

УДК 531.36 : 534

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННЫХ НЕКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Акуленко Л. Д.

Методами возмущений проводится исследование картины синтеза оптимального по быстродействию управления для неколебательных систем с одной степенью свободы довольно общего вида. При этом используются результаты анализа таких систем при помощи принципа максимума [1], основанные на построении кривой переключений релейного управления [2]. Результаты работы дополняют также картину приближенного синтеза в окрестности точки покоя (начала координат) для управляемых колебательных систем, получаемую асимптотическими методами [3].

1. Постановка задачи оптимального по быстродействию синтеза для возмущенных неколебательных систем. 1.1. Исходная задача управления. Рассматривается возмущенная управляемая динамическая система с одной степенью свободы

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = f(x, y, u) + \varepsilon F(x, y, u) \\ (x, y) &\in G \subseteq R_2; \quad x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0 \end{aligned}$$

Здесь  $x, y$  — координата и скорость системы, обобщенные фазовые переменные;  $R_2$  — фазовая плоскость; точка означает дифференцирование по времени  $t \in [0, T]$  ( $T < \infty$ );  $u$  — скалярная управляющая функция из класса кусочно-гладких, такая, что  $|u(t)| \leq 1$ ;  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  — малый числовой параметр ( $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ );  $f, F$  — гладкие функции  $x, y, u$  в рассматриваемой области, причем возмущающая функция  $F$  может непрерывно зависеть от  $\varepsilon$ . Дополнительные свойства (гладкость, степень роста и др.) функций  $f, F$  и свойства области  $G$  обсуждаются ниже. Следует отметить, что ограничения на управление  $u$  вида  $r^-(x, y, \varepsilon) \leq u \leq r^+(x, y, \varepsilon)$  приводятся к рассматриваемым линейной заменой ( $v$  — новое управление)

$$u = 1/2 (r^+ + r^-) + 1/2 (r^+ - r^-) v, \quad v \in [-1, 1]$$

Для возмущенной системы (1.1) ставится задача определения закона оптимального по быстродействию управления в форме синтеза  $u(x, y, \varepsilon)$ , приводящего фазовую точку  $(x, y) \in G$  в начало координат (точка  $(0, 0) \in G$ ) при достаточно малых значениях  $\varepsilon > 0$ . Считается, что решение для невозмущенной задачи ( $\varepsilon = 0$ ) оптимального синтеза известно в виде кривой переключений (КП) управления, имеющего релейный характер [1, 2].

Ниже исследуется случай неколебательных систем (неосциллирующих объектов [2]), для которых невозмущенные КП имеют наиболее простой вид: КП состоит из двух идущих в начало координат полутраекторий невозмущенной системы (1.1), отвечающих постоянным крайним значениям  $u = \pm 1$ . В [2] приведены достаточные условия, при выполнении которых синтез оптимального по быстродействию управления  $u(x, y)$  на всей плоскости  $R_2$  или в некоторой открытой области  $G \subset R_2$ , включающей окрестность начала координат, качественно имеет тот же вид, что и для простейшей динамической системы типа (1.1):  $\dot{x} = u, |u| \leq 1$ . А именно

[2], «каждое оптимальное управление имеет не более одного переключения, а линия переключений переходит из второго в четвертый квадрант, касаясь в начале координат оси  $x_2$ » ( $x_2 = y$ ).

Достаточными условиями такой картины оптимального синтеза оказываются следующие [2]. Предполагается, что функция  $f$  непрерывно дифференцируема по всем аргументам и удовлетворяет условию монотонности по  $u$ :

$$(1.2) \quad f_u'(x, y, u) > 0, (x, y) \in G, |u| \leq 1$$

Далее, для  $u = \pm 1$  в конечной точке  $x = y = 0$  справедливы неравенства

$$(1.3) \quad f(0, 0, +1) = f^+ > 0, f(0, 0, -1) = f^- < 0$$

Условия (1.3) обеспечивают остановку системы в указанной точке при некотором  $u = u_0 = \text{const}$ ,  $|u_0| < 1$  и указанное выше поведение КП и оптимальных траекторий в достаточно малой ее окрестности.

Считается также, что никакая траектория невозмущенной системы (1.1) не может за конечный промежуток времени уйти в бесконечность или прийти из бесконечности (достаточные условия могут иметь форму равномерных условий Липшица по  $x, y$  [2]). Если движение рассматривается в ограниченной области  $G$ , то данное требование оказывается излишним.

Следующее более сложное условие (при выполнении предыдущих «естественных» условий) достаточно для указанного выше поведения оптимального синтеза. А именно, требуется существование непрерывно дифференцируемой по  $x, y$  функции  $\varphi(x, y, u)$ , такой, чтобы

$$(1.4) \quad u\varphi_x' + f\varphi_y' + \varphi^2 - \varphi f_y' - f_x' \leq 0, u = \pm 1, (x, y) \in G$$

При помощи неравенства (1.4) на основе принципа максимума [1] устанавливается в [2], что оптимальное управление  $u(x, y)$  или  $u(t)$  релейно и имеет не более одного переключения.

1.2. Построение невозмущенной КП и картины синтеза. При  $\varepsilon = 0$  КП  $\Pi(x, y)$  управления  $u(x, y)$  строится следующим образом. Верхняя левая  $\Pi^-$  и нижняя правая  $\Pi^+$  ветви КП определяются соотношениями

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \Pi &= \Pi^- \cup \Pi^+ \\ \Pi^\mp(x, y) &= \{x, y: x^\mp(\Theta, x, y) = 0, \\ & y^\mp(\Theta, x, y) = 0, \Theta \geq 0\} \end{aligned}$$

Здесь  $\Theta$  — параметр кривой; функции  $x^\mp(t, x^0, y^0)$ ,  $y^\mp(t, x^0, y^0)$  — решения невозмущенной задачи Коши (1.1) для значений  $u = \mp 1$  ( $x \leq 0$ ,  $y \geq 0$ ) соответственно, идущие в начало координат. При сделанных предположениях эти решения могут быть построены на интервале времени  $t \in [0, \Theta]$ , на котором движение системы происходит в области  $G$ . Величина  $\Theta$  в (1.5) имеет смысл интервала времени перехода фазовой точки  $(x, y)$  в начало координат вдоль КП при фиксированном  $u = -1$  или  $u = +1$ . Таким образом, соотношения (1.5) дают параметрическое представление невозмущенной КП  $\Pi(x, y)$ .

КП  $\Pi$  может быть записана в другой форме:

$$(1.6) \quad \Pi(x, y) = \{x, y: \Psi^\mp(x, y) = 0, x \leq 0\}$$

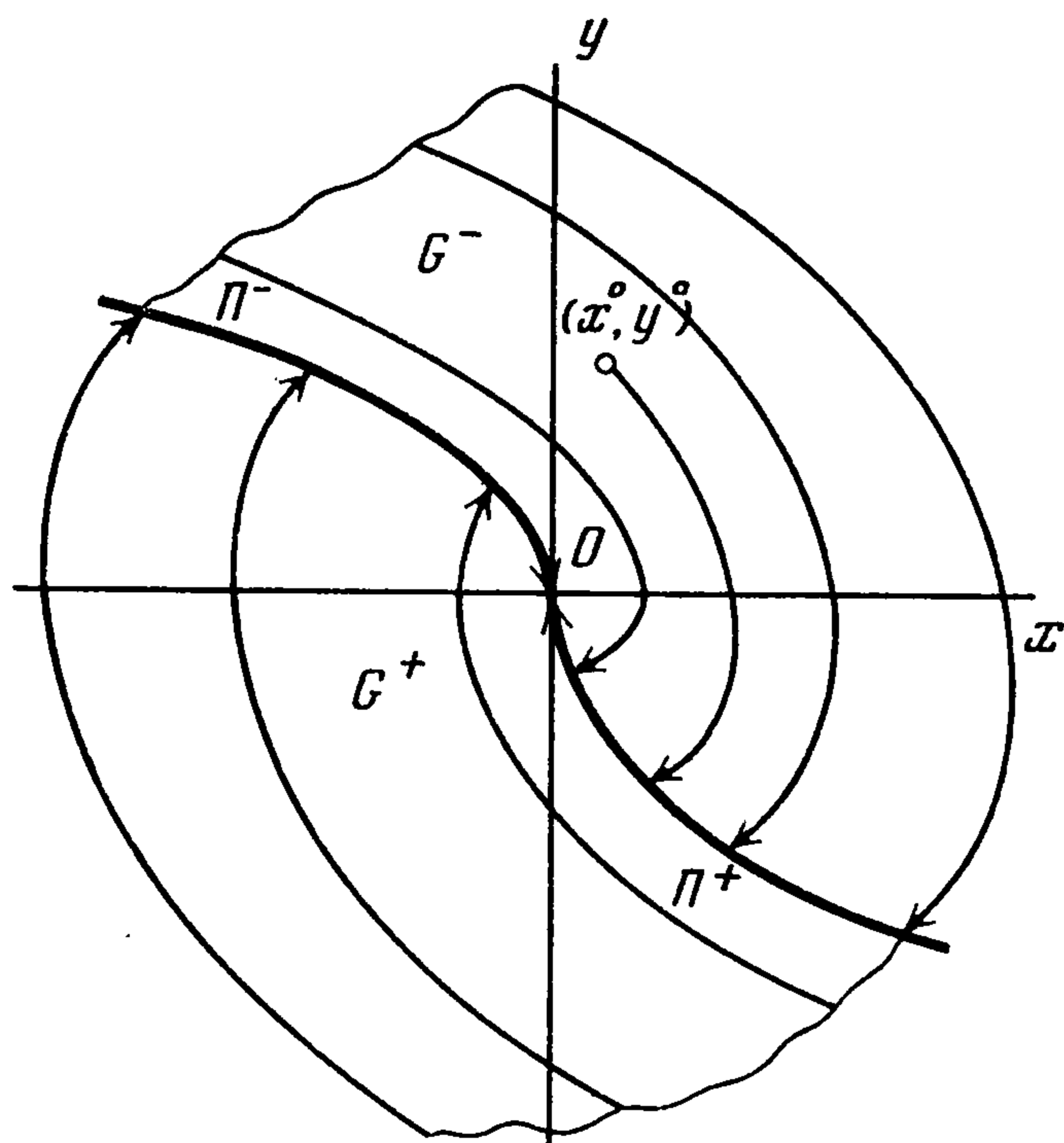
Здесь  $\Psi^\mp$  — частные интегралы уравнений

$$f(x, y, \mp 1) dx = y dy, \Psi^\mp(0, 0) = 0$$

Если удастся разрешить уравнение  $\Psi^\mp(x, y) = 0$  относительно  $x$ ,  $x = x^\mp(y)$  или  $y$ ,  $y = y^\mp(x)$ , то КП находится в явном виде. При сделанных

предположениях относительно гладкости функции  $f$  в малой окрестности начала координат для КП справедливо выражение  $x = \frac{1}{2}f^\mp y^2 + O(y^3)$ ,  $y \geq 0$ .

Линия  $\Pi(x, y)$  делит область  $G$  на две части — открытые подобласти  $G^-$  и  $G^+$ :  $G = G^- \cup G^+ \cup \Pi$ . В открытых подобластях  $G^\mp$  и на частях



из границ  $\Pi^\mp$  оптимальное управление  $u = \mp 1$  соответственно, т. е. оптимальный синтез имеет вид

$$(1.7) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= -1, \\ \forall (x, y) &\in G^- \cup \Pi^- \\ u(x, y) &= +1, \\ \forall (x, y) &\in G^+ \cup \Pi^+ \end{aligned}$$

Типичное поведение КП и оптимальных траекторий при  $(x, y) \in G$  (качественная картина синтеза) приведены на фигуре.

Функция Беллмана задачи — время быстрогодействия  $T = T(x, y)$  из произвольной точки  $(x, y) \in G$  в начало координат — представима

в виде  $T = S + \Theta$ , где  $S$  — время движения из текущей точки  $(x, y)$  до точки  $(\xi, \eta)$  пересечения траектории с соответствующей ветвью КП  $\Pi$ , а  $\Theta$  — время движения из точки  $(\xi, \eta)$  в начало координат вдоль КП, определяемое согласно (1.5) (фигура). Искомые величины  $T, S, \Theta, \xi$  и  $\eta$  однозначно находятся из уравнений

$$(1.8) \quad \begin{aligned} T(x, y) &= S(x, y) + \Theta(x, y) \\ x^\mp(S, x, y) &= \xi, \quad y^\mp(S, x, y) = \eta \\ x^\pm(\Theta, \xi, \eta) &= 0, \quad y^\pm(\Theta, \xi, \eta) = 0 \end{aligned}$$

Функции  $x^\mp, y^\mp$  определяются так же, как и в (1.5); система (1.8) элементарными подстановками сводится к двум уравнениям относительно  $S, \Theta$ . Конкретные примеры построения картины синтеза и функции Беллмана рассмотрены в п. 3.

В сложных прикладных задачах можно использовать приведенный выше синтез как часть общей картины квазиоптимального синтеза в окрестности начала координат, где в силу (1.3) определяющим движением системы является управляющее воздействие  $u$ . Например, если при больших начальных отклонениях движение системы имеет колебательный характер, то для их гашения, т. е. приведения фазовой точки в окрестность начала координат (положения равновесия), можно вначале использовать приближенный квазиоптимальный синтез простого вида  $u = \frac{1}{2}(u^+ + u^-) - \frac{1}{2}(u^+ - u^-) \text{sign } y$ , или какой-либо другой, отвечающий модели слабоуправляемой колебательной системы [3, 4]. Затем в области, где подавляющим является управляющее воздействие  $u$ , для более точной стабилизации следует использовать закон (1.7).

## 2. Построение оптимального синтеза для возмущенной системы.

2.1. Достаточные условия неосциллируемости возмущенной системы. При исследовании возмущенной задачи синтеза обычно все условия, кроме последнего условия типа (1.4), естественным образом переносятся на общий случай  $\varepsilon > 0$ , т. е. должны выполняться равномерно относительно  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ , что и предполагается в дальнейшем. Значительную трудность

представляют проблемы существования и построения гладкой функции  $\varphi_\varepsilon(x, y, u)$ , обладающей свойством (1.4), и оценка области  $G_\varepsilon \times [0, \varepsilon_0]$  переменных  $x, y, \varepsilon$ , для которой аналогично строятся КП  $\Pi_\varepsilon(x, y)$  оптимального управления  $u_\varepsilon(x, y)$ , оптимальная траектория  $x_\varepsilon(t, x^\circ, y^\circ)$ ,  $y_\varepsilon(t, x^\circ, y^\circ)$  для  $0 \leq t \leq T_\varepsilon(x^\circ, y^\circ)$  и функция Беллмана  $T_\varepsilon(x, y)$  возмущенной задачи. Следует ожидать, что для произвольной гладкой возмущающей функции  $F(x, y, u)$  оценки приведут к более узкой области  $G_\varepsilon$ , чем исходная, т. е.  $G_\varepsilon \subseteq G \subseteq R_2$ , причем  $G_\varepsilon \rightarrow G$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . После того как указанная проблема решена, в области  $(x, y) \in G_\varepsilon$  возмущенная КП, картина синтеза (оптимальные траектории) и функция Беллмана могут быть аналогично изложенному построены аналитическими (по степеням  $\varepsilon$ ) или численными методами, что обычно не приводит к принципиальным трудностям. Ниже в п. 3 рассматриваются представляющие прикладной интерес примеры конкретных систем (1.1), для которых проводятся и обосновываются указанные выше построения.

Проблему существования функции  $\varphi_\varepsilon$  и оценки области  $G_\varepsilon$  удастся конструктивно исследовать для произвольных гладких возмущений в некоторых частных случаях функции  $f$ .

1) Пусть, например (см. [2])

$$(2.1) \quad f'_x(x, y, u) \geq 0, \quad u = \pm 1 \quad \forall (x, y) \in G$$

Тогда для невозмущенной системы  $\varphi \equiv 0$ , а при  $\varepsilon > 0$  можно взять функцию  $\varphi_\varepsilon = -\mu u$ , где параметр  $\mu > 0$  подлежит определению. Из неравенств (1.3) следует, что при достаточно малых положительных  $\mu, \varepsilon$  в некоторой малой окрестности  $(x, y) \in G_\varepsilon$  начала координат справедливо неравенство (1.4). Действительно, в этом случае главным членом в левой части неравенства (1.4), обеспечивающим его справедливость, будет  $\mp \mu f(x, y, \pm 1)$ , поскольку согласно (1.3)  $f(0, 0, \pm 1) = f^\pm$ . Остальные слагаемые можно сделать достаточно малыми по абсолютной величине  $\forall (x, y) \in G_\varepsilon$  соответствующим выбором малых параметров  $\mu, \varepsilon > 0$ .

Область  $G_\varepsilon$  будет асимптотически большой по параметру  $\varepsilon$ , если удастся найти такую гладкую функцию  $\varphi(x, y, u)$ , что

$$(2.2) \quad f^2(\varphi/f)'_y + y\varphi'_x \leq h < 0, \quad u = \pm 1 \quad \forall (x, y) \in G_\varepsilon$$

Здесь  $h$  — параметр; существенно, что функция  $\varphi$  строится на основе только функции  $f$ , т. е. невозмущенной системы. Если же функция  $f$  не зависит от  $x$ , то неизвестную функцию  $\varphi$  естественно искать в виде  $\varphi_\varepsilon = \varphi(y, u)$ , а неравенство (2.2) примет вид  $f^2(\varphi/f)'_y \leq h < 0$ .

Пусть, в частности,  $f \equiv u$ ; тогда можно, полагая, как и выше,  $\varphi_\varepsilon = -\mu u$ , прийти к неравенству

$$(2.3) \quad -\mu + \max_{(x, y) \in G_\varepsilon} [(\mu y)^2 + \varepsilon(\mu|F| + \mu|yF'_y| + |F'_x|)] \leq 0$$

Если величины  $|F'_y|, |F'_x|$  равномерно ограничены для  $x \sim 1/\varepsilon, y \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$ , то неравенство (2.3) будет выполняться в асимптотически большой области  $G_\varepsilon$  с указанными оценками линейных размеров. Справедливость (2.3) можно установить полагая  $\mu = \varepsilon M, M \sim 1$ .

2) Пусть для известной функции  $\varphi(x, y, u)$  в некоторой ограниченной подобласти  $G_0 \subseteq G$  выполняется строгое неравенство

$$(2.4) \quad \max_{(x, y) \in G_0} [(y\varphi - f)'_x + \varphi^2(1 + (f/\varphi)'_y)] \leq -\delta < 0, \quad u = \pm 1$$

Тогда при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  неравенство типа (1.4) будет выполняться для возмущенной системы (1.1), если взять исходную функцию  $\varphi_\varepsilon = \varphi, \forall (x, y) \in G_0$ .

Если же область  $G$  неограничена, то требуются дополнительные условия на рост функции  $F$  и ее производных [2].

Например, для квазилинейной неколебательной системы

$$(2.5) \quad x'' + 2kx' + \omega^2 x = u + \varepsilon F(x, x', u), \quad k > \omega > 0$$

функцию  $F$  можно взять постоянной:  $F_\varepsilon = F = -k$ ; тогда согласно (2.4) следует, что  $\delta = k^2 - \omega^2 > 0$ ; неравенства типа (1.4) или (2.4) будут выполняться для системы (2.5) в области  $G_\varepsilon \times [0, \varepsilon_0]$ , где

$$(2.6) \quad \varepsilon (kF_{y'} - F_{x'}) \leq \delta, \quad u = \pm 1$$

Если величины  $|F_{y'}|, |F_{x'}|$  равномерно ограничены постоянной  $N$  для  $(x, y) \in R_2$ , то неравенство (2.6) выполняется  $\forall (x, y) \in R_2$  при  $\varepsilon \leq \delta (k + 1)^{-1} N^{-1}$ .

**2.2. Построение возмущенной КП.** В ограниченной равномерно по  $\varepsilon$  области  $G_\varepsilon$  построение траекторий  $x_\varepsilon^\mp(t, x^0, y^0), y_\varepsilon^\mp(t, x^0, y^0)$ , входящих в начало координат, которые аналогично (1.5) задают искомую КП  $\Pi_\varepsilon(x, y)$ , осуществляется простыми рекуррентными процедурами последовательных приближений (методом Пикара [5]) или разложениями по степеням  $\varepsilon$  [6, 7]. В качестве начальных приближений можно взять функции  $x^\mp(t, x^0, y^0), y^\mp(t, x^0, y^0)$ , определенные в п. 1, см. (1.5). Фундаментальная матрица, при помощи которой строятся решения последующих приближений, получается из  $x^\mp, y^\mp$  дифференцированием по параметрам  $x^0, y^0$ . Обоснование схем проводится на основе теоремы Банаха об операторе сжатия [5] или теоремы Коши, использующей метод мажорантных функций Пуанкаре [6].

КП  $\Pi_\varepsilon$  в неявной форме типа (1.6) строится при помощи частных интегралов возмущенной системы (см. п. 1)

$$(2.7) \quad (f + \varepsilon F) dx = y dy, \quad u = \mp 1, \quad y \geq 0, \quad \Psi_\varepsilon^\mp(0, 0) \equiv 0$$

Функции  $\Psi_\varepsilon^\mp$  можно построить на основе общих интегралов невозмущенной задачи  $\Psi^\mp(x, y) = c$ , дифференцирование которых в силу (2.7) приводит к уравнениям ( $c = c^\mp$ ):

$$(2.8) \quad \begin{aligned} dc &= \Psi'_x dx + \Psi'_y dy = -\varepsilon \Psi'_x F f^{-1} dx = \\ &= \varepsilon \Psi'_y f (f + \varepsilon F)^{-1} dy \quad (\Psi = \Psi^\mp, \quad u = \mp 1) \end{aligned}$$

При выводе второго и третьего равенств в (2.8) используется соотношение  $\Psi'_x y + \Psi'_y f \equiv 0$  (по  $x, y$ ); функции  $f, F$  берутся при  $u = \mp 1$ . Частные интегралы возмущенной системы (2.8)  $\Lambda_\varepsilon^\mp(x, y, c) = 0$ , удовлетворяющие условиям  $\Lambda_\varepsilon^\mp(0, 0, 0) \equiv 0$ , совместно с общими интегралами невозмущенной системы  $\Psi^\mp = c$  дают искомую КП  $\Pi_\varepsilon$  в виде (1.6).

Обоснование методов малого параметра для построения КП  $\Pi_\varepsilon$  в асимптотически большой по  $\varepsilon$  области  $G_\varepsilon$  требует равномерной ограниченности производных функций  $f, F$  по  $x, y$ .

**3. Исследование конкретных механических систем. 3.1. Слабовозмущенная динамическая система.** КП для неосциллирующего объекта вида

$$(3.1) \quad x'' = u + \varepsilon F(x, x', u), \quad u^- \leq u \leq u^+, \quad u^\mp \leq 0$$

на основе изложенного в п. 2 подхода получается интегрированием уравнений

$$(3.2) \quad dx / dy = y / u - \varepsilon F y / (u (u + \varepsilon F)), \quad u = u^\mp, \quad y \geq 0$$

Задача Коши (3.2) приводится к нелинейному интегральному уравнению относительно  $x = x_\varepsilon(y)$ :

$$(3.3) \quad x = \frac{y^2}{2u} - \frac{\varepsilon}{u} \int_0^y \frac{z F(x, z, u)}{u + \varepsilon F(x, z, u)} dz, \quad u = u^\mp, \quad y \geq 0$$

Решения уравнений (3.2) или (3.3) строятся разложениями по степеням  $\varepsilon$  или последовательными приближениями. В качестве нулевого приближения КП, т. е. функций  $x_0^\mp$ , принимаются  $x_0^\mp = 1/2 y^2 / u^\mp$ ,  $y \geq 0$ . Рекуррентные схемы будут равномерно сходящимися в асимптотически большой области  $G_\varepsilon: x \sim 1/\varepsilon$ ,  $y \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$ , если функция  $F$  дифференцируема по  $x$  и удовлетворяет равномерному условию Липшица.

Рассмотрим конкретные примеры.

1) Пусть  $|u| \leq 1$ ,  $F = F_0 = \text{const}$ ; тогда  $\varphi_\varepsilon \equiv 0$  и при  $\varepsilon |F_0| < 1 \forall (x, y) \in G_\varepsilon = R_2$  следуют выражения для КП  $\Pi_\varepsilon$  и времени быстрогодействия  $T_\varepsilon$ :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \Pi_\varepsilon(x, y) &= \{x, y: x = \mp 1/2 y^2 / u_*^\mp, y \geq 0\} \\ T_\varepsilon &= S_\varepsilon + \Theta_\varepsilon, \quad S_\varepsilon = -(y + u_*^\pm \Theta_\varepsilon) / u_*^\mp \\ \Theta_\varepsilon &= [(y^2 - 2u_*^\mp x) / (u_*^{\pm 2} - u_*^\pm u_*^\mp)]^{1/2}, \quad u_*^\mp = 1 \mp \varepsilon F_0 \end{aligned}$$

2) Если возмущение — малая сила трения вида  $\varepsilon F = -\varepsilon \lambda(|y|)y$ , где  $\lambda$  — неотрицательная функция, то  $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ ,  $\forall (x, y) \in G_\varepsilon = R_2$ ,  $0 \leq \varepsilon < \infty$ , а КП находится квадратурами

$$(3.5) \quad \Pi_\varepsilon(x, y) = \left\{ x, y: x = \frac{y^2}{2u^\mp} + \frac{\varepsilon}{u^\mp} \int_0^y \frac{z^2 \lambda(|z|) dz}{u^\mp - \varepsilon z \lambda(|z|)}, y \geq 0 \right\}, \quad u^- \leq u \leq u^+$$

Для частного вида функции  $\lambda$ , характеризующей соответственно линейное и квадратичное трение, КП таковы ( $y \geq 0$ ):

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon \lambda = l = \text{const}, \quad x &= -l^{-1}y - u^\mp l^{-2} (1 - ly / u^\mp) \\ \varepsilon \lambda = \nu |y|, \quad \nu = \text{const}, \quad x &= \mp 1/2 \nu^{-1} \ln(1 \mp \nu y^2 / u^\mp) \end{aligned}$$

Построение функции Беллмана связано с решением возмущенных трансцендентных уравнений. Соответствующее порождающее решение есть функция  $T(x, y)$ , определенная в (3.4); при малых  $\varepsilon > 0$  добавки строятся стандартными методами возмущений

3) Рассмотрим случай линейного по  $x$  возмущения:  $F = Ax$ ,  $A = \text{const}$ . КП и картина синтеза для такой системы хорошо изучены и построены для произвольных  $(x, y) \in R_2$ ,  $\alpha = \varepsilon A$  при  $-u^- = u^+ = 1$ . Качественно различаются случаи:  $\alpha \geq 0$  — неколебательная система,  $\alpha < 0$  — колебательная. Согласно пп. 1, 2, строятся КП и картина синтеза в асимптотически большой области  $G_\varepsilon$  ( $x \sim 1/\varepsilon$ ,  $y \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$ ):

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \varphi_\varepsilon &= -\varepsilon M y u, \quad M > 0, \quad u^- \leq u \leq u^+ \\ G_\varepsilon &= \{x, y: -M u^2 - \alpha M x u - \varepsilon M^2 (u y) - A \leq 0, u = u^\mp\} \end{aligned}$$

$$\Pi_\varepsilon(x, y) = \{x, y: -1/2 \alpha (x + u / \alpha)^2 + 1/2 u^2 / \alpha + 1/2 y^2 = 0, u = u^\mp, y \geq 0\}$$

КП  $\Pi_\varepsilon$  в (3.7) состоит из кусков эллипсов при  $A < 0$  или гипербол при  $A > 0$  (при  $A = 0$  — парабол; этот случай относится к рассмотренному выше). Следует отметить, что при  $A \geq 0$  (см. п. 2.1) условие (1.4) выполняется  $\forall (x, y) \in R_2$ , если  $M = 0$ , т. е.  $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ . В первом приближении по  $\varepsilon$  КП  $\Pi_\varepsilon$  имеет следующее явное выражение:

$$x = (y^2 / (2u^\mp)) [1 - \alpha y^2 / (2u^\mp)^2] + O(\alpha^2 y^4), \quad y \geq 0$$

В случае осциллирующего объекта ( $\alpha < 0$ ) при больших  $x, y$ , т. е.  $|x| \gg \Delta u / \alpha$ ,  $|y| \gg \Delta u / \sqrt{|\alpha|}$ ,  $\Delta u = u^+ - u^-$ , как отмечалось в п. 1.2, для гашения колебаний можно применить квазиоптимальный синтез вида  $u = 1/2 (u^+ + u^-) - 1/2 \Delta u \text{ sign } y$  до значений  $|x| \sim \Delta u / \alpha$ ,  $|y| \sim \Delta u / \sqrt{|\alpha|}$ , а затем использовать синтез управления согласно (1.7), (3.7).

3.2. Квазилинейная неколебательная система. КП  $\Pi$  для невозмущенной системы (2.5) можно представить в неявном виде (1.6)

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \Pi(x, y) &= \{x, y: (1 - p_1 p_2 x / u + p_1 y / u)^{p_2} - \\ &- (1 - p_1 p_2 x / u - p_2 y / u)^{p_1} = 0, \quad u = u^\mp, \quad y \geq 0\}, \quad p_{1,2} = \\ &= -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

При  $\omega \rightarrow 0$ , т. е. при  $p_1 \uparrow 0$  для КП  $x^\mp(y)$  логарифмированием получается первое выражение (3.6), отвечающее  $\varepsilon\lambda = 2k$ . Более удобным для дальнейшего применения метода возмущений оказывается представление КП  $\Pi(x, y)$  в параметрическом виде (1.5)

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x(\Theta) &= u\omega^{-2} (p_1 - p_2)^{-1} [p_2 (I_1(-\Theta) - 1) - \\ &\quad - p_1 (I_2(-\Theta) - 1)] = x \\ y(\Theta) &= u (p_1 - p_2)^{-1} [I_1(-\Theta) - I_2(-\Theta)] = y \\ u &= u^\mp, \Theta \geq 0, I_{1,2}(\Theta) = \exp(p_{1,2}\Theta) \end{aligned}$$

Определение времени оптимального быстрогодействия  $T(x, y)$ ,  $(x, y) \in \in R_2$  требует согласно (1.8) решения трансцендентного уравнения относительно неизвестной  $S = S(x, y)$ , которое приводится к виду

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \frac{1}{p_1} \ln \frac{p_1 h_2 - h_1}{p_1 - p_2} &= \frac{1}{p_2} \ln \frac{p_2 h_2 - h_1}{p_1 - p_2} \\ h_1 &= (\omega^2 / u^\pm) [\sigma_1 I_1(S) + \sigma_2 I_2(S)] + (u^\mp / u^\pm - 1) (p_1 - p_2) \\ h_2 &= (1 / u^\pm) [\sigma_1 p_1 I_1(S) + \sigma_2 p_2 I_2(S)], p_1 p_2 = \omega^2 \\ \sigma_1 &= y - p_2 x + u^\mp p_2 \omega^{-2}, \sigma_2 = -y + p_1 x - u^\mp p_1 \omega^{-2} \end{aligned}$$

Если функция  $S(x, y)$  найдена из (3.10), то величины  $\Theta = \Theta(x, y)$  и  $T = T(x, y)$  находятся элементарно:

$$(3.11) \quad T = S + \Theta, \quad \Theta = \frac{1}{p_k} \ln \frac{p_k h_2 - h_1}{p_1 - p_2}, \quad k = 1 \vee k = 2$$

Возмущенная КП  $\Pi_\varepsilon(x, y)$  для системы (2.5) при  $\varepsilon > 0$  достаточно малом и  $(x, y) \in G_\varepsilon$ , где область  $G_\varepsilon$  определяется согласно (2.6), представляема в виде (функции  $x(\Theta)$ ,  $y(\Theta)$  определены в (3.9))

$$(3.12) \quad x_\varepsilon(\Theta) \equiv x(\Theta) + \varepsilon X_\varepsilon(\Theta) = x, \quad y_\varepsilon(\Theta) \equiv y(\Theta) + \varepsilon Y_\varepsilon(\Theta) = y$$

$$(3.13) \quad \begin{aligned} X_\varepsilon(\Theta) &= [p_2 I_2(\Theta) I_1(-\Theta) - p_1] \Gamma_\varepsilon(\Theta) - p_1^{-1} I_1(\Theta) \Phi'(\Theta) \\ Y_\varepsilon(\Theta) &= p_1 p_2 [I_2(\Theta) I_1(-\Theta) - 1] \Gamma_\varepsilon(\Theta) - I_1(\Theta) \Phi'(\Theta) \\ \Gamma_\varepsilon(\Theta) &= [(p_1 - p_2) I_2(\Theta) + \varepsilon \Phi'(\Theta)]^{-1} (p_1 - p_2)^{-1}, u = u^\mp \end{aligned}$$

Функции  $\Phi$ ,  $\Phi'$  определяются ниже на основе общего решения уравнения (2.5) при  $u = u^\mp$ . Это решение представляется в виде системы интегральных соотношений при помощи импульсной переходной функции  $W(t)$  невозмущенной системы, т. е.

$$(3.14) \quad \begin{aligned} x(t) &= c_1 I_1(t) + c_2 I_2(t) + \frac{u}{\omega^2} + \varepsilon \int_0^t W(t-\tau) F(x, y, u) d\tau \\ y(t) &= c_1 p_1 I_1(t) + c_2 p_2 I_2(t) + \varepsilon \int_0^t W'(t-\tau) F(x, y, u) d\tau \\ W(t) &= [I_1(t) - I_2(t)] (p_1 - p_2)^{-1}, u = u^\mp \\ \{c &= (c_1, c_2) \in C_\varepsilon, (x, y) \in G_\varepsilon\} \end{aligned}$$

Пусть искомые решения  $x(t, c, u, \varepsilon)$ ,  $y(t, c, u, \varepsilon)$  в (3.14) определены например, методом Пикара. Тогда

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \Phi &= \Phi(\Theta, c, u, \varepsilon) = \int_0^\Theta W(\Theta - \tau) F(x, y, u) d\tau \\ \Phi' &= \partial\Phi / \partial\Theta, u = u^\mp \end{aligned}$$

Параметры  $c_{1,2}$ , как функции  $\Theta$ ,  $u$ ,  $\varepsilon$  находятся однозначно из квазилинейной системы

$$(3.16) \quad \begin{aligned} c_1 &= c_2 I_2(\Theta) I_1(-\Theta) - \varepsilon p_1^{-1} I_1(-\Theta) \Phi' \\ c_2 &= -p_1 (u\omega^{-2} + \varepsilon\Phi) [(p_1 - p_2) I_2(\Theta) - \varepsilon\Phi']^{-1}, u = u^\mp \end{aligned}$$

Дифференцирование параметров  $c_{1,2}(\Theta, \varepsilon)$  (3.16) в выражениях (3.15) по  $\Theta$  не производится. Система (3.16) удовлетворяет условиям существования и единственности корней  $c_{1,2}$  при  $\varepsilon > 0$  достаточно малом, которые вычисляются последовательными приближениями или методом Ньютона [5]. После подстановки функций  $\Phi, \Phi'$  (3.15) в (3.13), а затем в (3.12) получается искомая возмущенная КП в параметрической форме

$$x = x(\Theta, u, \varepsilon), y = y(\Theta, u, \varepsilon), u = u^{\mp}, \Theta \geq 0$$

Построение функции Беллмана задачи  $T_\varepsilon(x, y)$  проводится на основе порождающего решения (3.10), (3.11) методами возмущений аналогично изложенному при помощи построенной картины оптимального синтеза для возмущенной системы. При этом используется найденное возмущенное решение  $x(t, c, u, \varepsilon), y(t, c, u, \varepsilon)$ .

Для прикладных целей важно дальнейшее развитие изложенного подхода исследования релейных управляемых систем, в которых возмущающая функция  $F$  зависит также от времени и других переменных, для многомерных управляемых систем, состоящих из звеньев типа (1.1), слабо связанных между собой, и других более общих случаев.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
2. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
3. Черноушко Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
5. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.
6. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
7. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 384 с.

Москва

Поступила в редакцию  
16.II.1984