Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 531.01

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗЬЮ

Иванов А. П.

Проводится регуляризация уравнений движения системы с идеальной неудерживающей связью $q_1 \geqslant 0$ и дифференциальными связями. Относительно последних предполагается, что они наложены либо на все движения системы, либо лишь на те, для которых $q_1 = 0$. Исследуется влияние ударов на устойчивость перманентных вращений вокруг оси симметрии тяжелого твердого тела, движущегося не ниже абсолютно шероховатой плоскости. Показано, в частности, что устойчивые вращения тела на плоскости могут быть дестабилизированы за счет отрывов на сколь угодно малую высоту.

Ранее [1] была показана возможность получения в регулярной форме уравнений, описывающих движение голономной системы с неудерживающей связью на произвольном интервале времени. Достоинства такого подхода по сравнению с традиционным методом «припасовывания» продемонстрированы в [2—4].

1. Пусть дана механическая система M, описываемая конфигурационным пространством $q \in R^n$, обобщенными силами $\mathbf{Q}$ и кинетической энергией T, являющейся квадратичной формой относительно $\mathbf{q}^{\cdot}$. Движение системы стеснено неудерживающей связью $q_1 \geqslant 0$ и $m < n$ дифференциальными связями вида

$$c_i = a_i \mathbf{q}^{\cdot} = 0, \; a_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{q}, t) \in R^n \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

Будем рассматривать два типа дифференциальных связей, предполагая, что соотношениям (1.1) для $i = 1, \ldots, m_1$ подчинены лишь такие движения, для которых $q_1 = 0$, а для $i = m_1 + 1, \ldots, m$ — все движения системы M.

Если координата q_1 обращается при $t = t^*$ в нуль, то происходит удар о неудерживающую связь, а также о дифференциальные связи первого типа. Согласно гипотезе Ньютона, этот удар (будем считать его абсолютно упругим) можно описать соотношениями

$$q_1^{\cdot}(t^* + 0) = -q_1^{\cdot}(t^* - 0), \quad c_j(t^* + 0) = -c_j(t^* - 0) \quad (j = 1, \ldots, m_1) \tag{1.2}$$

Движение в отсутствие ударов опишем уравнениями Больцмана — Гамеля [5]. Если квазикоординаты π определены посредством обратимой замены

$$\pi_i^{\cdot} = \mathbf{l}_i \mathbf{q}^{\cdot}, \; \pi_{n-m+j}^{\cdot} = c_j, \; \mathbf{l}_i(\mathbf{q}, t) \in R^n \quad (i = 1, \ldots, n - m; \; j = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

то эти уравнения имеют в области $q_1 > 0$ вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \pi_s^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} + \gamma_{sij}\frac{\partial T}{\partial \pi_i^{\cdot}}\pi_j^{\cdot} = \Pi_s, \quad \pi_r^{\cdot} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n - m + m_1; \; r = n - m + m_1 + 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

где кинетическая энергия T составлена с учетом соотношений (1.3), Π_s — обобщенная сила, соответствующая квазикоординате π_s, а коэффициенты неголономности γ определяются из перестановочных соотношений

$$(d\delta - \delta d)\,\pi_k = \gamma_{ikj}\,\delta\pi_i d\pi_j \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

В формулах (1.4) и (1.5) опущены знаки суммирования по индексам i, j.

Движения системы M, для которых $q_1 \equiv 0$, также можно описать уравнениями (1.4), в которых к действующим на систему активным силам необходимо добавить реакцию неудерживающей связи, а индексы изменять в пределах $s = 1, \ldots, n - m$; $r = n - m + 1, \ldots, n$.

Для формализации ударных взаимодействий удобно в (1.3) положить

$$\pi_1 = q_1, \quad \pi_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \partial T'/\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot}} \quad (i = 2, \ldots, n - m) \tag{1.6}$$

где T' — кинетическая энергия, при составлении которой учтена вторая группа соотношений (1.3). Значения квазискоростей после удара определятся тогда из условий (1.2) и свойства непрерывности $\pi_i^{\boldsymbol{\cdot}}$ $(i = 2, \ldots, n - m)$, доказанного в [6]. Эти значения можно рассматривать как начальные условия для системы (1.4), определяющей движение на промежутке времени до следующего удара, и т. д. Однако получение выводов о свойствах движения на бесконечном интервале времени при таком подходе, известном как метод припасовывания, затрудняется отсутствием априорной информации о моментах соударений.

Другой метод исследования состоит в описании системы M с помощью некоторой вспомогательной системы M^*, не испытывающей ударов. Достоинства такого подхода продемонстрировали для голономных систем [1—4]. Ниже предлагается его развитие на системы со связями вида (1.1).

Движение системы M^* будем описывать в фазовом пространстве $(\mathbf{q}^*, \boldsymbol{\pi}^{*\boldsymbol{\cdot}})$, устанавливая соответствие между траекториями систем M и M^* при помощи соотношений

$$q_1 = |q_1^*|, \quad q_2 = q_2^*, \ldots, q_n = q_n^*, \quad \pi_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \pi_i^{*\boldsymbol{\cdot}} (\operatorname{sgn} q_1^*)^{\nu_i} \tag{1.7}$$

$$\nu_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 1, n - m + 1, \ldots, n - m + m_1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Теорема. Траектории (1.7) в фазовом пространстве описываются системой уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \pi_s^{*\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_s^*} + \gamma_{sij}^* \frac{\partial T^*}{\partial \pi_i^{*\boldsymbol{\cdot}}} \pi_j^{*\boldsymbol{\cdot}} = \Pi_s^*, \quad \pi_r^{*\boldsymbol{\cdot}} = 0 \tag{1.8}$$

$$(s = 1, \ldots, n - m + m_1; \; r = n - m + m_1 + 1, \ldots, n)$$

$$\gamma_{sij}^* = \gamma_{sij} (\operatorname{sgn} q_1^*)^{\nu_s + \nu_i + \nu_j}, \quad \Pi_s^* = \Pi_s (\operatorname{sgn} q_1^*)^{\nu_s}$$

где T^* — кинетическая энергия в уравнениях (1.4), в которой вместо $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\pi}^{\boldsymbol{\cdot}}$ подставлены их выражения (1.7).

Лемма. Пусть $N = {}^1/_2 \alpha \mathbf{A} \alpha^T$ — невырожденная квадратичная форма, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Переменные β связаны с α так:

$$\beta_r = \partial N/\partial \alpha_r, \quad \beta_s = \alpha_s \quad (r = 1, \ldots, m; \; s = m + 1, \ldots, n)$$

Тогда в выражении $N = {}^1/_2 \beta \mathbf{B} \beta^T$ отсутствуют произведения переменных из разных групп: $b_{rs} = 0$.

Доказательство леммы. Разобьем матрицу $\mathbf{A}$ на блоки, отделяя m ее строк и m столбцов

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_2 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A}_0^T = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_2^T = \mathbf{A}_2$$

Связь между α и β представим в форме ($\mathbf{E}$ — единичная матрица порядка $n - m$)

$$\beta = \mathbf{L}\alpha, \quad \mathbf{L} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 \\ 0 & \mathbf{E} \end{Vmatrix}$$

Для матрицы $\mathbf{B}$ получаем

$$\mathbf{B} = (\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{A} \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{A}_0^{-1} (\otimes \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1)$$

откуда и следует сформулированное утверждение.

Доказательство теоремы. По лемме кинетическая энергия T^* распадается на сумму двух квадратичных форм, каждая из которых соответствует определенному значению ν_i, вычисленному для индексов входящих в нее переменных. Поэтому в T^* не войдут множители $\operatorname{sgn} q_1{}^*$ и система (1.8) не будет содержать сингулярностей типа дельта-функций. Следовательно, решения этой системы изображаются непрерывными кривыми в пространстве $(\mathbf{q}^*, \pi^{*\cdot})$. При $q_1{}^* \geqslant 0$ эти решения совпадают с решениями системы (1.4) ввиду совпадения (1.4) и (1.8). Переход траектории системы M^* через плоскость $q_1{}^* = 0$ обеспечивает, в силу (1.7), выполнение для системы M условий удара (1.2).

При $q_1{}^* < 0$, как можно убедиться, значения γ^*, определенные в (1.8), совпадают со значениями, которые они принимают в силу соотношений (1.5), составленных для π^*, а обобщенные силы Π^* — со значениями, определяемыми из уравнения баланса мощностей

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \delta\pi_i = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i{}^* \delta\pi_i{}^*$$

Отсюда и следует симметрия решений систем (1.4) и (1.8), выражаемая соотношениями (1.7).|

В качестве примера рассмотрим тяжелый однородный шар единичных массы, веса и радиуса, катающийся без скольжения по наклонной плоскости P_1 и соударяющийся с абсолютно шероховатой плоскостью P_2, перпендикулярной P_1. В такой постановке плоскость P_2 осуществляет неудерживающую связь и дифференциальную связь первого типа, а плоскость P_1 — две дифференциальные связи второго типа.

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$, располагая полуоси OX и OZ в плоскостях P_1 и P_2 перпендикулярно оси OY, направленной по линии пересечения P_1 и P_2 так, чтобы система координат была правой. В качестве лагранжевых координат возьмем $q_1 = x - 1$, $q_2 = y$, $q_3 = \theta$, $q_4 = \psi$, $q_5 = \varphi$, где x, y — координаты центра шара ($z \equiv 1$), θ, ψ, φ — углы Эйлера.

Кинетическая энергия T, обобщенные силы $\mathbf{Q}$ и наложенные на систему связи имеют вид

(1.9)
$$\begin{aligned}
&T = {}^1/_2\,(q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}) + {}^1/_2 a^2\,(\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 + \omega_z{}^2)\\
&Q_1 = -\cos\alpha,\ Q_2 = -\cos\beta,\ Q_3 = Q_4 = Q_5 = 0\\
&q_1 \geqslant 0,\ c_1 = q_2{}^{\cdot} - \omega_z = 0,\ c_2 = q_1{}^{\cdot} - \omega_y = 0,\ c_3 = q_2{}^{\cdot} + \omega_x = 0\\
&\omega_x = \theta^{\cdot}\cos\psi + \varphi^{\cdot}\sin\theta\sin\psi,\quad \omega_y = \theta^{\cdot}\sin\psi - \varphi^{\cdot}\sin\theta\cos\psi,\quad \omega_z =\\
&= \varphi^{\cdot}\cos\theta + \psi^{\cdot}
\end{aligned}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — координаты орта, направленного вертикально вверх, ω_x ω_y, ω_z — координаты вектора мгновенной угловой скорости ω, a — радиус инерции шара относительно его диаметра. Связь $c_1 = 0$ является связью первого типа, а $c_2 = 0$ и $c_3 = 0$ — второго типа.

Квазикоординаты π в соответствии с (1.3), (1.6) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\pi_1 = q_1,\ \pi_3{}^{\cdot} = c_1,\ \pi_4{}^{\cdot} = c_2 \equiv 0,\ \pi_5{}^{\cdot} = c_3 \equiv 0\\
&\pi_2{}^{\cdot} = \partial T'/\partial q_2{}^{\cdot} = (1 + 2a^2)\, q_2{}^{\cdot} - a^2\pi_3{}^{\cdot}
\end{aligned}$$

Уравнения движения при $q_1 > 0$ имеют вид (1.4), где

$$\begin{aligned}
&2T = (1 + a^2)\,\pi_1^{\cdot 2} + \frac{\pi_2^{\cdot 2} + a^2\,(1 + a^2)\,\pi_3^{\cdot 2}}{1 + 2a^2}\\
&\Pi_1 = Q_1,\ \Pi_2 = \frac{Q_2}{1 + 2a^2},\quad \Pi_3 = \frac{a^2}{1 + 2a^2} Q_2\\
&\gamma_{231} = -\gamma_{132} = \gamma_{243} = -\gamma_{342} = \gamma_{152} = -\gamma_{251} = \frac{-1}{1 + 2a^2}\\
&-\gamma_{122} = +\gamma_{221} = -\gamma_{331} = +\gamma_{133} = \frac{a^2}{1 + 2a^2}\\
&-\gamma_{123} = +\gamma_{321} = \frac{a^4}{1 + 2a^2},\quad -\gamma_{351} = +\gamma_{153} = \frac{1 + a^2}{1 + 2a^2}
\end{aligned}$$

а остальные коэффициенты неголономности γ равны нулю.

Уравнения (1.8), описывающие траектории системы M^*, выглядят так:

$$(1.10)\qquad \ddot{\pi}_1^* = -\frac{\cos\alpha}{1+a^2}\operatorname{sgn} q_1^*, \quad \ddot{\pi}_2^* = -\cos\beta$$

$$\ddot{\pi}_3^* = -\frac{\cos\beta}{1+a^2}\operatorname{sgn} q_1^*, \quad \dot{\pi}_4^* = 0, \quad \dot{\pi}_5^* = 0$$

Считая, что $\cos\alpha > 0$, $q_1^*(0) = 0$, при интегрировании системы (1.10) получаем

$$(1.11)\qquad q_1^* = -\frac{\cos\alpha}{2(1+a^2)}\, t\,(|t| - \tau), \quad -\tau \leqslant t \leqslant \tau$$

$$q_1^*(t+2\tau) = q_1^*(t), \quad \pi_2^{\cdot} = \pi_2^{\cdot *} = A_1 - t\cos\beta$$

$$\pi_3^{\cdot} = \dot{\pi}_3^* \operatorname{sgn} q_1^* = -\frac{\cos\beta}{1+a^2}\, t + A_2 \operatorname{sgn} q_1^*$$

$$q_2^{\cdot} = \frac{A_1 + a^2 A_2 \operatorname{sgn} q_1^*}{1+2a^2} - \frac{\cos\beta}{1+a^2}\, t$$

$$\omega_x = -q_2^{\cdot}, \quad \omega_y = q_1^{\cdot}, \quad \omega_z = \frac{A_1 - (1+a^2) A_2 \operatorname{sgn} q_1^*}{1+2a^2}$$

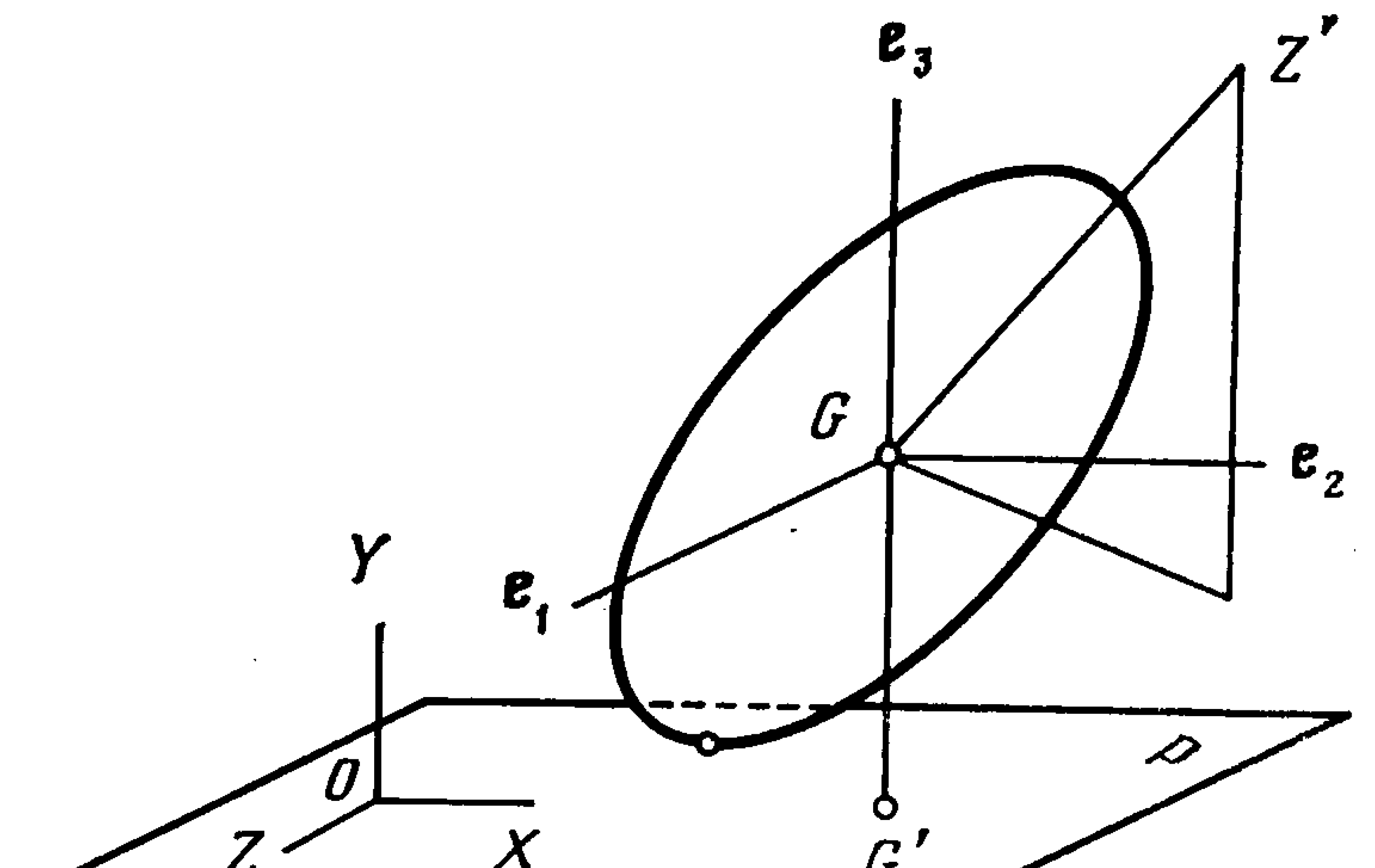
где постоянные τ, A_1, A_2 определяются начальными условиями.

Как следует из соотношений (1.11), след шара на плоскости P_1 представляет собой ломаную, составленную из дуг парабол, при этом q_1 и ω_y изменяются периодически, а величина ω_z поочередно принимает одно из двух постоянных значений.

2. Рассмотрим движение тяжелого осесимметричного твердого тела не ниже абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости P. Условие отсутствия скольжения тела по плоскости накладывает на систему две дифференциальные связи первого типа, выражения для которых, полученные в [7], можно записать в следующей форме:

$$(2.1)\qquad v_1 = f\omega_2 + f'\omega_3 \sin\alpha, \quad v_2 = f\omega_1 - f'\omega_3\cos\alpha$$

где $f = f(\beta) = GG'$ — расстояние от центра тяжести G до плоскости P, измеренное при касании, α и β — долгота и полярное расстояние оси тела



GZ' относительно движущегося поступательно репера $Ge_1e_2e_3$, $e_3 \perp P$ (фигура), v_1, v_2, v_3 и ω_1, ω_2, ω_3 — проекции скорости точки G и мгновенной угловой скорости тела на направления векторов e_1, e_2, e_3.

Выберем начало инерциальной системы координат $OXYZ$ в плоскости P и направим $OX \parallel e_2$, $OY \parallel e_3$, $OZ \parallel e_1$. Функция Лагранжа L и наложенные неудерживающая и дифференциальные связи имеют вид

$$(2.2)\qquad L = {}^1\!/_2 m\,[x^{\cdot 2} + (q_1^{\cdot} + f'\beta^{\cdot})^2 + z^{\cdot 2}] + {}^1\!/_2 A\,(\theta^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2}\sin^2\theta) +$$
$$+ {}^1\!/_2 C\,(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta)^2 - mg\,(q_1 + f), \quad \cos\beta = -\sin\theta\cos\psi$$

$$(2.3)\qquad q_1 = y - f(\beta) \geqslant 0, \quad c_1 = x^{\cdot} + f\omega_z + \frac{f'}{\sin\beta}\,\omega_Y\cos\theta$$

$$c_2 = z^{\cdot} - f\omega_X - \frac{f'}{\sin\beta}\,\omega_Y \sin\theta\sin\psi, \quad c_1 = c_2 = 0 \quad \text{при } q_1 = 0$$

$$\omega_X = \theta^{\cdot}\cos\psi + \psi^{\cdot}\sin\theta\sin\psi, \quad \omega_Y = \theta^{\cdot}\sin\psi - \psi^{\cdot}\sin\theta\cos\psi$$

$$\omega_Z = \varphi^{\cdot}\cos\theta + \psi^{\cdot}$$

где x, y, z — координаты точки G, θ, ψ, φ — углы Эйлера, m и mg — масса и вес тела, A и C — экваториальный и осевой моменты инерции.

Квазикоординаты π определим в соответствии с (1.3), (1.6)

$$(2.4)\qquad \pi_1 = q_1,\quad \pi_5^{\cdot} = c_1,\quad \pi_6^{\cdot} = c_2,\quad \pi^{\cdot}_{2,3,4} = \frac{\partial L'}{\partial \theta^{\cdot}, \psi^{\cdot}, \varphi^{\cdot}}$$

где L' — это функция L, в которой $x^{\cdot}$, $z^{\cdot}$ исключены при помощи соотношений (2.3).

Уравнения движения можно записать в форме (1.8). Как можно убедиться, они допускают частные решения вида

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} &q_1^* = -{}^1/_2 gt\,(|\,t\,| - T) \text{ при } -T \leqslant t \leqslant T,\ q_1^*\,(t + 2T) = \\ &= q_1^*\,(t) \\ &\theta = {}^1/_2\pi,\quad \pi_2^{\cdot *} = 0,\ \psi = \pi,\ \pi_3^{\cdot *} = 0,\quad \varphi^{\cdot} = \Omega,\quad \pi_4^{\cdot *} = C\Omega, \\ &\pi_{5,6}^{\cdot *} = 0 \end{aligned}$$

соответствующие перманентным вращениям вокруг оси симметрии, расположенной вертикально, при периодических соударениях с опорной плоскостью.

При исследовании в первом приближении устойчивости вертикальной ориентации оси тела надо считать, что q_1^*, φ, $\pi_4^{\cdot *}$ в возмущенном движении имеют тот же вид (2.5) [8]. Характеристическое уравнение для системы в вариациях величин $\theta, \psi, \pi_2^{\cdot *}, \pi_3^{\cdot *}, \pi_5^{\cdot *}, \pi_6^{\cdot *}$ можно составить учитывая зависимости (2.4), непрерывность квазискоростей $\pi_i^{\cdot *}$ ($i = 1, \ldots, 6$) при ударе и соотношения

$$\begin{aligned} &x^{\cdot\cdot} = 0,\ z^{\cdot\cdot} = 0,\quad A\theta^{\cdot\cdot} + C\Omega\psi^{\cdot} = 0,\quad A\psi^{\cdot\cdot} - C\Omega\theta^{\cdot} = 0, \\ &\varphi^{\cdot} = \Omega \end{aligned}$$

описывающие движение тела в промежутках между ударами о плоскость.

Это уравнение оказывается возвратным; посредством замены $w = {}^1/_2\,(\rho + \rho^{-1})$ его можно привести к виду

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} &\chi\,(\omega) = w^3 + a_2 w^2 + a_1 w + a_0 = 0 \\ &a_2 = -1 + u_1 s_0 + (1 - c_0)(1 - u_2),\ \alpha_1 = -1 + {}^1/_2\,(1 - c_0)\times \\ &\times (u_1^2 + u_2^2) \\ &a_0 = 1 + {}^1/_2\,(1 - c_0)\,[u_1^2 - 1 - (1 - u_2)^2] - u_1 s_0 \\ &s_0 = \sin C/A\,\Omega T \\ &c_0 = \cos\frac{C}{A}\,\Omega T,\quad u_1 = \frac{mf''\,(0)\,gTA}{[A + mf^2\,(0)]\,C\Omega} \\ &u_2 = \left[1 - \frac{Ar}{Cf\,(0)}\right]\frac{mf^2\,(0)}{A + mf^2\,(0)} \end{aligned}$$

где $r = f\,(0) + f''\,(0)$ — радиус кривизны поверхности тела в точке его оси.

Для устойчивости решений (2.5) необходимо, чтобы уравнение (2.6) имело три корня в интервале $[-1, 1]$. Это эквивалентно системе неравенств

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} &|\,a_2\,| \leqslant 3,\ 2\,|\,a_2\,| \leqslant 3 + a_1,\ |\,a_0 + a_2\,| \leqslant 1 + a_1 \\ &27a_0^2 - 18a_0a_1a_2 + 4a_0a_2^3 - 4a_1^3 - a_1^2a_2^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи движения.

1. Точка G совпадает с центром кривизны поверхности в точке, лежащей на оси тела, т. е. $r = f\,(0)$. В этом случае $u_1 = 0$, один из корней уравнения (2.6) равен единице и система (2.7) эквивалентна двум неравенствам

$$(2.8)\qquad 1 - c_0 \leqslant \frac{2}{(1 - u_2)^2},\quad 1 - c_0 \leqslant \frac{2}{|\,1 - u_2\,|}$$

Анализ условий (2.8) показывает, что если $A < C$, то они выполняются для любых значений T, Ω. Если же $A > C$ (тело продолговатое), то в плоскости параметров T, Ω существуют зоны, лежащие вблизи кривых

$$C\Omega T = A\pi (1 + 2N) \ (N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

соответствующие неустойчивости решений (2.5). Заметим, что аналогичные движения в случае гладкой плоскости устойчивы [8, 9].

2. В стационарном движении $\Omega = 0$. Тогда характеристическое уравнение (2.6) имеет вид

$$(w+1)\left(w+\frac{u^*}{2}-1\right)^2=0, \quad u^*=\frac{mgf''(0)\,T^2}{A+mf^2(0)}$$

и необходимое условие устойчивости будет таким:

(2.9) $\qquad 0 \leqslant u^* \leqslant 2$

В сравнении с условиями устойчивости аналогичных движений тела на гладкой плоскости [8, 9] условия (2.9) несколько менее жестки.

3°. Скорость вращения велика по сравнению со скоростью вертикальных перемещений тела, $u_1 \ll 1$. Можно показать, что если при некоторых значениях u_2 и c_0 неравенства (2.8) выполняются в строгом смысле, то для достаточно малых значений u_1 (и при фиксированных u_2 и c_0) выполнены неравенства (2.7), и решения (2.5) в первом приближении устойчивы. Оказывается, однако, что максимальная величина u_1, при которой еще не нарушается устойчивость, убывает к нулю при $c_0 \to 1$.

Действительно, величина

$$\chi'(1) = 2u_1s_0 + {}^1/_2\,(1-c_0)\,[u_1^2 + (u_2-2)^2] =$$
$$= {}^1/_2\,(1-c_0)\,[u_1^2 + (u_2-2)^2 + 4u_1 \operatorname{ctg}({}^1/_2\, C\Omega TA^{-1})]$$

отрицательна при значениях ${}^1/_2 C\Omega TA^{-1}$, близких, но несколько меньших целого кратного π. Отсюда следует, что производная $\chi'(w)$ имеет корень, больший единицы, а в случае устойчивости все ее корни необходимо принадлежат интервалу $[-1, 1]$.

Сравним описанный характер устойчивости решений (2.5) при $u_1 \ll 1$ с условием устойчивости перманентных вращений тела, все время касающегося опорной плоскости, которое имеет вид [10]

(2.10) $\qquad [C + mf(0)\,r]^2\Omega^2 \geqslant 4f''(0)\,mg\,[A + mf^2(0)]$

Соотношение (2.10) выполняется, если величина Ω достаточно велика, а в случае $f''(0) \leqslant 0$ — при любых значениях Ω. Как следует из сказанного, допущение возможности отрыва тела от опорной плоскости на сколь угодно малую высоту приводит при определенных значениях Ω к дестабилизации стационарных движений.

С другой стороны, условия (2.10) могут быть невыполненными, но выполнение неравенств (2.8) обеспечивает устойчивость в первом приближении для достаточно малых $u_1 \neq 0$.

Автор благодарит А. П. Маркеева за внимание к работе и ее обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев В. Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 781—788.
2. *Журавлев В. Ф., Привалов Е. А.* Исследование методом усреднения вынужденных колебаний гироскопа с ударным поглотителем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 18—22.
3. *Иванов А. П., Маркеев А. П.* О динамике систем с односторонними связями.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 632—636.

4. *Иванов А. П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 5, с. 725—732.
5. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
6. *Appell P.* Traite de mecanique rationelle. T. 2. P.: Gauthier-Villars, 1953.— Рус. перев.: М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
7. *Routh E. J.* Dynamics of a system of rigid bodies. V. 2. L.: McMillan, 1984, v. 2. 343 p.— Рус. перев.: М.: Наука, 1983. 544 с.
8. *Маркеев А. П.* Об устойчивости вращения твердого тела вокруг вертикали при наличии соударений с горизонтальной плоскостью.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 363—369.
9. *Иванов А. П.* О периодических движениях тяжелого симметричного твердого тела с ударами о горизонтальную плоскость.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, №2, с. 30—35.
10. *Magnus K. Kreisel.* Theorie und Anwendungen. B., 1971. 493S.— Рус. перев.: М.: Мир, 1974. 526 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.VIII.1984