УДК 531.36

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Блинов А. П.

Предлагается алгоритм, который для широкого класса задач позволяет осуществить перестройку функции Ляпунова со знакоотрицательной производной в функцию Ляпунова с определенно-отрицательной производной. Этот алгоритм дополняет известный [1] способ перестройки функции Ляпунова. Рассматриваются примеры.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$x_i^{\cdot} = f_i(x),\ f(0) = 0,\ x \in R^n,\ f_i(x) \in C^1(\Omega),\ \{0\} \in \Omega \subset R^n \tag{1}$$

Предположим, что для системы (1) известна определенно-положительная в области Ω функция Ляпунова $V_0(x)$, производная по времени от которой в силу уравнений (1) в этой области неположительна и обращается в нуль на многообразии $M \subset \Omega$.

Поставим задачу определения таких функций $V_\nu(x)$ $(\nu \leqslant n-1)$ и постоянных $\mu_\nu > 0$, для которых сумма

$$V(x) = V_0(x) + \sum_{\nu=1}^{p} \mu_\nu V_\nu(x), \quad p \leqslant n-1 \tag{2}$$

(величина p уточняется в процессе решения задачи) будет определенно-положительной, а ее производная по времени в силу системы (1) — определенно-отрицательной функцией в Ω.

Покажем, что при введенных ниже дополнительных предположениях эта задача имеет решение:

Пусть многообразие M описывается уравнениями $S_1(x) = 0, \ldots$ $\ldots, S_m(x) = 0$, которые разрешимы в Ω относительно каких-либо m переменных, например

$$x_j = x_j^\circ(x_{m+1}, \ldots, x_n),\ x_j^\circ(0) = 0,\ j = 1, \ldots, m$$

Определим функции f_i° и Φ_k $(i, k = 1, \ldots, n)$ соотношениями

$$f_i^\circ(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f_i(x_1^\circ(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_m^\circ(x_{m+1}, \ldots \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) \tag{3}$$

$$\Phi_k(x_k, x_{m+1}, \ldots, x_n) = -\int_0^{x_k} f_k^\circ(x_{m+1}, \ldots, x_n)\, dx_k + \Phi_{0k} \tag{4}$$

Здесь Φ_{0k} — произвольная функция координат $x_{m+1}, \ldots, x_n$, в число которых координата x_k не входит, и $\Phi_{0k}(0) = 0$ (При $k \geqslant m+1$ в левой части (4) x_k опускается).

Если функции f_i от $x_{m+1}, \ldots, x_n$ не зависят, то примем $f_i^\circ \equiv 0$.

Определим функцию $V_{*1}(x)$ в виде суммы

$$V_{*1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi_k(x)$$

в которой постоянные λ_k определим ниже.

Запишем производную по времени от этой функции в силу (1)

$$V^{\cdot}_{*1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial \Phi_k(x)}{\partial x_i}$$

Так как для $i \leqslant m$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial \Phi_k(x)}{\partial x_i} = -\lambda_i f_i^{\circ}(x)$$

то после перегруппировки слагаемых получим

$$V^{\cdot}_{*1}(x) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) f_i^{\circ}(x) + \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_k} + \sum_{i,\, k=m+1}^{n} \lambda_k f_i(x) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \tag{5}$$

В выражении (5) первая сумма неположительна на M и неположительные слагаемые $f_k(x)\, \partial \Phi_k(x)/\partial x_k$ (на M), входящие в последнюю сумму при любых $\lambda_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Поэтому подбором коэффициентов λ_j можно попытаться удовлетворить неравенствам

$$V'^{\cdot}_{*1}(x) \leqslant 0, \quad V^{\cdot}_{*1}(x) \not\equiv 0 \tag{6}$$

если не для всех $x \in M \cap \Omega$, то для $x \in M \cap \Omega_1$, $\Omega_1 \subset \Omega$, где Ω_1 — область, ограниченная поверхностью $V_0(x) = h$ (h — некоторая постоянная), при переходе через которую по поверхности M производная $V^{\cdot}_{*1}(x)$ меняет знак. Для удобства далее будем полагать области Ω, Ω_1 совпадающими.

Можно отметить два простых частных случая выбора требуемых λ_j.

Случай 1. Имеется хотя бы один номер $k_* \in \{m+1, \ldots, n\}$, для которого $\partial \Phi_{k_*}(x)/\partial x_{k_*} \not\equiv 0$ и $\partial \Phi_{k_*}(x)/\partial x_k \equiv 0$ для $k \in \{m+1, \ldots, n\}$, $k \neq k_*$.

В этом случае достаточно принять $\lambda_{k_*} = 1$, $\lambda_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k_*$, чтобы неравенство (6) выполнялось.

Случай 2. Для всех k, $q = m+1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, m$ и хотя бы для одного $i_* \in \{1, \ldots, m\}$ $\partial \Phi_k/\partial x_q \equiv 0$, $\partial \Phi_{i_*}/\partial x_k \equiv 0$, $\partial \Phi_{i_*}/\partial x_i \not\equiv 0$.

Для удовлетворения неравенствам (6) здесь достаточно принять $\lambda_{i_*} = 1$, $\lambda_j = 0$, $j = \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i_*$. (В некоторых случаях для перестройки функции Ляпунова может быть использован и произвол выбора функции $\Phi_{0i}(x)$).

Неравенства (6) означают, что многообразие $M_{11} \subset \Omega$, на котором $V^{\cdot}_{*1} = 0$, не совпадает с многообразием M и пересечение $M_1 = M \cap M_{11}$ имеет размерность, по крайней мере, на единицу меньше размерности M.

Следовательно, если можно указать число $\mu_1 > 0$, при котором функции $V_0(x) + \mu_1 V_{*1}(x)$, $(-V_0^{\cdot}(x) - \mu_1 V^{\cdot}_{*1}(x))$ положительны соответственно на $\Omega \setminus \{0\}$ и $\Omega \setminus M_1$, то сумма $V_0(x) + \mu_1 V_1(x)$, $V_1(x) = V_{*1}(x)$ будет представлять новую функцию Ляпунова, для которой многообразие M_1 вырождается в точку или имеет размерность, меньшую чем размерность M.

В первом случае (для (2)) $p = 1$, а в другом по описанной схеме можно строить следующую (для (2)) функцию V_2, постоянную μ_2, многообразие M_2 и т. д. вплоть до V_p, μ_p для p, при котором $M_p = \{0\}$.

Если же сразу такого числа μ_1 указать нельзя, то, учитывая непрерывность функции $V_{*1}(x)$ в Ω и равенство $V_{*1}(0) = 0$, можно выбрать числа δ и μ_{11} $(0 < \delta < 1,\ 0 < \mu_{11} \leqslant 1)$ и натуральное число N_1 так, чтобы компакт $U_0 = \{x \in \Omega : \| x \| \leqslant \delta\}$ лежал в области Ω и при этом выполнялись неравенства

$$(-V_{*1}^{2N_1-1}(x)) \leqslant \frac{1}{2} V_0(x),\ x \in U_0;\ (-\mu_{11}) V_{*1}^{2N_1-1}(x) \leqslant \frac{1}{2} \min_{x \in U} V_0(x)$$

(U — замыкание области $\Omega \setminus U_0$).

Очевидно, что для производной по времени от функции $V_{*1}{}^{2N_1-1}(x)$ в силу системы (1), как и для $V_{*1}^{\cdot}(x)$, неравенства (6) выполняются, если только $V_{*1}(x) \not\equiv 0$ на M. (Далее это дополнительное условие предполагается выполненным.)

Неравенства (6) будут выполняться и в области G, $M \subset G$, заключенной между поверхностями $S_i(x) = \pm\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, m)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Далее, найдется натуральное число N_2, при котором в замыкании области $U_0 \setminus G$ будет выполняться неравенство

$$\frac{d}{dt} V_{*1}^{2N_2-1}(x) \leqslant \frac{1}{2} | V_0^{\cdot}(x) |$$

(производная слева вычисляется в силу (1)) и найдется число $\mu_{12} \in (0, 1]$, для которого

$$\mu_{12} \frac{d}{dt} V_{*1}^{2N_2-1}(x) \leqslant \frac{1}{2} \min_{x \in U \setminus G} | V_0^{\cdot}(x) |$$

Отсюда следует, что, положив $\mu_1 = \min\{\mu_{11}, \mu_{12}\}$, $N = \max\{N_1, N_2\}$ и $V_1 = V_{*1}{}^{2N-1}$, получим новую функцию Ляпунова $V_0 + \mu_1 V_1$ с отмеченными выше свойствами.

Пример 1. Система уравнений [2]

$$x_1^{\cdot} = -x_1 + 3x_2^2,\ x_2^{\cdot} = -x_1x_2 - x_2^3,$$

допускает функцию Ляпунова $V_0 = {}^1/_2 (x_1^2 + x_2^2)$, а многообразие M — парабола $x_1 = x_2^2$.

Так как здесь

$$f_1^0 = 2x_2^2,\ \Phi_1(x_1, x_2) = -2x_1x_2^2 + \Phi_{01}(x_2)$$
$$f_2^0 = -2x_2^3,\ \Phi_2(x_1, x_2) = {}^1/_2\, x_2^4$$

(что соответствует случаю 1), то, полагая в (5) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, получим $V_1 = {}^1/_2 x_2^4$, и при любом $\mu_1 > 0$ функция V определенно-положительна, а

$$V^{\cdot} = -x_1^2 + 2x_1x_2^2(1 - x_2^2) - x_2^4(1 + 2x_2^2)\quad (\mu_1 = 1)$$

определенно отрицательна во всей фазовой плоскости.

Пример 2. Система уравнений [3]

$$x_1^{\cdot} = x_2,\ x_2^{\cdot} = -ax_2 + x_3,\ x_3^{\cdot} = -\psi(x_1) - \varphi(x_2)$$
$$a > 0,\ \psi(x_1) \in C^1(R^1),\ \varphi(x_2) \in C^1(R^1),\ \psi(0) = \varphi(0) = 0$$

при выполнении условий

а) $\psi(x_1)\, x_1 > 0,\ x_1 \neq 0$

б) $a\varphi(x_2)/x_2 - \psi'(x_1) > 0,\ x_2 \neq 0;\ \psi'(x_1) = d\psi/\partial x_1$

допускает определенно-положительную функцию Ляпунова

$$V_0 = a \int_0^{x_1} \psi(\xi)\, d\xi + \psi(x_1)\, x_2 + \int_0^{x_2} \varphi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} x_3^2$$

для которой производная $V_0^{\cdot} = [\psi'(x_1) - a\varphi(x_2)/x_2]\, x_2^2$ в силу условия б) обращается в нуль на плоскости $x_2 = 0$.

Имеем

$$f_1^0 = 0,\ f_2^0 = x_3,\ f_3^0 = -\psi(x_1)$$

$$\Phi_1 = \Phi_{01}(x_2,\ x_3),\quad \Phi_2 = -x_2x_3 + \Phi_{02}(x_3),\quad \Phi_3 = \psi(x_1)\,x_3 + \Phi_{03}(x_2)$$

Полагая $\Phi_{01}(x_2, x_3) = {}^1/_2\, x_2^2$, $\Phi_{02} = \Phi_{03} = 0$, получим

$$\sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} = -ax_2^2 + x_2x_3$$

$$\sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} = -x_3^2 + [\psi(x_1) + \varphi(x_2) + ax_3]\,x_2$$

$$\sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_i} = -\psi^2(x_1) + \psi(x_1)\,\varphi(x_2) + f'(x_1)\,x_2x_3$$

Полагая затем $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (такой выбор коэффициентов здесь освобождает от определения V_2), будем иметь

$$V_1 = {}^1/_2\, x_2^2 + \psi(x_1)\,x_3 - x_2x_3,\quad V_1^{\boldsymbol{\cdot}} = -ax_2^2 - \psi^2(x_1) - x_3^2 + {}$$
$$+ x_2x_3\,[\psi'(x_1) + a + 1] + [\psi(x_1) + \varphi(x_2)]\,x_2 - \psi(x_1)\,\varphi(x_2)$$

Поскольку $V_1^{\boldsymbol{\cdot}}$ при $x_2 = 0$ не меняет знака, то область Ω_1 может быть выбрана произвольно, а затем определено число μ_1 для новой функции Ляпунова $V = V_0 + \mu_1 V_1$.

Пример 3. В работе [4] решена задача о стабилизации в поле центральной силы кругового движения материальной точки, управляемой реактивной силой u. Уравнения возмущенного движения материальной точки

$$x_1^{\boldsymbol{\cdot}} = x_2,\ x_2^{\boldsymbol{\cdot}} = v + bu,\ x_3^{\boldsymbol{\cdot}} = (1 + x_1/r)\,u \tag{7}$$

$$u = -\frac{bx_2 + w}{\beta},\qquad v = -\frac{\mu}{(r + x_1)^2} + \frac{(\sqrt{\mu r} + x_3)^2}{(r + x_1)^3}$$

$$w = \frac{\sqrt{\mu r} + x_3}{r\,(r + x_1)} + \frac{1}{r^3}\,(\lambda r^2 x_3 - \sqrt{\mu r})\,(x_1 + r);\qquad \mu,\ r,\ b,\ \beta,\ \lambda = \mathrm{const} > 0$$

допускают определенно-положительную функцию Ляпунова [4], производная по времени от которой в силу (7) обращается в нуль на многообразии M, определяемом уравнением $bx_2 + w = 0$. Разрешая это уравнение относительно x_2, получим

$$f_1^0(x_1,\ x_3) = -w/b,\ f_2^0(x_1,\ x_3) = v,\ f_3^0(x_1,\ x_3) \equiv 0$$

Полагая $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, в окрестности точки $x = 0$ имеем

$$V_{*1} = \Phi_{01}(x_3) + \frac{\lambda r}{2b}\,x_3 + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{r^2} + \lambda\right)x_1x_3 - \frac{\sqrt{\mu r}}{br^3}\,x_1^2 + o(x^2)$$

Чтобы уничтожить линейное слагаемое, воспользуемся произволом в выборе функции Φ_{01}, положив

$$\Phi_{01}(x_3) = -\frac{\lambda r}{2b}\,x_3$$

Тогда $V_1 = V_{*1}$.

Приняв (для упрощения записи) $b = 1/r$, $\lambda = 4/r^2$, найдем величину

$$V_0^{\boldsymbol{\cdot}} + \mu_1 V_1^{\boldsymbol{\cdot}} = -2\beta u^2 + \mu_1\ \{[\ln(1 + x_1/r) + x_1^2/r^2 + 4x_1/r] \times$$
$$\times (1 + x_1/ru) - x_2(\beta ru + x_2)\}$$

которая отрицательна на $M \setminus \{0\}$ и обращается в нуль на M_1, определяемом уравнениями

$$x_2 \equiv 0,\qquad x_3 = \frac{\sqrt{\mu r}\,(2r + x_1)\,x_1}{5r^2 + 8rx_1 + 4x_1^2}$$

Далее, определив V_2, можно убедиться, что на M_1 производная $V_2^{\boldsymbol{\cdot}}$ определенно отрицательна, т. е. $M_2 = \{0\}$.

Для системы (1) порядка два можно показать, что если известна функция V_0 и в области Ω уравнение $S(x_1, x_2) = 0$, описывающее многообразие M, однозначно разрешимо относительно x_2 (или x_1), а фазовые траектории пересекают M без касания, т. е. в $\Omega\setminus\{0\}$ имеет место неравенство

$$f_1\frac{\partial S}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial S}{\partial x_2}\neq 0$$

то искомая функция V может быть построена всегда.

В самом деле, после перехода в (1) к полярным координатам по формулам $x_1 = r\cos\theta$, $S(x_1, x_2) = r\sin\theta$, $\theta\in[0, 2\pi]$ (или $x_1 = r\sin\theta$, $S(x_1, x_2) = r\cos\theta$) многообразие M совпадает с прямой $\theta = 0$, $\theta = \pi$, на которой производная $\theta^{\cdot}$, определяемая системой уравнений $\theta^{\cdot} = \vartheta(\theta, r)$, $r^{\cdot} = R(\theta, r)$, соответствующей (1), отлична от нуля для $r\neq 0$.

Без ограничения общности можно считать, что

$$\theta^{\cdot} = \vartheta(0, r) > 0,\quad \theta^{\cdot} = \vartheta(\pi, r) \gtrless 0,\quad r > 0$$

Если имеет место неравенство $\vartheta(\pi, r) > 0$ (точка $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ — устойчивый фокус), то определим периодическую периода 2π, нечетную по θ функцию

$$V_1=\begin{cases}-r^{\lambda}\sin 2k\theta, & |\theta|, |\theta-\pi|\leqslant\frac{\pi}{4k}\\ r^{\lambda}\sin\frac{2k}{2k-1}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right), & -\pi\left(1-\frac{1}{4k}\right)\leqslant\theta\leqslant-\frac{\pi}{4k}\end{cases}$$

а если имеет место неравенство $\vartheta(\pi, r) < 0$, то определим

$$V_1=\begin{cases}-r^{\lambda}\sin k\theta, & |\theta|, |\theta-\pi|\leqslant\frac{\pi}{2k}\\ -r^{\lambda}, & \frac{\pi}{2k}\leqslant\theta\leqslant\pi\left(1-\frac{1}{2k}\right)\end{cases}$$

(k — нечетное натуральное число, λ — низшая степень разложения функции $V_0(r\cos\theta, r\sin\theta)$ по степеням r).

Определенная таким образом функция V_1 непрерывна в Ω вместе с частными производными и ее производная по времени в силу (1) имеет вид

$$V_1^{\cdot}=\begin{cases}-2k\vartheta_1\cos 2k\theta-R_1\sin 2k\theta, & |\theta|, |\theta-\pi|\leqslant\frac{\pi}{4k}\\ \frac{2k}{2k-1}\vartheta_1\cos\frac{2k}{2k-1}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+R_1\sin\frac{2k}{2k-1}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{\pi}{4k}\leqslant\theta\leqslant\frac{4k-1}{4k}\end{cases}$$

когда $\vartheta(\pi, r)\leqslant 0$;

$$V_1^{\cdot}=\begin{cases}-k\vartheta_1\cos k\theta-R_1\sin k\theta, & |\theta|, |\theta-\pi|\leqslant\frac{\pi}{2k}\\ -R_1, & \frac{\pi}{2k}\leqslant\theta\leqslant\pi\frac{2k-1}{2k}\end{cases}$$

когда $\vartheta(\pi, r)\geqslant 0$. Здесь $\vartheta_1 = r^{\lambda}\vartheta(\theta, r)$, $R_1 = \lambda r^{\lambda-1}R(\theta, r)$.

Так как существует значение $k = k_1$, при котором производная $V_1^{\cdot}$ будет определенно-отрицательной на M, то для $k = k_2 > k_1$ найдется число ε, $\pi/(4k) > \varepsilon > 0$, при котором $V_1^{\cdot}$ будет определенно-отрицательной в секторах $|\theta| < \varepsilon$, $|\theta-\pi| < \varepsilon$.

Далее остается определить значение $\mu_1 > 0$, при котором функции $V = V_0 + \mu_1 V_1$, $(-V^{\cdot})$ будут определенно-положительными в Ω.

Заметим, что рассмотренная перестройка функции Ляпунова может быть использована для оценки времени прихода фазовой точки в заданную область [5].

Автор благодарит В. А. Самсонова за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
2. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 319 с.
3. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
4. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 440—456.
5. *Блинов А. П.* К оптимальной стабилизации управляемых систем.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 3, с. 366—373.

Москва

Поступила в редакцию
20.I.1985