определяется из (1.1))

$$(1.6)\qquad \int\limits_0^{\xi_*(t)} \frac{d\xi}{[G(\xi)]^{1/2}} = \int\limits_{t'}^{t}\left[\frac{\gamma-1}{2}R^{-\lambda-2}\right]^{1/2} dt$$

Разрешая затем второе уравнение (1.4) относительно v_1, получаем скорость $v_1(t)$ пыли на фронте УВ в момент времени t. После обращения этой функции из первого уравнения (1.5) будем иметь

$$f(v_1) = r_*[t(v_1)] - v_1 t(v_1)$$

Затем из (1.3) и второго уравнения (1.5) определяется функция $h(v)$. Отметим, что аналогичный подход был предложен в [7].

Задача Б. Пусть известна функция $f(v)$, т. е. задано распределение скоростей в пылевой среде. Разрешая относительно v_1 соотношение $R\xi_* = v_1 t + f(v_1)$ и подставляя найденное выражение в (1.4), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для $\xi_*(t)$. В общем случае это уравнение не может быть проинтегрировано в квадратурах. Однако иногда, при специальном выборе $f(v)$, интегрирование осуществимо.

2. Выберем функцию $f(v)$ в виде $f(v) = r_0 - vt_0$. Очевидно, без ограничения общности можно положить $t_0 = 0$, $r_0 = 0$. Тогда из первого уравнения (1.5) получаем

$$(2.1)\qquad v = r/t$$

Такое распределение скоростей при $t < 0$ соответствует однородному сжатию среды, а при $t > 0$ — однородному разлету. В момент $t = 0$ все вещество концентрируется в начале координат ($r = 0$).

На фронте ударной волны имеем $v_1 = Rt^{-1}\xi_*$, $v_2 = R^{\cdot}\xi_*$. Поскольку необходимо $v_2 > v_1$, то после образования разрыва (при $t > t'$) должно выполняться неравенство

$$(2.2)\qquad R^{\cdot} > R/t$$

Соотношения (1.4) с учетом (2.1), (2.2) преобразуем к виду

$$(2.3)\qquad G = \frac{\gamma-1}{2}R^{\lambda}\xi_*^2\left(R^{\cdot} - \frac{R}{t}\right)^2,\quad \frac{d}{dt}\ln\xi_* = \frac{\gamma-1}{2R}\left(R^{\cdot} - \frac{R}{t}\right)$$

Последнее уравнение легко интегрируется

$$(2.4)\qquad \xi_* = k\,|R/t|^{(\gamma-1)/2},\quad k = \text{const}$$

Равенство $\xi_*(t') = 0$ выполняется только, когда $R(t') = 0$, что возможно лишь при $\varepsilon = +1$. Таким образом, в рассматриваемых решениях давление в газе за УВ всегда падает с приближением к центру симметрии.

Исследуем сначала случай $t' > 0$. Отметим, что для выполнения условия (2.2) необходимо $A > 0$ в (1.1).

Введем новые переменные Ω, τ по формулам

(2.5) $$\Omega = A^{1/\lambda}R, \quad \tau = \sqrt{2\varepsilon/\lambda}\, A^{1/\lambda+1/2}t$$

Тогда для $\tau > \tau'$, где τ' — обезразмеренный момент времени образования разрыва, соотношения (1.1), (2.2) преобразуются к виду

(2.6) $$d\Omega = (\Omega^{-\lambda} + 1)^{1/2}d\tau, \quad \tau > \Omega\,(\Omega^{-\lambda} + 1)^{-1/2}$$

Оценим значения величин в обеих частях последнего неравенства при $\Omega \to \infty$, предполагая, что $\lambda \neq 1$. Поскольку $\Omega\,(\tau') = 0$, то

$$\tau = \int_0^\Omega (\Omega^{-\lambda} + 1)^{-1/2}\, d\Omega + \tau' = \Omega - \frac{\Omega^{1-\lambda}}{2\,(1-\lambda)} + O\,(\Omega^{1-2\lambda})$$

$$\Omega\,(\Omega^{-\lambda} + 1)^{-1/2} = \Omega - {}^1/_2\, \Omega^{1-\lambda} + O\,(\Omega^{1-2\lambda})$$

Можно теперь заметить, что неравенство в (2.6) не выполняется при достаточно больших значениях Ω, если $0 < \lambda < 1$. Можно показать, что оно нарушается и при $\lambda = 1$. Поэтому в рассматриваемых решениях обязательно $\lambda > 1$ $(\gamma > (\nu + 1)/\nu)$. Для значений γ, удовлетворяющих этому требованию, график функции $\Omega\,(\tau)$ имеет асимптоту $\Omega = \tau - \tau_0$, так что

$$\lim_{\tau\to\infty} \left[\frac{d\Omega\,(\tau)}{d\tau}(\tau - \tau_0) - \Omega\,(\tau)\right] = 0$$

Видно, что для выполнения неравенства в (2.6) при любых значениях $\tau > \tau'$ необходимо $\tau_0 \geqslant 0$. Можно показать, что

$$\tau' - \tau_0 = \int_0^\infty \frac{\lambda\Omega^{-\lambda}}{2\,(\Omega^{-\lambda} + 1)^{3/2}}\, d\Omega = I$$

Следовательно, величина τ' должна быть не меньше, чем интеграл, стоящий в правой части последнего равенства. Далее ограничимся рассмотрением случая выполнения строгого неравенства $\tau' > I$.

Как видно из (2.4), (1.1), ξ_* может расти лишь до некоторого конечного значения (обозначим его $\xi_{\max}$). Таким образом, в данном случае имеет место эффект «замораживания» УВ в разлетающейся пылевой среде. Через разрыв проходят лишь те частицы, расстояние которых от центра симметрии в момент t' не превосходит величины $r_{\max} = (2\varepsilon\lambda^{-1}A)^{1/2}\xi_{\max}t'$. Сфера, содержащая эти частицы, может быть поверхностью контактного разрыва (например, границей с вакуумом).

В дальнейшем значение Ω, соответствующее лагранжевой координате УВ ξ_*, будем обозначать Ω_*. Зависимость (2.4) можно теперь переписать в виде

(2.7) $$\Xi_* = [\Omega_*/\tau\,(\Omega_*)]^{(\gamma-1)/2} \quad (\Xi_* = \xi_*/\xi_{\max})$$

Распределения давления и плотности в газе за ударной волной определяются соотношениями

(2.8) $$P_0\,(\Xi_*) = \frac{p_0\,(\xi_*)}{p_0\,(\xi_{\max})} = \exp \int_\infty^{\Omega_*} \frac{\lambda\, d\Omega}{2\Omega^{\lambda+1}\sqrt{\Omega^{-\lambda}+1}\,\left[\sqrt{\Omega^{-\lambda}+1} - \Omega/\tau\,(\Omega)\right]}$$

$$p\,(\xi_*,\ \tau) = A^{\gamma/(\gamma-1)}p_0\,(\xi_*)/\Omega^{\nu\gamma}\,(\tau), \quad \tau > \tau\,(\Omega_*), \quad p_0\,(\xi_{\max}) = \mathrm{const}$$

(2.9) $$\Lambda_0\,(\Xi_*) = \frac{\varepsilon\xi_{\max}^2\rho_0\,(\xi_*)}{p_0\,(\xi_{\max})} = \nu\,\frac{P_0\,(\Xi_*)}{\Xi_*^2}\,\frac{\Omega_*^{-\lambda}}{\left[\sqrt{\Omega_*^{-\lambda}+1} - \Omega_*/\tau\,(\Omega_*)\right]^2}$$

$$\rho\,(\xi_*,\ \tau) = A^{1/(\gamma-1)}\,\rho_0\,(\xi_*)/\Omega^\nu\,(\tau), \quad \tau > \tau\,(\Omega_*)$$

Покажем, что УВ возникает в центре симметрии вследствие выделения некоторой положительной энергии E_0 в момент τ'. Для этого рассмотрим асимптотику решения при $\tau \to \tau'$ $(\Xi_* \to 0)$. Из формул (2.7) — (2.9) имеем (с точностью до малых величин высших порядков)

$$\Xi_* = c_1 \Omega_*^{(\gamma-1)/2}, \quad P_0(\Xi_*) = c_2 \Xi_*^{\nu}, \quad \Lambda_0(\Xi_*) = \nu c_2 \Xi_*^{\nu-2} \tag{2.10}$$

где постоянные c_1, c_2 однозначно определяются через ν, γ, τ'.

Полная энергия газа за УВ

$$E_2 = \int_0^{r_*} \sigma_\nu r^{\nu-1} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) dr =$$

$$= c \int_0^{\Xi_*} \Xi_{**}^{\nu-1} \Lambda_0(\Xi_{**}) \left[\frac{(\Omega_*^{-\lambda} + 1)\, \Xi_{**}}{\nu} + \frac{\Omega_*^{-\lambda} P_0(\Xi_{**})}{\Lambda_0(\Xi_{**})} \right] d\Xi_{**}$$

$$\sigma_\nu = \frac{1}{2} [4\pi(\nu - 1) + (\nu - 2)(\nu - 3)], \quad c = \frac{\sigma_\nu A p_0(\xi_{\max})\, \xi_{\max}^{\nu}}{\gamma - 1}$$

Эта же масса газа до прохождения через УВ имела энергию

$$E_1 = \int_0^{\xi_*} \sigma_\nu \xi^{\nu-1} \frac{\rho_0 v_1^2}{2} d\xi = \frac{c}{\nu} \int_0^{\Xi_*} \Lambda_0(\Xi_{**})\, \Xi_{**}^{\nu+1} \left[\frac{\Omega_{**}}{\tau(\Omega_{**})} \right]^2 d\Xi_{**}$$

Величина $E_0 = E_2 - E_1$ **не зависит** от верхнего предела интегрирования Ξ_*. Используя (2.10), окончательно получаем

$$E_0 = \lim_{\Xi_* \to 0} (E_2 - E_1) = \frac{c c_1^{2\nu} c_2}{\nu} > 0 \tag{2.11}$$

Распределение плотности в пылевой среде при $\tau = \tau'$ представляется параметрической зависимостью с параметром ξ_*

$$\rho(\xi_*, \tau') = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{A^{1/(\gamma-1)} \rho_0(\xi_*)}{\Omega_*^{\nu}} \frac{\tau^{\nu}(\Omega_*)}{(\tau')^{\nu}} \tag{2.12}$$

$$r(\xi_*, \tau') = \frac{\Omega_* \xi_*}{A^{1/\lambda}} \frac{\tau'}{\tau(\Omega_*)}, \quad \xi_* < \xi_{\max}$$

Для малых r имеем асимптотику

$$\rho(r, \tau') = k_1 r^{\beta} [1 + o(1)], \quad \beta = \frac{\gamma(\nu - 2) - (3\nu - 2)}{\gamma + 1} \tag{2.13}$$

где k_1 выражается через введенные выше постоянные. Значение ρ $(0, \tau')$ конечно лишь в случае $\nu = 3$, $\gamma > 7$.

При $r \to r_{\max}$ начальная плотность ρ (r, τ') возрастает до бесконечности, если $\gamma < (\nu + 2)/\nu$, и убывает до нуля, если $\gamma > (\nu + 2)/\nu$.

Как видно из (2.10), за УВ в случае движения с плоскими волнами $(\nu = 1)$ плотность имеет неинтегрируемую особенность. Давление газа в центре симметрии после взрыва обращается в нуль при любом значении ν. В одном частном случае решение рассматриваемой задачи описывается простыми формулами. Пусть $\gamma = (\nu + 2)/\nu$, $\tau' = 2$. Тогда

$$\Omega = [(\tau - 1)^2 - 1]^{1/2}, \quad \Xi_* = \left(\frac{\tau - 2}{\tau} \right)^{1/(2\nu)} \tag{2.14}$$

$$r_* = \xi_{\max} A^{-1/2} \tau^a (\tau - 2)^b$$

$$p_0(\xi) = B\xi^{\nu}, \quad \rho_0(\xi) = \nu B \xi^{\nu-2}, \quad B = \mathrm{const}$$

$$\rho(r, \tau') = \frac{\nu B}{\nu + 1} \left(\frac{A \xi_{\max}^{2\nu}}{4} \right)^{a/b} r^{\omega} \quad (r < r_{\max})$$

$$a = \frac{\nu - 1}{2\nu}, \quad b = \frac{\nu + 1}{2\nu}, \quad \omega = \frac{\nu - 2 - \nu^2}{\nu + 1}$$

Примем теперь $t' < 0$. В этом случае знак постоянной A в (1.1) может быть произвольным.

Если $A > 0$, снова вводим переменные Ω, τ по формулам (2.5). Заменяя в (2.8), (2.9) ξ_{max}, $p_0(\xi_{max})$ и нижний предел интегрирования в (2.8) на ξ_s, $p_0(\xi_s)$, Ω_s соответственно, где $\Omega_s = \Omega(\tau'/2)$, $\xi_s = \xi_*(\Omega_s)$, $p_0(\xi_s) = \mathrm{const} > 0$, получим выражения для распределения давления и плотности в газе за УВ. Закон движения разрыва примет вид

$$\Xi_* = \left[\frac{\tau'\Omega_*}{2\Omega_s\tau(\Omega_*)}\right]^{(\gamma-1)/2} \tag{2.15}$$

Остаются справедливыми (с учетом указанных замен) асимптотические формулы (2.10) и выражение для энергии взрыва (2.11). Можно показать, используя (2.15), что УВ за конечный интервал времени $(\tau', 0)$ уходит на бесконечность. Распределение плотности в пылевой среде в момент взрыва по-прежнему определяется формулами (2.12), причем $\xi_{max} = \infty$.

Пусть теперь $A < 0$. Переменные Ω, τ вводим по формулам (2.5), заменяя в них A на $-A$. Вместо (2.6) будем иметь $d\Omega = \pm(\Omega^{-\lambda} - 1)^{1/2}d\tau$. На интервале времени τ длины

$$\Delta = 2\int_0^1 (\Omega^{-\lambda} - 1)^{-1/2}\, d\Omega$$

величина Ω возрастает от 0 до 1 и снова уменьшается до 0. При этом $\Omega^{\bullet}$ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно, на момент времени взрыва должно быть наложено ограничение $\tau' \geqslant -\Delta$. Случай выполнения строгого неравенства качественно не отличается от рассмотренного выше случая $A > 0$. Если же $\tau' = -\Delta$, поведение решения при $\tau \to 0$ изменится. Так, для радиуса УВ можно получить оценку

$$r_* \sim \tau^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{4 - \nu(\gamma - 1)^2}{2[2 + \nu(\gamma - 1)]}$$

Из этого соотношения видно, что при $\tau \to 0$ УВ уходит на бесконечность, если $\gamma > 1 + 2\nu^{-1/2}$, и сносится обратно к центру симметрии, если $\gamma < 1 + 2\nu^{-1/2}$.

В случае $\gamma = (\nu + 2)/\nu$, $\tau' = -\Delta = -2$ решение имеет простой вид и получается из (2.14) заменой A, τ, ξ_{max} на $(-A)$, $(-\tau)$, ξ_s соответственно и расстановкой (где это необходимо) модульных скобок.

Отметим, что это решение и решение (2.14) могли быть получены из решения [2] задачи о сильном взрыве в среде с переменной плотностью $\rho = C_0 r^{\omega}$, где C_0 — постоянная, $\omega = (\nu - 2 - \nu^2)/(\nu + 1)$, при помощи особой группы инвариантных преобразований уравнений газовой динамики, отвечающей значению $\gamma = (\nu + 2)/\nu$ [8, 9].

3. Рассмотрим пример задачи А из п. 1. Пусть $\gamma = (\nu + 2)/\nu$, $\varepsilon = -1$, $G(\xi) \equiv \equiv C^2 = \mathrm{const}$, $C > 0$. Такой выбор соответствует гауссовскому распределению плотности и давления в газе за УВ

$$\rho_0(\xi) = C_1 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2C^2}\right), \quad p_0(\xi) = C^2 C_1 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2C^2}\right)$$

Введем новые переменные $\Omega = (-A)^{1/2}R$, $\tau = -At$. Интегрируя (1.1), получаем зависимость

$$\Omega(\tau) = [(\tau - \tau_0)^2 + 1]^{1/2}, \quad \tau_0 = \mathrm{const}$$

Без ограничения общности далее полагаем $\tau_0 = 0$.

Из (1.6) определяем закон движения УВ

$$\xi_* = C\nu^{-1/2} (\operatorname{arctg} \tau - \operatorname{arctg} \tau'), \qquad r_* = (-A)^{-1/2} (\tau^2 + 1)^{1/2} \xi_* \tag{3.1}$$

где τ' — момент выхода УВ из центра симметрии.

Можно показать, что $\lim_{\tau \to \tau'} E_2 = 0$ (E_2 — полная энергия газа за УВ). Поэтому в рассматриваемом решении образование разрыва не связано с выделением энергии в момент τ'.

Из (1.4), (3.1) находим зависимость

$$v_1(\tau) = C\left(-\frac{A}{\nu(\tau^2+1)}\right)^{1/2} [\tau(\operatorname{arctg} \tau - \operatorname{arctg} \tau') - \nu] \tag{3.2}$$

Полагая в этом равенстве $\tau = \tau'$, получаем, что $v_1(\tau') < 0$, т. е. УВ возникает вследствие соударения частиц пыли в центре симметрии в момент τ'.

Потребуем, чтобы после образования разрыва в пылевой среде не возникали каустики — поверхности бесконечной плотности. Это требование означает, что на интервале (τ', ∞) должна быть строго возрастающей функция $g(\tau) = r_*(\tau) + v_1(\tau)(\tau - \tau')/A$. Используя зависимости (3.1), (3.2), можно показать, что для этого необходимо и достаточно выполнение неравенства $\tau' > \tau_m'$, где τ_m' — корень уравнения $(\nu + 1)\tau = \pi/2 - \operatorname{arctg} \tau$.

Решение для пыли представляется в параметрическом виде

$$\rho(\tau_*, \tau) = \frac{(-A)^{\nu/2}\rho_0(\xi_*)}{(\nu+1)\Omega_*^{\nu}} \frac{r_*^{\nu-1}(\tau_*)}{r^{\nu-1}(\tau_*, \tau)} \left[(-A)\frac{dr_*}{d\tau_*} - v_1(\tau_*)\right] \times$$

$$\times \left[(-A)\frac{dr_*}{d\tau_*} - v_1(\tau_*) - \frac{dv_1}{d\tau_*}(\tau_* - \tau)\right]^{-1}$$

$$r(\tau_*, \tau) = r_*(\tau_*) + v_1(\tau_*)(\tau_* - \tau)A^{-1}, \qquad \tau < \tau_*$$

$$r_*(\tau_*) = (-A)^{-1/2}\Omega_*\xi_*, \qquad \Omega_* = \Omega(\tau_*), \qquad \xi_* = \xi_*(\tau_*)$$

УВ «замораживается» на частицах пыли, которые в момент τ' находились на расстоянии

$$r_{\max} = C(-\nu A)^{-1/2} [\tau'(\pi/2 - \operatorname{arctg} \tau') + \nu]$$

от центра симметрии.

Полученное решение описывает схлопывание полости в пылевом облаке с образованием УВ.

Автор благодарен И. С. Шикину за советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Об интегрировании уравнений одномерного движения газа.— Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5, с. 735.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М: Наука, 1981. 447 с.
3. *Keller J. B.* Spherical, cylindrical and one-dimensional gas flows.— Quart. Appl. Math., 1956, v. 14, No. 2, p. 171—184.
4. *Коробейников В. П.* Точное решение нелинейной задачи о взрыве в газе при переменной начальной плотности.— Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 6, с. 947—948.
5. *Коробейников В. П., Рязанов Е. В.* Построение точных разрывных решений уравнений одномерной газодинамики и их приложения.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 2, с. 265—268.
6. *Шикин И. С.* О точных решениях одномерной газодинамики с ударными и детонационными волнами.— Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 1, с. 33—36.
7. *Голубятников А. Н.* О сферически-симметричном движении гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 5, с. 1067—1070.
8. *Никольский А. А.* Инвариантное преобразование уравнений движения идеального одноатомного газа и новые классы их точных решений.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 496—508.
9. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию 3.IV.1984