

УДК 531.36 : 534

## О СРАЩИВАНИИ ЛОКАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Михлин Ю. В.

Рассматривается поведение нормальных форм колебаний нелинейных консервативных систем с конечным числом степеней свободы при изменении амплитуды колебаний от нуля до бесконечности. Нормальные колебания в нелинейном случае представляют собой обобщение нормальных колебаний линейных консервативных систем [1]. Предполагается, что потенциал нелинейной системы — полином четной степени по всем позиционным переменным. Можно построить траектории нормальных колебаний в конфигурационном пространстве как при достаточно малых амплитудах (квазилинейные разложения), так и при достаточно больших амплитудах, используя то, что в этих двух случаях система близка к однородной [2, 3]. Сращивание полученных локальных разложений производится при помощи дробно-рациональных представлений Паде [4], что позволяет проследить за поведением форм колебаний при непрерывном изменении амплитуды колебаний.

1. Исходная консервативная система определяется следующими уравнениями движения:

$$(1.1) \quad z_i'' + \Pi_{z_i}(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где потенциал  $\Pi(z_1, z_2, \dots, z_n)$  представляет собой положительно-определенный полином от  $z_1, \dots, z_n$ , наименьшая степень которого равна двум, а наибольшая  $2m$ . Здесь и далее предполагается, что кинетическая энергия приведена к виду  $T = 1/2(z_1'^2 + \dots + z_n'^2)$ . Такого типа уравнения часто встречаются в задачах исследования колебаний нелинейных упругих систем.

Выделив одну из координат, например  $z_1$ , используем замену  $z_i = cx_i$ , где  $c = z_1(0)$ . Ясно, что  $x_1(0) = 1$ . Кроме того, без уменьшения общности, полагаем, что  $x_1'(0) = 0$ . Уравнения (1.1) переписываются так:

$$(1.2) \quad x_i'' + V_{x_i}(c, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad V = \sum_{k=0}^{2m-2} C^k V^{(k+2)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

причем  $V^{(r)}$  содержит члены  $r$ -й степени по переменным в потенциале  $V(c, x_1, x_2, \dots, x_n) = \Pi(z_1(x_1), z_2(x_2), \dots, z_n(x_n))$ . Интеграл энергии здесь имеет вид

$$(1.3) \quad \sum_{i=1}^n x_i'^2 + V(c, x_1, x_2, \dots, x_n) = h$$

где  $h$  — энергия системы. В дальнейшем будем считать, что независимым параметром является амплитуда колебаний  $c = z_1(0)$ , а энергия определяется соотношением (1.3). Поэтому целесообразно энергию  $h$  представить в виде суммы слагаемых, отвечающих однородным составляющим потенциала  $V$

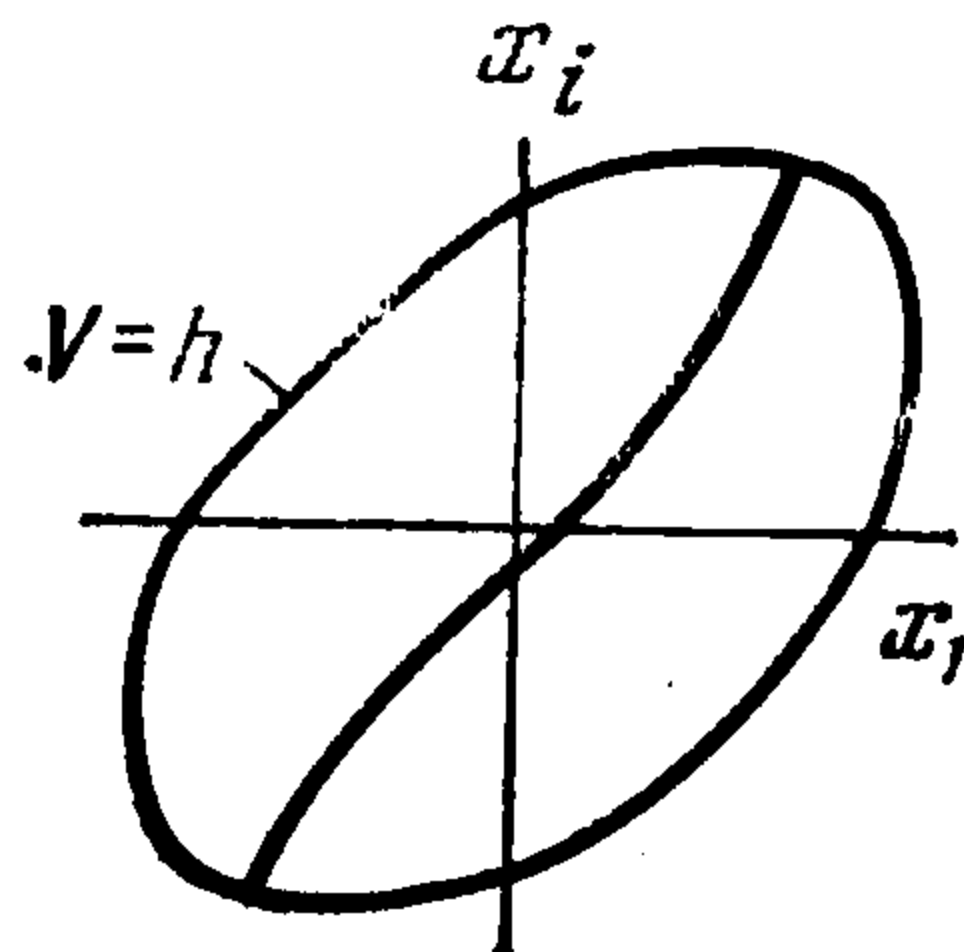
$$(1.4) \quad h = \sum_{k=2}^{2m-2} c^k h_k$$

Вводя новую независимую переменную  $x \equiv x_1$  и исключая время из уравнений (1.2) при помощи интеграла энергии (1.3), получим уравнения

для определения траекторий  $x_i = x_i(x)$  в конфигурационном пространстве (штрих означает дифференцирование по  $x$ )

$$(1.5) \quad 2x_i'' [h - V(c, x, x_2, \dots, x_n)] + [1 + \sum_{i=2}^n (x_i')^2] \times \\ \times [-x_i' V_x(c, x, \dots, x_n) + V_{x_i}(c, x, \dots, x_n)] = 0 \\ (i = 2, 3, \dots, n)$$

Уравнения (1.5) можно использовать для определения траекторий нормальных колебаний исходной системы в виде однозначных аналитических функций  $x_i = x_i(x)$  (фиг. 1). Траектории имеют точки возврата на



Фиг. 1

максимальной изоэнергетической поверхности  $V = h$ , где все скорости обращаются в нуль. Однако эти точки — особые точки уравнений (1.5). Как можно проверить непосредственным вычислением, особые точки уравнений (1.5) — точки пересечения траектории с поверхностью  $V = h$  — оказываются устранимыми особыми точками, если траектория пересекает поверхность ортогонально [1—3], т. е.

$$(1.6) \quad [-x_i' V_x(c, x, x_2(x), \dots, x_n(x)) + V_{x_i}(c, x, x_2(x), \dots, \\ \dots, x_n(x))] |_{x=X} = 0$$

Здесь  $X$  — значения переменной  $x$  на поверхности  $V = h$ . Как указано выше, одно из этих значений  $X_{(1)} = x(0) = 1$ .

При малых амплитудах  $c$  в качестве порождающей следует выбрать однородную линейную систему с потенциалом  $V^{(2)}$ , а при больших — однородную нелинейную систему с потенциалом  $V^{(2m)}$ . И линейная, и нелинейная однородные системы допускают прямолинейные нормальные формы колебаний вида  $x_i = k_i x$ , причем постоянные  $k_i$  определяются из алгебраических уравнений [1] —  $k_i V_x^{(r)}(1, k_2, \dots, k_n) + V_{x_i}^{(r)}(1, k_2, \dots, \dots, k_n) = 0$ . Число этих форм колебаний может превышать число степеней свободы.

Вблизи линейной системы при малых  $c$  можно найти траектории нормальных колебаний в форме рядов по степеням  $x$  и  $c$

$$(1.7) \quad x_i^{(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{(i)}(x) c^j \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{jl}^{(i)} x^l c^j \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

а вблизи однородной нелинейной системы (при больших  $c$ ) — в форме рядов по степеням  $x$  и  $c^{-1}$  [2, 3]

$$(1.8) \quad x_i^{(2)} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^{(i)}(x) c^{-j} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{jl}^{(i)} x^l c^{-j} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

Заметим, что функции  $\alpha_j(x)$ ,  $\beta_j(x)$  можно получить и в квадратурах, поскольку уравнения в вариациях для нормальных колебаний однородных систем сводятся к гипергеометрическим [5].

Ограничения на порождающие системы и в линейном, и в нелинейном случае указаны в [2, 3] и имеют смысл исключения из рассмотрения случаев внутреннего резонанса (ветвления нормальных колебаний).

Амплитудные значения  $x = 1$ ,  $x_i^{(1)}(1)$ , или  $x_i^{(2)}(1)$  (при  $\dot{x} = \dot{x}_i = 0$ ), полностью определяют режим нормальных колебаний. Поэтому в дальнейшем с целью упрощения вычислений будем рассматривать только разложения  $\rho_i^{(1)} = x_i^{(1)}(1)$  и  $\rho_i^{(2)} = x_i^{(2)}(1)$  по степеням  $c$ , которые получаются из (1.7) и (1.8) при  $x = 1$  (здесь  $\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i)}(1)$ ,  $\beta_j^{(i)} = \beta_j^{(i)}(1)$ ); далее используем сокращенную запись  $\sum_{j=0}^r \alpha_j^{(i)} c^{\pm j} = \sum \alpha_i^{(\pm j)}$  и аналогичные обозначения для других подобных сумм):

$$(1.9) \quad \rho_i^{(1)} = \sum \alpha_{i(\infty)}^{(j)}, \quad \rho_i^{(2)} = \sum \beta_{i(\infty)}^{(-j)}$$

2. Для сращивания локальных разложений (1.9) и исследования поведения траекторий нормальных колебаний при произвольных значениях амплитуды  $c$  используются дробно-рациональные диагональные представления Паде

$$(2.1) \quad P_s^{(i)} = \frac{\sum a_{i(s)}^{(j)}}{\sum b_{i(s)}^{(j)}} \quad (s = 1, 2, 3, \dots; i = 2, 3, \dots, n)$$

Помимо представлений Паде по положительным степеням  $c$  используем и представления по степеням  $c^{-1}$ , умножив числитель и знаменатель (2.1) на  $c^{-s}$ . Полученное выражение и (2.1) сравниваем с разложениями (1.9), что приводит к равенствам

$$(2.2) \quad (\sum \alpha_{i(\infty)}^{(j)}) (\sum b_{i(s)}^{(j)}) = \sum a_{i(s)}^{(j)}, \quad (\sum \beta_{i(\infty)}^{(-j)}) (\sum b_{i(s)}^{(j-s)}) = \sum a_{i(s)}^{(j-s)}$$

Удерживая в (2.2) члены порядка  $c^r$  ( $-s \leq r \leq s$ ) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $c$ , получим  $n - 1$  систему  $2(s + 1)$  линейных алгебраических уравнений для определения  $a_j^{(i)}$ ,  $b_j^{(i)}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, s$ ). Определители этих систем имеют следующий вид:

$$(2.3) \quad \Delta_s^{(i)} = \det A_s^{(i)}$$

$$A_s^{(i)} = \left\| \begin{array}{c|c} -I_{s+1} & B_{\alpha s+1}^{(i)} \\ \hline & B_{\beta s+1}^{(i)T} \\ -I_{s+1} & \end{array} \right\|, \quad B_{\gamma s+1}^{(i)} = \left\| \begin{array}{cccc} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_s & \gamma_{s-1} & \dots & \gamma_0 \end{array} \right\|$$

где  $s + 1$  — размерность матрицы,  $I_{s+1}$  — единичная матрица,  $T$  — символ транспонирования.

Поскольку определители (2.3), вообще говоря, не равны нулю, системы алгебраических уравнений имеют единственное точное тривиальное решение  $a_j^{(i)} = b_j^{(i)} = 0$ .

Выделим некоторое приближенное представление Паде, отвечающее удержанным членам в разложениях (1.9), с ненулевыми коэффициентами  $a_j^{(i)}$ ,  $b_j^{(i)}$ . Полагаем, что  $b_0^{(i)} \neq 0$  (в противном случае  $\rho_i^{(1)}(1) \rightarrow \infty$  при  $c \rightarrow 0$ ). Без уменьшения общности можно считать, что  $b_0^{(i)} = 1$ . Теперь системы алгебраических уравнений для нахождения  $a_j^{(i)}$ ,  $b_j^{(i)}$  становятся переопределенными. Все неизвестные коэффициенты  $a_0^{(i)}$ ,  $a_1^{(i)}$ ,  $\dots$ ,  $a_s^{(i)}$ ,  $b_1^{(i)}$ ,  $b_2^{(i)}$ ,  $\dots$ ,  $b_n^{(i)}$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) определяются из  $2s + 1$  уравнения, а «невязку» этого приближенного решения получим подставляя значения всех коэффициентов в оставшееся уравнение. Очевидно, что невязка оп-

ределяется значением  $\Delta_s^{(i)}$ , поскольку при  $\Delta_s^{(i)} = 0$  получим ненулевые решения и, соответственно, точные представления Паде для разложений (1.9) в данном приближении по  $c$ .

Отсюда следует необходимое условие сходимости последовательности приближений Паде (2.1) при  $s \rightarrow \infty$  к дробно-рациональным функциям

$$(2.4) \quad P^{(i)} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} c^j \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(i)} c^j \right)^{-1} \quad (b_0^{(i)} \equiv 1)$$

А именно

$$(2.5) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \Delta_s^{(i)} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

Действительно, если условия (2.5) не будут выполнены, то заведомо не будут получены ненулевые значения коэффициентов  $a_j^{(i)}$ ,  $b_j^{(i)}$  в представлениях (2.4).

Отметим, что предельные представления Паде  $P^{(i)}$  будут пригодны для описания решения при любых значениях амплитуды  $c$ , если функции  $P^{(i)}$  не имеют полюсов.

Поскольку в общем случае имеется несколько квазилинейных локальных разложений (1.7) и существенно нелинейных локальных разложений (1.8), причем число этих разложений может и не совпадать, именно условия сходимости (2.5) позволяют установить связь между квазилинейными и существенно нелинейными разложениями, т. е. определить, какие из них соответствуют одному решению, а какие — различным.

3. Для конкретного анализа с использованием описанной методики рассмотрим консервативную систему с двумя степенями свободы, потенциал которой содержит члены второй и четвертой степени по переменным. После замены  $z_1 = cx$ ,  $z_2 = cy$ , где  $c = z_1(0)$ ,  $(x(0) = 1)$ , получаем

$$V = d_1 \frac{x^2}{2} + d_2 \frac{y^2}{2} + d_3 xy + c^2 \left( \gamma_1 \frac{x^4}{4} + \gamma_2 x^3 y + \gamma_3 \frac{x^2 y^2}{2} + \gamma_4 x y^3 + \gamma_5 \frac{y^4}{4} \right) \equiv \\ \equiv V^{(2)} + c^2 V^{(4)}$$

Уравнение для определения траектории  $y(x)$  здесь имеет вид

$$(3.1) \quad 2y''(h - V) + (1 + y'^2)(-y'V_x + V_y) = 0$$

а граничные условия (1.6) можно записать так:

$$(-y'V_x + V_y)_{h-V=0} = 0$$

На поверхности  $h - V = 0$  (при  $x' = y' = 0$ ) одно из значений переменной  $x$  равно  $x(0) = 1$ , поэтому соответствующее граничное условие имеет вид

$$(3.2) \quad (-y'V_x + V_y)|_{x=1} = 0$$

В силу симметрии системы относительно начала координат второе граничное условие (при  $x = -1$ ) совпадает с (3.2).

Поскольку траектория будет представлена в виде рядов по степеням  $c^2$  или  $c^{-2}$ , введем параметр  $\nu$  ( $\nu = c^2$  в квазилинейном случае и  $\nu = c^{-2}$  в существенно нелинейном случае). Теперь решение уравнения (3.1) разыскивается в форме рядов по малому параметру  $\nu$

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j(x) \nu^j$$

В уравнениях (3.1) и граничных условиях (3.2)  $V = V_0 + \nu V_1$ ,  $h = h_0 + \nu h_1$ , причем в квазилинейном случае

$$\nu = c^2, \quad V_0 = V^{(2)}, \quad V_1 = V^{(4)}, \quad h_0 = V^{(2)}|_{x=1}, \quad h_1 = V^{(4)}|_{x=1}$$

а в существенно нелинейном случае

$$\nu = c^{-2}, \quad V_0 = V^{(4)}, \quad V_1 = V^{(2)}, \quad h_0 = V^{(4)}|_{x=1}, \quad h_1 = V^{(2)}|_{x=1}$$

В нулевом приближении по  $\nu$  как линейная, так и нелинейная однородная система допускают прямолинейные нормальные формы колебаний вида  $y = k_0 x$ . Постоянные  $k_0$  определяются из алгебраических уравнений второй (линейная система), либо четвертой (нелинейная система) степени, которые получаются из (3.1)

$$(3.3) \quad -k_0 V_{0x}(1, k_0) + V_{0y}(1, k_0) = 0$$

Пусть для определенности  $d_1 = d_2 = 3$ ;  $d_3 = -2$ ;  $\gamma_1 = 1$ ;  $\gamma_2 = 0$ ;  $\gamma_3 = 3$ ;  $\gamma_4 = 0,2091$ ;  $\gamma_5 = 2$ . Запишем уравнения движения такой системы

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x'' + x + 2(x - y) + c^2(x^3 + 3xy^2 + 0,2091 y^3) &= 0 \\ y'' + y + 2(y - x) + c^2(2y^3 + 3x^2y + 0,6273y^2x) &= 0 \end{aligned}$$

В линейном пределе ( $\nu = 0$ ), используя уравнения (3.3), получаем две прямолинейные нормальные формы колебаний вида  $y = k_0 x$ ,  $k_0^{(1)} = 1$ ;  $k_0^{(2)} = -1$ , а нелинейная система (уравнения движения содержат только кубические члены по  $x, y$ ) допускает четыре такие формы:  $k_0^{(3)} = 1,496$ ;  $k_0^{(4)} = 0$ ;  $k_0^{(5)} = -1,279$ ;  $k_0^{(6)} = -5$ .

Для определения криволинейных траекторий нормальных колебаний, близких к прямым, используем уравнения (3.1) и граничные условия (3.2). В частности, в первом приближении по  $\nu$  уравнение для определения траектории имеет вид

$$2y_1''(h_0 - V_0) + (1 + k_0^2)[-y_1'V_{0x} + y_1(V_{0yy} - k_0V_{0xy}) - k_0V_{1x} + V_{1y}] = 0$$

где всюду в функции  $V_0, V_1$  и их производные подставляем  $y = k_0 x$ . Аналогично получаются уравнения и в следующих приближениях по  $\nu$ . Такое же расщепление по малому параметру следует провести и в граничных условиях (3.2).

Удерживая в решении члены, содержащие  $x$  и  $x^3$  (члены порядка  $x^2$  отсутствуют в силу симметрии системы относительно начала координат), и выполнив расчет в двух приближениях по  $\nu$ , получим (везде далее  $\rho = y(1)$ ):

в квазилинейном случае ( $\nu = c^2$ )

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= x + \nu(-0,532x + 0,355x^3) + \nu^2(1,970x - 2,405x^3) \\ y^{(2)} &= -x + \nu(-0,099x - 0,013x^3) + \nu^2(0,041x + 0,009x^3) \\ \rho^{(1)} &= 1 - 0,177\nu - 0,435\nu^2 \quad \rho^{(2)} = -1 - 0,112\nu + 0,050\nu^2 \end{aligned}$$

в существенно нелинейном случае ( $\nu = c^{-2}$ )

$$(3.5) \quad \begin{aligned} y^{(3)} &= 1,496x + \nu(0,830x - 0,098x^3) + \nu^2(0,822x - 0,123x^3) \\ y^{(4)} &= \nu(x + 0,667x^3) + \nu^2(1,129x - 4x^3) \\ y^{(5)} &= -1,279x + \nu(0,844x - 0,077x^3) + \nu^2(-2,624x + 0,351x^3) \\ y^{(6)} &= -5x + \nu(-2,844x - 0,321x^3) + \nu^2(1,962x - 0,099x^3) \\ \rho^{(3)} &= -1 - 0,177\nu - 0,435\nu^2 \quad \rho^{(4)} = 1,667\nu - 2,871\nu^2 \\ \rho^{(5)} &= -1,279 + 0,767\nu - 2,273\nu^2 \quad \rho^{(6)} = -5 - 3,165\nu + 1,863\nu^2 \end{aligned}$$

Сравнивая попарно квазилинейные разложения  $\rho^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ), с разложениями для больших амплитуд  $\rho^{(j)}$  ( $j = 3, 4, 5, 6$ ), вычисляем для каждой пары определители (2.4) при  $s = 1, 2$ . Расчеты показывают, что лишь для пары  $\rho^{(1)}$  и  $\rho^{(4)}$ , а также  $\rho^{(2)}$  и  $\rho^{(5)}$  погрешность убывает при увеличении  $s$ . Таким образом, надо полагать, что каждая пара отвечает одному решению. Сравниваем локальные разложения, используя представление (2.1) при  $s = 2$ .

Для пары  $\rho^{(1)}$  и  $\rho^{(4)}$  получаем представление

$$(3.6) \quad \rho = y(1) \approx \frac{1 + 1,20c^2}{1 + 1,61c^2 + 0,72c^4}$$

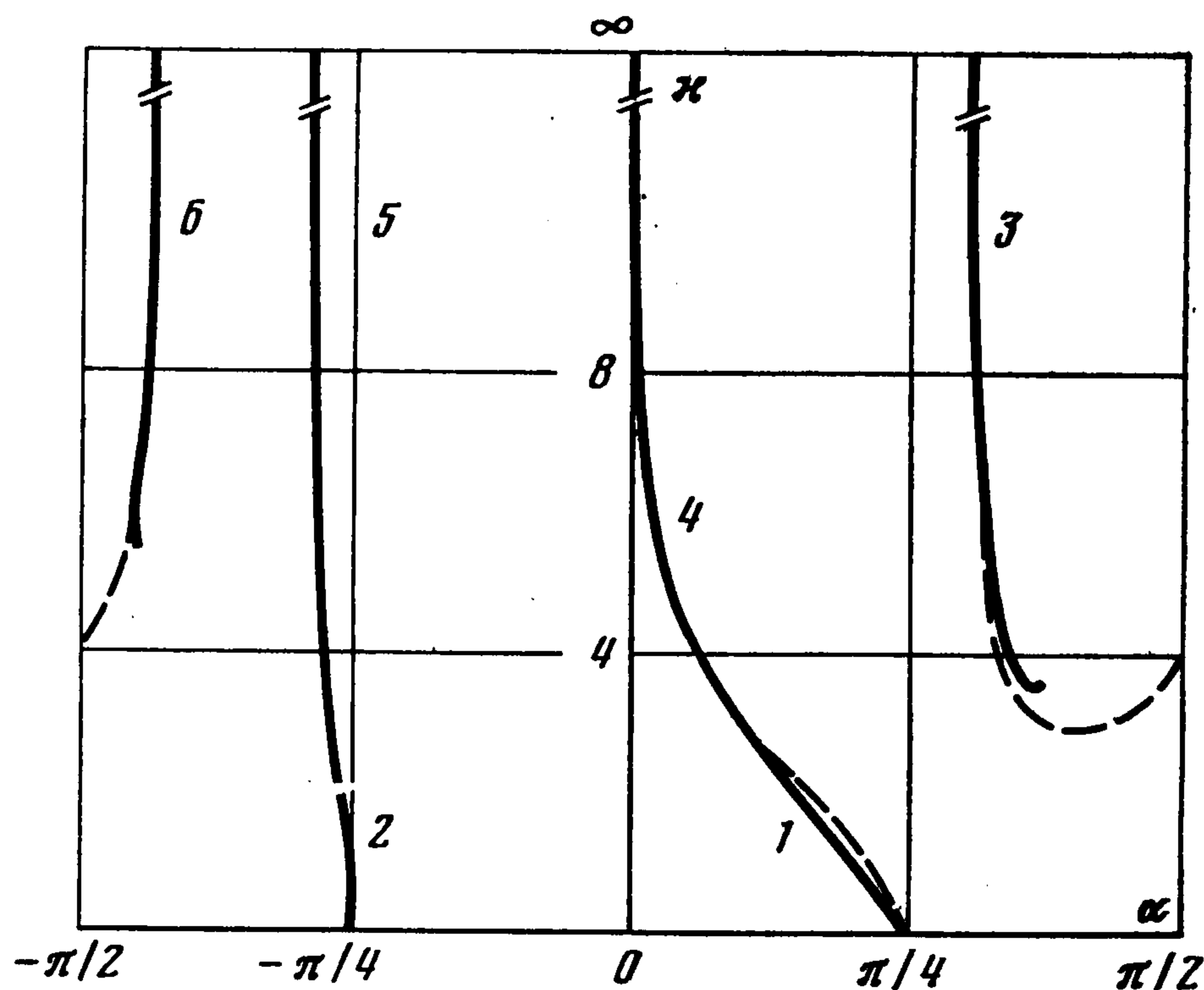
(коэффициент  $b_2 = 0,72$  вычислен с погрешностью 0,06). Для пары  $\rho^{(2)}$  и  $\rho^{(5)}$  получаем представление

$$(3.7) \quad \rho = y(1) \approx \frac{-1 - 1,11c^2 - 0,275c^4}{1 + 1,00c^2 + 0,215c^4}$$

(коэффициент  $b_2 = 0,215$  вычислен с погрешностью 0,01).

Поскольку для локальных разложений  $\rho^{(4)}$  и  $\rho^{(6)}$  нет соответствующих разложений для малых амплитуд, ясно, что при уменьшении амплитуды эти два решения исчезают сливаясь в некоторой предельной точке. Приближенное значение амплитуды  $c_0$ , при котором это происходит, определим приравняв  $\rho^{(3)}$  и  $\rho^{(6)}$ . Получаем  $c = c_0 \approx 0,5$ .

Итак, дробно-рациональные представления Паде позволяют судить о нелокальном поведении форм колебаний конечномерных нелинейных систем. Для системы (3.4) описание эволюции форм колебаний дано на фиг. 2 в параметрах  $\kappa = \ln(1 + c^2 h^2)$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg} \rho$  (картина периодична по  $\alpha$  с периодом  $2\pi$ ). Цифрами 1, 2, ..., 6 отмечены кривые, соответствующие разложениям  $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \rho^{(6)}$  по степеням  $c$ . Сплошные



Фиг. 2

линии отвечают аналитическому решению (использованы представления (3.6) и (3.7)), штриховые — проверочному расчету на ЭВМ, выполненному А. Л. Жупиевым. Можно отметить хорошее соответствие аналитических результатов и численного расчета. Для решения (2.5) представление (3.7) и численный расчет дают одну и ту же кривую.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosenberg R. M.* On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom.— In: *Advances on Applied Mechanics*. V. 9. N. Y.: Acad. Press, 1966, p. 155—242.
2. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В.* О периодических решениях, близких к прямолинейным нормальным формам колебаний.— *ПММ*, 1972, т. 36, вып. 6, с. 1051—1058.
3. *Михлин Ю. В.* Применение асимптотических методов для определения нормальных колебаний в нелинейных консервативных системах.— В кн.: *Динамическая прочность и устойчивость элементов крупных машин*. Вып. 1. Изд-е Днепропетров. ун-та, 1973, с. 175—180.
4. *Baker G. A., Jr.* *Essential of Padé Approximations* N. Y.: Acad. Press, 1975. 306 p.
5. *Жупиев А. Л., Михлин Ю. В.* Устойчивость и ветвление нормальных форм колебаний нелинейных систем.— *ПММ*, 1981, т. 45, вып. 3, с. 450—455.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
13.VI.1984