Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 531.36 : 534

К РАСЧЕТУ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К ВИБРОУДАРНЫМ

Пилипчук В. Н.

Предлагается способ построения периодических решений в нелинейных динамических системах с конечным числом степеней свободы, позволяющий найти решение в виде ряда по периодическим кусочно-гладким функциям достаточно простого вида. Приближенное решение — отрезок ряда — отвечает замене исходной системы некоторой эквивалентной — виброударной, поэтому, как показано ниже, такой подход особенно эффективен в наименее благоприятных для квазигармонического (квазилинейного) анализа случаях. В сочетании с методами усреднения он может использоваться и при исследовании более сложных режимов движения. Рассматривается ряд примеров, представляющих определенный самостоятельный интерес.

1. Вначале обратимся к консервативной системе с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением

$$x^{\cdot\cdot} + f(x) = 0, \quad x \in R_1 \tag{1.1}$$

Здесь $f(x)$ — нечетная аналитическая функция, удовлетворяющая условию $xf(x) \geqslant 0$, где равенство имеет место только в одной точке $x = 0$ (система с единственным положением равновесия); точка означает дифференцирование по времени t.

Групповые свойства уравнения (1.1) позволяют без нарушения общности рассмотреть его при следующих начальных условиях:

$$t = 0, \ x = 0, \ x^{\cdot} = v \tag{1.2}$$

Пусть $P(\varphi)$ — пилообразная периодическая кусочно-гладкая функция с единичной амплитудой

$$P(\varphi) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sin\frac{\pi\varphi}{2}\right), \quad P(\varphi + 4) = P(\varphi)$$

График такой функции состоит из склеенных отрезков прямых, поэтому подсчет ее значений сводится к простым арифметическим операциям.

В рамках теории обобщенных функций справедливы соотношения

$$P'^2(\varphi) = 1, \ P''(\varphi) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\varphi + 1 - 4k) - \delta(\varphi - 1 - 4k)], \quad -\infty < \varphi < \infty \tag{1.3}$$

Решение задачи Коши (1.1), (1.2) будем искать в виде

$$x = \psi + X(\psi), \ \psi = AP(\varphi), \ \varphi = vt/A \tag{1.4}$$

По переменной t период решения T определяется выражением $T = 4A/v$; параметр A и функция X подлежат определению.

Дифференцируя (1.4) дважды по времени t, с учетом (1.3) получим

$$x^{\cdot\cdot} = v^2X'' + (v^2 / A) \ (1 + X') P'' \tag{1.5}$$

Ускорение в рассматриваемой системе должно быть ограниченным, поэтому уничтожим второе слагаемое справа в (1.5), положив

$$X'|_{\psi=A} = -1 \tag{1.6}$$

В силу периодичности функции $\psi = AP(\varphi)$ и четности $X'(\psi)$ равенство (1.6) выполняется во всех точках $\varphi = \pm 1 + 4k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Уравнение (1.6) служит для определения параметра A.

Подставив (1.4) в исходное уравнение (1.1), принимая во внимание (1.5), (1.6), получим относительно $X(\psi)$ уравнение

$$v^2 X'' = -f(\psi + X) = -f(\psi) - f'(\psi) X - \frac{1}{2} f''(\psi) X^2 - \ldots \tag{1.7}$$

Из соотношений (1.2) следуют соответствующие начальные условия

$$\psi = 0, \quad X = 0, \quad X' = 0 \tag{1.8}$$

Решение задачи (1.7), (1.8) будем искать в виде рядов последовательных приближений

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)} + \ldots, \quad A = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + \ldots \tag{1.9}$$

Подставив первый ряд (1.9) в (1.7), получим последовательность уравнений

$$X^{(1)''} = -v^{-2} f(\psi), \quad X^{(2)''} = -v^{-2} f'(\psi) X^{(1)}$$

$$X^{(3)''} = -v^{-2}\left[f'(\psi) X^{(2)} + \frac{1}{2} f''(\psi) X^{(1)2}\right], \ldots$$

Отсюда с учетом начальных условий (1.8) придем к соотношениям, позволяющим путем вычисления квадратур определить члены первого разложения (1.9). Интегрируя по частям слагаемые, содержащие производные функции $f(x)$, получим

$$X^{(1)} = -v^{-2} \int_0^{\psi}\int_0^{\psi} f(\psi)\, d\psi\, d\psi \tag{1.10}$$

$$X^{(2)} = -v^{-2}\left[\int_0^{\psi} f(\psi) X^{(1)}\, d\psi - \int_0^{\psi}\int_0^{\psi} f(\psi) X^{(1)'}\, d\psi\, d\psi\right]$$

$$X^{(3)} = -v^{-2}\left\{\frac{1}{2} f(\psi) X^{(1)2} + \int_0^{\psi} f(\psi)\left(X^{(2)} - 2X^{(1)}X^{(1)'}\right) d\psi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\psi}\int_0^{\psi} f(\psi)\left[\left(X^{(1)}X^{(1)'}\right)' - X^{(2)'}\right] d\psi\, d\psi\right\}, \ldots$$

Подставив разложения (1.9) в (1.6) и разложив производные $X^{(i)'}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ в степенные ряды в окрестности точки $\psi = A^{(1)}$, будем иметь цепочку уравнений для определения величин $A^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$

$$X^{(1)'}\big|_{\psi=A^{(1)}} = -1, \quad A^{(2)} = -\frac{X^{(2)'}}{X^{(1)''}}\bigg|_{\psi=A^{(1)}} \tag{1.11}$$

$$A^{(3)} = -\frac{1}{X^{(1)''}}\left(\frac{1}{2} X^{(1)'''} A^{(2)2} + X^{(2)''} A^{(2)} + X^{(3)'}\right)\big|_{\psi=A^{(1)}}, \ldots$$

Принимая во внимание равенства (1.10), первое из этих уравнений приведем к виду

$$\int_0^{A^{(1)}} f(\psi)\, d\psi = v^2 \tag{1.12}$$

Таким образом, первый член второго разложения (1.9) равен амплитуде колебаний, которая будет иметь место, если заданную начальную энергию удвоить.

Отметим, что выписанные в (1.10) соотношения не содержат производных функций $f(\psi)$, а построение итерационной процедуры по более простой схеме позволяет вообще избежать дифференцирования этой функции и, тем самым, снять предъявленное к ней выше требование аналитичности.

Положим, например

$$X^{(0)} \equiv 0, \quad X^{(i)} = -v^{-2} \int_0^{\psi}\int_0^{\psi} f(\psi + X^{(i-1)})\, d\psi\, d\psi, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Тогда приближенным решением уравнения (1.7) будет функция $X^{(N)}$ с достаточно большим номером N. Относительно $X^{(1)}$ имеем прежнее выражение (1.10), однако в высших приближениях вычисление квадратур оказывается гораздо более сложным, чем в (1.10), а результат — менее наглядным.

Для иллюстрации особенностей описанного подхода рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $f(x) \equiv x^n$, n — нечетное число. При произвольном n задача (1.1), (1.2) в данном случае может быть решена в специальных функциях достаточно сложного вида. К более простым для анализа (хотя и приближенным) решениям можно прийти иным путем. Так, при небольших n часто вполне приемлемый результат дает квазигармонический подход, так или иначе включающий некоторую линеаризацию исходной системы. Этот прием, однако, кажется противоестественным, если n велико.

Принципиально сложным с этой точки зрения оказывается предельный случай $n = \infty$, поскольку для описания ударов о концы отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$ требуется, строго говоря, бесконечно большое число квазигармонических приближений.

В то же время этот случай весьма прост, поскольку в промежутках между ударами имеет место равномерное движение по инерции, и в более широком классе функций решение задачи будет таким:

(1.13) $\qquad x = P(\varphi), \quad \varphi = vt$

Отметим также, что если соотношения (1.13) рассмотреть как замену переменной в (1.1), то в уравнении относительно новой переменной φ пропадут сингулярные функции, соответствующие ударным взаимодействиям, и оно приобретает вид $\varphi^{\cdot\cdot} = 0$, $-\infty < \varphi < \infty$. Идея использования специальных функций (в том числе и пилообразных) при расчете виброударных систем высказана в работе [1].

Приведенные выше соотношения позволяют получить приближенное решение при больших, но уже конечных значениях n. Выполнив интегрирование в (1.10), найдем решение исходной задачи в виде степенного ряда

(1.14)
$$x = \psi - \frac{\psi^{n+2}}{v^2(n+1)(n+2)} + \frac{n\psi^{2n+3}}{2v^4(n+1)^2(n+2)(2n+3)} -$$
$$- \frac{n}{6v^6(n+1)^3(n+2)(3n+4)}\left(\frac{n-1}{n+2} + \frac{n}{2n+3}\right)\psi^{3n+4} + \ldots$$
$$\psi = AP(vt/A)$$

Относительно параметра A из (1.11) имеем

(1.15)
$$A = A^{(1)} + \frac{n}{2v^2(n+1)^2(n+2)} A^{(1)\,n+2} + \left(1 - \frac{n-1}{3n} - \frac{n+2}{6n+9} -\right.$$
$$\left. - \frac{n}{4n+4}\right) \frac{n^2 A^{(1)\,2n+3}}{2v^4(n+1)^3(n+2)^2} + \cdots, \qquad A^{(1)} = [(n+1)\,v^2]^{1/(n+1)}$$

Ряды (1.14), (1.15) — асимптотические: при $n \to \infty$ получаем, как и должно быть, соотношения (1.13):

$$A \to 1, \quad X = x - A\psi \to 0; \quad x \to P(vt)$$

С целью установления сходимости проанализируем самый неблагоприятный случай $n = 1$ (гармонический осциллятор). Выражения (1.14), (1.15) при $n = 1$ приобретают вид

$$x = v\left(\frac{\psi}{v} - \frac{1}{3!}\frac{\psi^3}{v^3} + \frac{1}{5!}\frac{\psi^5}{v^5} - \frac{1}{7!}\frac{\psi^7}{v^7} + \cdots\right) = v \sin\frac{\psi}{v}$$
$$A = \sqrt{2}v\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \cdots\right) = \frac{\pi}{2} v$$

и восстанавливают, таким образом, решение линейного уравнения, представленное в форме

$$x = v \sin \tau, \;\; \tau = {}^1/_2 \;\pi P\,(2t/\pi)$$

В отличие от обычной формы записи решения ($x = v \sin t$) аппроксимация функции $\sin \tau$ отрезком степенного ряда не лишает ее свойства периодичности, перенесенного на «осциллирующее время» τ, $|\,\tau\,| \leqslant \pi/2$, зато любой конечный отрезок ряда лишает аппроксимируемую функцию свойства гладкости. Изломы соответствующей кривой сглаживаются с добавлением новых членов ряда и исчезают только при бесконечно большом числе слагаемых. В точках изломов функция скорости имеет разрывы первого рода, соответствующие некоторым фиктивным ударам в системе. Однако при больших n аппроксимация быстрых скачков скорости разрывами, а импульсов силы — мгновенными импульсами представляется естественной. Что касается линейной системы, то разложение синуса по «пиле» в степенной ряд, по-видимому, неадекватно в такой же мере, как разложение «пилы» по синусам (в ряд Фурье) в случае виброударной системы ($n = \infty$).

Пример 2. Приведем решение для осциллятора с характеристикой вида $f(x) = \operatorname{sh} x$. Если в процессе интегрирования уравнений отвлечься от начальных условий для производных $X^{(i)}$ $(i = 1,2,\ldots)$, однопараметрическое семейство решений исходного уравнения может быть окончательно получено в виде

$$x = \psi - \frac{1}{V^2}\operatorname{sh}\psi + \frac{1}{8V^4}\operatorname{sh}2\psi - \frac{1}{48V^6}(\operatorname{sh}3\psi - 15\operatorname{sh}\psi) + \cdots \tag{1.16}$$

$$\psi = AP\left(\frac{Vt}{A}\right), \qquad A = \ln\left(V^2 + \sqrt{V^4-1}\right) + \frac{2V^4-1}{4V^2\sqrt{V^4-1}} + \cdots$$

Параметр V связан с начальной скоростью соотношением

$$v = V - \frac{1}{V} + \frac{1}{4V^3} + \frac{1}{4V^5} + \cdots$$

При достаточно больших значениях v величину V можно приближенно заменить скоростью v, и при $v \to \infty$ решение (1.16) имеет асимптотику

$$x \sim 2 \ln v P\left(\frac{vt}{2 \ln v}\right) \tag{1.17}$$

Таким образом, система испытывает удары в бесконечно удаленных точках $x = \pm\infty$, достигаемых за бесконечно малое время.

2. Рассмотрим консервативную систему с $k + 1$ степенью свободы. С целью дальнейшего упрощения обозначений специально выделим одну из координат системы (x) и запишем уравнения движения в виде

$$x^{\cdot\cdot} + f(x, y) = 0, \quad y^{\cdot\cdot} + g(x, y) = 0 \tag{2.1}$$

где символом y обозначена совокупность k величин $y_1, y_2, \ldots, y_k$; $g(x, y)$ — совокупность функций $g_i = g_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_k)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, которые вместе с $f(x, y)$ предполагаются аналитическими.

Пусть соответствующая (2.1) потенциальная функция $U(x, y)$ удовлетворяет условию симметрии $U(x, y) = U(-x, -y)$, кроме того, множество $\Gamma = \{(x, y) : U(x, y) + h = 0\}$ (h — энергия системы) представляет собой замкнутую связную гиперповерхность в R^{k+1}, на которой градиент функции $U(x, y)$ нигде не обращается в нуль (отсутствуют точки «застоя»). Эта гиперповерхность ограничивает конфигурационное пространство движения, содержащее (единственное в данном случае) положение равновесия — начало координат.

Будем искать периодическое решение, такое, что в некоторые моменты времени все координаты одновременно обращаются в нуль, а в некоторые другие моменты все производные $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$ равны нулю (колебания в унисон). Соответствующая траектория в конфигурационном пространстве имеет вид отрезка линии с концами на гиперповерхности Γ, проходящей через начало координат. Вопрос о существовании таких решений рассмотрен в [2], имеется и конструктивный метод построения слабо искривленных траекторий [3] в конфигурационном пространстве.

Начальные условия, отвечающие указанному решению, запишем в виде

(2.2) $t = 0, \ x = 0, \ x^{\bullet} = v, \ y = 0$

Соответствующие начальные значения скоростей $y^{\bullet}$ определяются в процессе построения решения, которое в данном случае будем искать в виде

(2.3) $x = \psi + X(\psi), \ y = Y(\psi); \ \psi = AP(vt / A)$

где $Y(\psi) = \{Y_1(\psi), Y_2(\psi), \ldots, Y_k(\psi)\}$. При $g(x, y) \equiv 0$ имеем $y \equiv 0$, и траектория искомого решения лежит на координатной оси x. Выбор той или иной оси для исходного приближения осуществляется с учетом дополнительной информации, главным образом, о свойствах симметрии системы.

Подставим соотношения (2.3) в (2.1). При условиях

(2.4) $\psi = A, \ X' = -1, \ Y' = 0$

в выражениях для ускорений $x^{\bullet\bullet}$, $y^{\bullet\bullet}$ отсутствуют δ-функции и уравнения относительно X, Y имеют вид

(2.5) $v^2X'' + f(\psi + X, Y) = 0, \ v^2Y'' + g(\psi + X, Y) = 0$

Из условий для x и $x^{\bullet}$ в (2.2) имеем начальные условия для функции X

(2.6) $\psi = 0, \ X = 0, \ X' = 0$

Последние соотношения в (2.2) и в (2.4) дают краевые условия

(2.7) $\psi = 0, \ Y = 0; \ \psi = A, \ Y' = 0$

Аналогично указанному в п. 1 параметр A определяется условием для X' в (2.4).

Раскладывая функции f и g в степенные ряды в окрестности точки $(\psi, 0)$ и положив

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)} + \ldots, \quad Y = Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \ldots;$$
$$Y^{(i)} = \{Y_1^{(i)}, \ldots, Y_k^{(i)}\}$$

получим следующие системы уравнений:

$$v^2X^{(1)''} = -f(\psi, 0), \ v^2Y^{(1)''} = -g(\psi, 0)$$
$$v^2X^{(2)''} = -f_x'X^{(1)} - f_y'Y^{(1)}, \quad v^2Y^{(2)''} = -g_x'X^{(1)} - g_y'Y^{(1)}$$
$$v^2X^{(3)''} = -f_x'X^{(2)} - f_y'Y^{(2)} - \frac{1}{2}f_{xx}''X^{(1)2} - f_{xy}''X^{(1)}Y^{(1)} -$$
$$-\frac{1}{2}\left(Y^{(1)}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$
$$v^2Y^{(3)''} = -g_x'X^{(2)} - g_y'Y^{(2)} - \frac{1}{2}g_{xx}''X^{(1)2} - g_{xy}''X^{(1)}Y^{(1)} -$$
$$-\frac{1}{2}\left(Y^{(1)}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 g, \ldots$$

Символ f_y' означает вектор производных $\partial f / \partial y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, а g_y' — квадратную матрицу $\| \partial g_j / \partial y_i \|$; все производные функций f, g вычисляются в точке $(\psi, 0)$.

Каждая из функций $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ и $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots$ в отдельности должны удовлетворять соответственно начальным (2.6) и краевым (2.7) условиям.

В качестве примера приведем решение для системы с двумя степенями свободы

$$x^{\cdot\cdot} + \operatorname{sh} x + \gamma \operatorname{sh}(x - y) = 0, \quad y^{\cdot\cdot} + \operatorname{sh} y + \gamma \operatorname{sh}(y - x) = 0$$

В главном приближении решение имеет вид

$$x = \psi + \frac{1+\gamma}{v^2}(\psi - \operatorname{sh}\psi), \qquad y = \frac{\gamma}{v^2}(\operatorname{sh}\psi - \psi \operatorname{ch} A)$$

$$\psi = AP\left(\frac{vt}{A}\right), \qquad \operatorname{ch} A = 1 + \frac{v^2}{1+\gamma}$$

При $v \to \infty$ справедливы соотношения

$$x \sim 2 \ln vP(\varphi), \qquad y \sim -\frac{\gamma}{1+\gamma} x, \qquad \varphi = \frac{vt}{2 \ln v}$$

В силу симметрии системы другое решение такого типа можно получить из данного путем простой замены $x \rightleftarrows y$.

3. Рассмотрим неавтономную систему с k степенями свободы. Сохранив обозначения п. 2, уравнения движения запишем в векторной форме

$$y^{\cdot\cdot} + g(y) = q(t); \; q(t) = \{q_1(t), q_2(t), \ldots, q_k(t)\} \tag{3.1}$$

где $q(t)$ — совокупность периодических функций с периодом $4\tau_0$: $q(t + 4\tau_0) = q(t)$; $q(0) = 0$. Введем «осциллирующее время»

$$\tau = \tau_0 P(t / \tau_0)$$

тогда в силу периодичности функции $q(t)$ будем иметь равенство

$$q(t) = q(\tau), \quad -\infty < t < \infty$$

Периодическое решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$y = A\tau + Y(\tau); \; Y'|_{\tau=\tau_0} = -A, \; A = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \tag{3.2}$$

где A — подлежащие определению постоянные. Получим

$$Y'' + g(A\tau + Y) = q(\tau) \tag{3.3}$$

Положив $Y = Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots$, придем к последовательности уравнений

$$Y^{(1)''} = q(\tau) - g(A\tau), \; Y^{(2)''} = -g_y' Y^{(1)}, \ldots \tag{3.4}$$

где производные g_y' вычисляются при $y = A\tau$. При интегрировании этих уравнений произвольные постоянные выберем так, чтобы функции $Y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ не содержали (учтенного первым выражением (3.2) линейного по τ члена), а также обращались в нуль при $\tau = 0$. Подставив полученную таким образом функцию Y во второе соотношение (3.2), будем иметь систему уравнений относительно величин A_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Пример. Рассмотрим систему

$$y_1^{\cdot\cdot} + g_1(y_1, y_2) = Q\tau, \quad y_2^{\cdot\cdot} + g_2(y_1, y_2) = 0$$
$$g_1(y_1, y_2) \equiv g_2(y_2, y_1) \equiv y_1^n + \gamma(y_1 - y_2)^n$$

Решение указанного типа находим в виде

$$y_1 = A_1\tau + \frac{Q}{6}\tau^3 - \frac{g_1(A_1, A_2)}{(n+1)(n+2)}\tau^{n+2} + \cdots$$
$$y_2 = A_2\tau - \frac{g_1(A_2, A_1)}{(n+1)(n+2)}\tau^{n+2} + \cdots$$

Относительно величин A_1, A_2 получим уравнения

$$A_1 = -\frac{Q}{2}\tau_0^2 + g_1(A_1, A_2)\frac{\tau_0^{n+1}}{n+1} + \cdots, \qquad A_2 = g_1(A_2, A_1)\frac{\tau_0^{n+1}}{n+1} + \cdots \tag{3.5}$$

Одно из решений этих уравнений может быть найдено в виде степенных рядов

$$A_1 = -\frac{Q}{2}\tau_0^2 - \frac{Q^n}{2^n}\frac{1+\gamma}{1+n}\tau_0^{3n+1} + \cdots, \qquad A_2 = \gamma\frac{Q^n}{2^n}\frac{\tau_0^{3n+1}}{n+1} + \cdots$$

Заметим, что при $n = 1$ (линейная система) выписанная часть уравнений (3.5) оказывается линейной и дает следующее выражение для резонансных четвертьпериодов:

$$\tau_0^2 = 2\,(1 + \gamma \mp \gamma)^{-1}$$

(точное выражение отличается множителем $\pi^2/8$).

4. Рассмотрим случай параметрического воздействия. Пусть уравнение движения имеет вид

$$y^{\cdot\cdot} + [M - Q(t)]\,g(y) + f(y) = 0 \tag{4.1}$$

Здесь y — как и прежде, вектор размерности k; M и $Q(t)$ — матрицы k-го порядка, элементы последней π-периодические четные функции; $g(y)$ и $f(y)$ — k-мерные вектор-функции, удовлетворяющие условию симметрии: $g(y) = -g(-y)$, $f(x) = -f(-x)$.

Будем искать нечетное 2π-периодическое решение в виде

$$y = A\tau + Y(\tau); \quad \tau = \frac{\pi}{2}P\left(\frac{2t}{\pi}\right)$$

При условии

$$\tau = \pi/2, \; Y' = -A \tag{4.2}$$

будем иметь

$$Y'' = -[M - Q(\tau)]\,g(A\tau + Y) - f(A\tau + Y)$$
$$Y(0) = 0, \; Y'(0) = 0; \; Q(\tau) \equiv Q(t)$$

Эти соотношения позволяют в главном приближении записать решение исходного уравнения в виде

$$y = A\tau - \int_0^\tau\int_0^\tau [(M - Q)\,g(A\tau) + f(A\tau)]\,d\tau\,d\tau \tag{4.3}$$

при этом соотношение (4.2) дает

$$\int_0^{\pi/2} [(M - Q)\,g(A\tau) + f(A\tau)]\,d\tau = A \tag{4.4}$$

Пример. Рассмотрим систему с одной степенью свободы

$$M = a = \text{const}, \; Q(t) = 2q\cos 2t, \; g(x) \equiv x, \; f(x) \equiv \alpha x^n$$

Произведя интегрирование в (4.3), (4.4), получим

$$x = A\tau - \frac{Aa\tau^3}{6} - \frac{qA}{2}(\cos 2\tau + 1)\,\tau + \frac{qA}{2}\sin 2\tau -$$
$$- \frac{\alpha A^n \tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)}; \qquad a\frac{\pi^2}{8} + q + \frac{\alpha}{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} A^{n-1} = 1$$

Последнее соотношение при $\alpha \neq 0$ рассматривается как уравнение относительно A, если $\alpha = 0$ (уравнение Матье), получаем приближенное выражение, связывающее собственное значение a и параметр q.

5. Приближенные решения описанного типа в сочетании с методами усреднения позволяют сравнительно просто (не прибегая к сложным специальным функциям) рассмотреть системы, близкие к консервативным, в случаях, когда квазигармоническая аппроксимация решения оказывается непригодной.

Покажем это на примере уравнения

$$x^{\cdot\cdot} + g(x, x^{\cdot}) + \operatorname{sh} x = 0; \quad g(x, x^{\cdot}) \equiv (bx^2 - 1)\, x^{\cdot}$$

Рассматривая асимптотические решения для случая $g(x, x^{\cdot}) \equiv 0$ (см. (1.17))

$$x = AP(\varphi), \quad x^{\cdot} = e^{A/2} P'(\varphi); \quad A \to \infty$$

в качестве формул перехода к новым переменным $A(t)$, $\varphi(t)$ при $g(x, x^{\cdot}) \not\equiv 0$, придем к уравнениям

$$A^{\cdot} = -2e^{-A/2} g(AP, e^{A/2}P')\, P', \quad \varphi^{\cdot} = \frac{e^{A/2}}{A} + \frac{2e^{-A/2}}{A} g(AP, e^{A/2}P')\, P$$

Ограничимся рассмотрением укороченной системы [4]

$$A = 2\left(1 - \frac{b}{3} A^2\right), \quad \varphi^{\cdot} = \frac{e^{A/2}}{A}$$

Первое уравнение имеет решение

$$A = \sqrt{\frac{3}{b}} \begin{Bmatrix} \text{th} \\ \text{cth} \end{Bmatrix} \left[2\sqrt{\frac{b}{3}}\,(t + t_0) \right], \quad t_0 = \text{const}$$

При $t \to \infty$ получаем автоколебательный режим с «амплитудой» $A = \sqrt{3/b}$. Таким образом, аппроксимация решения пилообразной функцией и процедура осреднения оправданны при достаточно малых значениях параметра b.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев В. Ф.* Метод анализа виброударных систем с помощью специальных функций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 30—34.
2. *Pak C. H.*, *Rosenberg R. M.* On the existence of normal mode vibrations in nonlinear systems.— Quart. Appl. Math., 1968, v. 26, No. 3, p. 403—416.
3. *Маневич Л. И.*, *Михлин Ю. В.* О периодических решениях, близких к прямолинейным нормальным формам колебаний.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 1051—1058.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
7.II.1984