Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 5, 1985

УДК 531.01

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИДЕАЛЬНОЙ НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗЬЮ

Маркеев А. П.

Метод [1] распространения канонического формализма на системы с идеальными односторонними связями используется для анализа движения твердого тела при наличии его соударений с неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью. Поверхность тела предполагается близкой к сфере. При помощи теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении движений при малом изменении функции Гамильтона [2, 3] проводится качественное исследование движения тела. Для однородного эллипсоида вращения методом Пуанкаре [4] доказывается существование периодических движений, исследована их устойчивость.

1. Пусть твердое тело, имеющее выпуклую поверхность без заострений и ребер, движется в поле тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Во время движения оно может соударяться с плоскостью. Удар считаем абсолютно упругим, а плоскость — абсолютно гладкой.

Движение отнесем к неподвижной системе координат $Oxyz$ с началом в некоторой точке плоскости; ось Oz направим вертикально вверх. С телом жестко свяжем систему координат $G\xi\eta\zeta$, оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции. Ориентация тела относительно неподвижной системы координат определяется углами Эйлера ψ, θ, φ, которые вводятся обычным образом. Единичный вектор γ оси Oz в системе $G\xi\eta\zeta$ задается компонентами γ_1, γ_2, γ_3:

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

Пусть P — ближайшая к горизонтальной плоскости Oxy точка поверхности тела. Ее координаты ξ, η, ζ в системе $G\xi\eta\zeta$ будут функциями углов θ, φ, определяемыми по виду уравнения $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$, задающего форму поверхности тела.

Если x, y, z — координаты центра тяжести G тела в системе $Oxyz$, m — масса тела, g — ускорение свободного падения, A, B, C — главные центральные моменты инерции тела, p, q, r — проекции его угловой скорости на оси $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, то кинетическая и потенциальная энергия определяются выражениями

$$T = {}^1/_2 m(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2}) + {}^1/_2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \Pi = mgz$$
$$p = \psi^{\cdot}\gamma_1 + \theta^{\cdot}\cos\varphi, \quad q = \psi^{\cdot}\gamma_2 - \theta^{\cdot}\sin\varphi, \quad r = \psi^{\cdot}\cos\theta + \varphi^{\cdot}$$

Наложенная на тело неудерживающая связь задается неравенством $z \geqslant d$, где $d = -(\xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3)$ — расстояние от центра тяжести до горизонтальной плоскости, проходящей через точку P. Это неравенство означает, что точка P расположена не ниже плоскости Oxy.

Так как внешние силы, действующие на тело: сила тяжести и сила, возникающая при соударении, направлены вертикально, то проекция центра тяжести на плоскость Oxy движется равномерно и прямолинейно; без ограничения общности будем считать ее неподвижной ($x^{\cdot} = y^{\cdot} = 0$), тогда центр тяжести движется по заданной вертикали.

Если вместо координаты z ввести величину q_0 по формуле $q_0 = z + \xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3$, принять обозначения

$$\chi_1 = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \quad \chi_2 = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi$$

и учесть, что функции $\xi(\theta, \varphi)$, $\eta(\theta, \varphi)$, $\zeta(\theta, \varphi)$ удовлетворяют легко проверяемым тождествам

$$\xi'\gamma_1 + \eta'\gamma_2 + \zeta'\gamma_3 \equiv 0$$

где штрихом обозначено дифференцирование по θ или φ, то функцию Лагранжа можно представить в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij} q_i^{\bullet} q_j^{\bullet} - mg(q_0 - \chi_1 \sin q_1 - \zeta \cos q_1) \tag{1.1}$$

$$a_{00} = m, \quad a_{01} = a_{10} = -m(\chi_1 \cos q_1 - \zeta \sin q_1), \quad a_{02} = a_{20} = -m\chi_2 \sin q_1$$

$$a_{03} = a_{30} = 0, \quad a_{11} = A \cos^2 q_2 + B \sin^2 q_2 + m(\chi_1 \cos q_1 - \zeta \sin q_1)^2$$

$$a_{12} = a_{21} = m\chi_2(\chi_1 \cos q_1 - \zeta \sin q_1) \sin q_1, \quad a_{13} = a_{31} = (A - B) \sin q_1 \sin q_2 \cos q_2, \quad a_{22} = C + m\chi_2^2 \sin^2 q_1$$

$$a_{23} = a_{32} = C \cos q_1, \quad a_{33} = (A \sin^2 q_2 + B \cos^2 q_2) \sin^2 q_1 + C \cos^2 q_1$$

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \psi$$

Связь задается неравенством $q_0 \geqslant 0$.

2. Чтобы записать уравнения движения в форме Гамильтона, надо [1] предварительно сделать невырожденную замену переменных

$$q_0 = Q_0, \quad q_j = f_j(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

подобрав функции f_j так, чтобы в новых переменных функция Лагранжа не содержала произведений $Q_0^{\bullet} Q_j^{\bullet}$ $(j = 1, 2, 3)$. Согласно [1], функции f_j должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$a_{1j} \frac{df_1}{dQ_0} + a_{2j} \frac{df_2}{dQ_0} + a_{3j} \frac{df_3}{dQ_0} = -a_{0j} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Здесь в коэффициентах a_{ij} величины q_1, q_2 и q_3 должны быть заменены на неизвестные функции f_1, f_2 и f_3 соответственно. Величина Q_0 в (2.2) играет роль независимой переменной. Систему (2.2) следует решать при начальных условиях

$$f_j|_{Q_0=0} = Q_j \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

Новые переменные Q_j войдут в функции f_1, f_2, f_3 как параметры. Динамическую систему с функцией Лагранжа, записанной в новых переменных Q_0, Q_j $(j = 1, 2, 3)$, обозначим через M.

Заменив в функции Лагранжа величину Q_0 на $|Q_0|$, перейдем к вспомогательной системе M^* с функцией Лагранжа L^*. Траектории $Q_0(t)$, $Q_j(t)$ и $Q_0^*(t)$, $Q_j^*(t)$ систем M и M^* удовлетворяют соотношениям

$$Q_0(t) = |Q_0^*(t)|, \quad Q_j(t) = Q_j^*(t) \quad (j = 1, 2, 3)$$

Уравнения вспомогательной системы можно обычным образом записать в гамильтоновой форме

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

где следует считать, что

$$\frac{\partial H}{\partial Q_0}\bigg|_{Q_0=0}=\min\left(0,\frac{\partial H}{\partial Q_0}\bigg|_{Q_0=+0}\right)$$

3. Явный вид замены переменных (2.1) в общем случае получить невозможно. Но если коэффициенты a_{0j} ($j = 1, 2, 3$) малы, то решение задачи Коши (2.2), (2.3) можно найти в виде рядов по малому параметру. В рассматриваемой задаче коэффициент a_{03} равен нулю, а коэффициенты a_{01} и a_{02} будут малыми только тогда, когда поверхность тела близка к сфере, центр которой находится в центре тяжести тела.

Чтобы показать это, будем считать, что уравнение поверхности тела $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ выбрано так, что $\gamma = \operatorname{grad} f / |\operatorname{grad} f|$. Тогда

$$\frac{\partial f}{d\xi}=\gamma_1|\operatorname{grad} f|,\qquad \frac{\partial f}{\partial\eta}=\gamma_2|\operatorname{grad} f|,\qquad \frac{\partial f}{\partial\zeta}=\gamma_3|\operatorname{grad} f|$$

и для величин a_{01}, a_{02} получаем такие выражения:

$$a_{01}=\frac{m}{\sin q_1|\operatorname{grad} f|^2}\left\{\zeta\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)^2\right]-\frac{\partial f}{\partial\zeta}\left(\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)\right\}$$

$$a_{02}=\frac{m}{|\operatorname{grad} f|}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)$$

Из уравнения $a_{02} = 0$ следует, что поверхность тела должна быть поверхностью вращения: $f(\rho, \zeta) = 0$, где $\rho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$. Подставив эту функцию f в уравнение $a_{01} = 0$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}\left(\zeta\frac{\partial f}{\partial\rho}-\rho\frac{\partial f}{\partial\zeta}\right)=0 \tag{3.1}$$

Величина $\partial f/\partial\rho$ не может тождественно равняться нулю, так как тогда уравнение $f = 0$ было бы просто уравнением относительно ζ. Поэтому из (3.1) следует равенство нулю выражения в скобках, т. е. f — функция величины $\rho^2 + \zeta^2$. Это означает, что коэффициенты a_{01} и a_{02} тождественно равны нулю, только если поверхность тела будет сферой, центр которой совпадает с центром тяжести G тела.

В дальнейшем считаем, что поверхность тела близка к сфере радиуса R и задается уравнением

$$f \equiv R^2 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \mu f_1(\xi, \eta, \zeta, \mu) = 0 \quad (0 < \mu \ll 1)$$

Функцию f_1 предполагаем аналитической функцией своих переменных. Коэффициенты a_{01} и a_{02} будут малыми величинами порядка μ.

4. При $\mu = 0$ тело будет шаром; центр тяжести шара совпадает с его геометрическим центром; в общем случае шар не является однородным и имеет произвольный центральный эллипсоид инерции. Функция Лагранжа L_0 представляет собой сумму двух слагаемых

$$L_0 = L_0^{(1)} + L_0^{(2)} \tag{4.1}$$

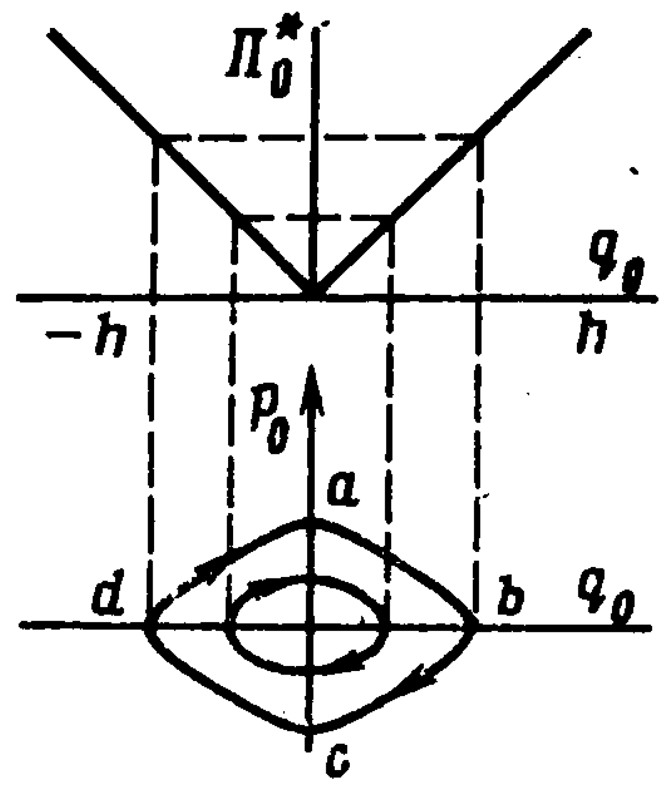
где $L_0^{(1)}$ — функция Лагранжа, описывающая движение Эйлера—Пуансо твердого тела относительно центра тяжести; она получается из функции (1.1), если в последней положить $m = 0$, $q_0^{\cdot} = 0$. Функция $L_0^{(2)}$ описывает движение центра тяжести шара ($q_0 = z - R$)

$$L_0^{(2)} = {}^1/_2 m q_0^{\cdot 2} - mgq_0, \qquad q_0 \geqslant 0 \tag{4.2}$$

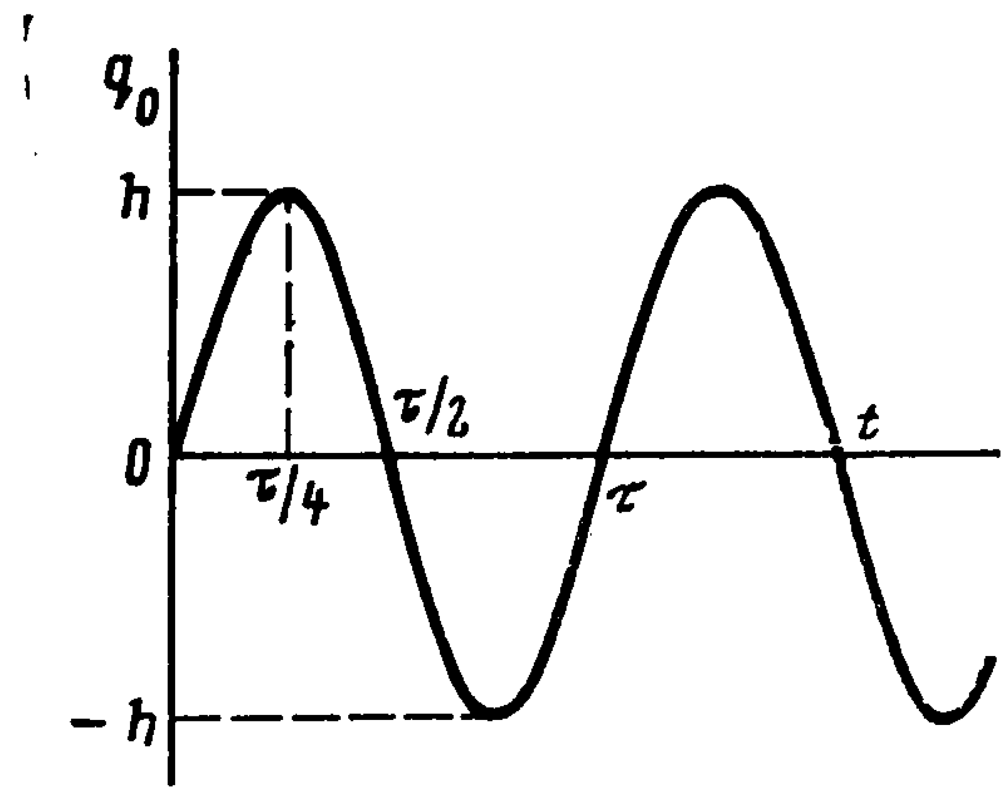
Вспомогательная система M_0^* с функцией Лагранжа L_0^* имеет функцию Гамильтона $H_0 = H_0^{(1)} + H_0^{(2)}$, где $H_0^{(1)}$ — гамильтониан в задаче Эйлера — Пуансо, а

$$H_0^{(2)} = p_0^2/(2m) + mg\,|q_0| \tag{4.3}$$

Движение Эйлера — Пуансо хорошо известно. Рассмотрим подробно движение центра тяжести в системе M_0^*. Оно описывается гамильтонианом (4.3).



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 представлен график потенциальной энергии Π_0^* вспомогательной системы M_0^* и ее траектории на фазовой плоскости q_0, p_0. Каждая фазовая траектория образована дугами параболы, симметричными относительно оси $q_0 = 0$. Все движения в системе M_0^* периодические с периодом τ, равным $4\,(2h/g)^{1/2}$, где h — максимальная высота подскока шара над плоскостью. Величина τ равна промежутку времени между k-м и $(k+2)$-м соударениями шара с плоскостью.

На фиг. 2 для системы M_0^* показана зависимость величины q_0 от времени; принято, что при $t = 0$ величина q_0 равна нулю. График функции $q_0\,(t)$ состоит из кусков парабол

$$q_0(t) = \begin{cases} (2gh)^{1/2}t - gt^2/2, & 0 \leqslant t \leqslant \tau/2 \\ -(2gh)^{1/2}(t-\tau/2) + g\,(t-\tau/2)^2/2, & \tau/2 \leqslant t \leqslant \tau \end{cases}$$

Реальное движение центра тяжести, описываемое функцией Лагранжа (4.2), будет иметь период $\tau/2$, равный промежутку времени между двумя последовательными соударениями шара с плоскостью. Для реального движения график функции $q_0\,(t)$ получается из графика, представленного на фиг. 2, зеркальным отражением его части, находящейся ниже оси времени, относительно этой оси. Фазовый портрет реального движения получается из фазового портрета фиг. 1, если в последнем взять только те участки траекторий, на которых $q_0 \geqslant 0$, и дополнить их до замкнутых кривых соответствующими отрезками оси $q_0 = 0$. Например, чтобы получить из фазовой траектории $abcd$ вспомогательной системы фазовую траекторию реальной системы, нужно дугу abc дополнить отрезком ca. Переход из точки c в точку a происходит скачком, что соответствует соударению шара с плоскостью.

Для дальнейшего надо привести функцию (4.3) к переменным действие I — угол W. Для этого сделаем следующую 2π-периодическую по W каноническую замену переменных q_0, $p_0 \to I$, W:

$$(4.4) \qquad q = \begin{cases} 4h\pi^{-2}W\,(\pi - W), & 0 \leqslant W \leqslant \pi \\ -4h\pi^{-2}\,(W-\pi)\,(2\pi - W), & \pi \leqslant W \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} 2m\pi^{-1}(2gh)^{1/2}(\pi/2 - W), & 0 \leqslant W \leqslant \pi \\ -2m\pi^{-1}(2gh)^{1/2}(3\pi/2 - W), & \pi \leqslant W \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Гамильтониан (4.3) в переменных I, W примет вид

$$(4.5) \qquad H_0^{(2)} = ({}^9/_{32}m\pi^2 g^2)^{1/3} I^{2/3}$$

Высота подскока h связана с величиной I равенством

$$(4.6) \qquad I = {}^4/_3 m\pi^{-1}\,(2g)^{1/2} h^{3/2}$$

Частота ω периодического движения центра тяжести в вспомогательной системе M_0^* вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial I} = \frac{2}{3}\left(\frac{9m\pi^2 g^2}{32I}\right)^{1/3} = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{g}{2h}\right)^{1/2} \tag{4.7}$$

Таким образом, при $\mu = 0$ движение вспомогательной системы представляет собой движение Эйлера — Пуансо тела относительно центра тяжести и периодическое движение центра тяжести с частотой ω, определяемой по формуле (4.7). Реальное движение отличается от этого движения только тем, что в нем $q_0 \geqslant 0$ и периодическое движение центра тяжести по вертикали происходит с частотой, равной 2ω.

5. Пусть теперь $\mu \neq 0$. Обозначим через I_1, I_2, I_3, W_1, W_2, W_3 переменные действие — угол в задаче Эйлера — Пуансо [5, 6]. Здесь I_3 — проекция кинетического момента тела относительно центра тяжести на вертикаль, I_2 — модуль кинетического момента. Угловая переменная W_3 будет циклической в рассматриваемой задаче, поэтому I_3 является первым интегралом; будем считать I_3 одним из параметров. Гамильтониан запишется в виде

$$\begin{aligned} H &= H_0(I_1, I_2, I) + \mu H_1(I_1, I_2, I, W_1, W_2, W) + \ldots \\ H_0 &= H_0^{(1)}(I_1, I_2) + H_0^{(2)}(I) \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $H_0^{(1)}$ — гамильтониан для движения Эйлера — Пуансо, выраженный через переменные действие — угол, а функция $H_0^{(2)}(I)$ определена формулой (4.5). Функция $H - H_0$ аналитична по всем переменным и 2π-периодична по W_1, W_2 и W_3. Многоточием здесь и в дальнейшем обозначены члены второго и более высоких порядков.

Пусть при $\mu = 0$ движение тела относительно центра масс будет условно-периодическим. Его частоты ω_k равны производным $\partial H_0^{(1)}/\partial I_k$ ($k = 1, 2$), вычисленным для начальных значений величин I_1, I_2.

Для гессиана Γ функции H_0 имеем выражение

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_1^2} & \dfrac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_1 \partial I_2} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_2 \partial I_1} & \dfrac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial I_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial I^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial I_1}\frac{\partial\omega_2}{\partial I_2} - \frac{\partial\omega_1}{\partial I_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial I_1}\right)\frac{\partial\omega}{\partial I}$$

Как показано в [7], первый сомножитель в этом выражении для Γ отличен от нуля. А так как из (4.7) следует, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial I} = -\frac{4\omega^4}{m\pi^2 g^2} \neq 0 \tag{5.2}$$

то $\Gamma \neq 0$. Отсюда на основании теоремы А. Н. Колмогорова [2, 3] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое μ_0, что при $0 < \mu < \mu_0$ для всех t, $-\infty < t < \infty$, движение в системе с гамильтонианом (5.1) удовлетворяет неравенствам $|I_k(t) - I_k(0)| < \varepsilon$ ($k = 1, 2$), $|I(t) - I(0)| < \varepsilon$ для большинства в смысле меры Лебега начальных значений $I_k(0)$, $I(0)$.

Этот вывод означает, что (для большинства начальных условий) на бесконечном интервале времени движение тела, форма поверхности которого достаточно близка к сфере, таково, что величина его кинетического момента и угол между вектором кинетического момента и вертикалью мало отличаются от их начальных значений; высота h подскока тела над плоскостью мало изменится по сравнению с ее значением в невозмущенном движении ($\mu = 0$) и, следовательно, мало изменится промежуток времени между двумя последовательными соударениями тела с плоскостью.

6. Пусть тело будет динамически и геометрически симметричным с осью симметрии $G\zeta$. Угол собственного вращения φ будет циклической координатой. Проекция $L = Cr$ вектора кинетического момента на ось $G\zeta$ является первым интегралом. Зафиксировав величину L, отнесем ее к параметрам задачи. Исследование движения тела сводится к рассмотрению системы с двумя степенями свободы. Ее гамильтониан в переменных действие — угол имеет вид

$$H = H_0 + \mu K_1 (I_2, I, W_2, W) + \ldots \tag{6.1}$$
$$H_0 = \frac{I_2^2}{2A} + \left(\frac{9m\pi^2 g^2}{32}\right)^{1/3} I^{2/3}$$

где $H - H_0$ — аналитическая функция своих переменных, 2π-периодическая по W_2 и W.

При $\mu = 0$ движение твердого тела относительно центра масс будет регулярной прецессией; в исключительных случаях эта прецессия вырождается в стационарные вращения тела вокруг главных центральных осей инерции.

Выводы п. 5 о сохранении движений при малых μ остаются справедливыми и здесь. Но так как в рассматриваемом случае задача приводится к исследованию систем, обладающей не тремя, как в п. 5, а двумя степенями свободы, то здесь можно получить выводы о сохранении движений не для большинства, а для всех начальных условий. Для этого достаточно [3] проверить условие $D \neq 0$ изоэнергетической невырожденности функции H_0 из (6.1). Имеем.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2^2} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2 \partial I} & \frac{\partial H_0}{\partial I_2} \\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial I \partial I_2} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \frac{\partial H_0}{\partial I} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I_2} & \frac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\omega^2}{A} - \left(\frac{I_2}{A}\right)^2 \frac{\partial \omega}{\partial I}$$

Учтя соотношения (4.6), (4.7) и (5.2), получим

$$D = \frac{\omega^2}{A}\left(\frac{I_2^2}{2mghA} - 1\right)$$

Величина D может обратиться в нуль только тогда, когда $mgh = I_2^2/2A$. Поэтому $D \neq 0$ и качественные выводы п. 5 о движении твердого тела справедливы здесь для всех начальных условий.

7. Рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости периодических движений тела, близкого к шару. Для определенности твердое тело будем считать однородным эллипсоидом. Уравнение его поверхности запишем в виде $1 - (\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 + \zeta^2/c^2) = 0$. Координаты ξ, η, ζ точки P связаны с углами Эйлера θ, φ соотношениями

$$b^2c^2\xi = -\Delta \sin\theta \sin\varphi, \quad c^2a^2\eta = -\Delta \sin\theta \cos\varphi, \quad a^2b^2\zeta = -\Delta \cos\theta$$
$$\Delta = (b^4c^4\xi^2 + c^4a^4\eta^2 + a^4b^4\zeta^2)^{1/2}$$

Имеют место равенства

$$\chi_1 = -\frac{\Delta}{a^2b^2c^2} \sin\theta\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi),$$
$$\chi_2 = -\frac{\Delta(a^2 - b^2)}{a^2b^2c^2} \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\chi_1 \cos\theta - \zeta \sin\theta = -\frac{\Delta}{a^2b^2c^2} \sin\theta\cos\theta\,(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi - c^2)$$

$$\chi_1 \sin\theta + \zeta\cos\theta = -\frac{\Delta}{a^2b^2c^2}\,[(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta]$$

$$A = m\,(b^2 + c^2)/5, \quad B = m\,(c^2 + a^2)/5, \quad C = m\,(a^2 + b^2)/5$$

Пусть полуоси эллипсоида близки к величине R и отличаются от нее на величины порядка μR. Функция Лагранжа (1.1) может быть представлена в виде

$$L = L_0 + m\,(a - b)\sin^2 q_1 \sin 2q_2 q_0^{\boldsymbol{\cdot}} q_2^{\boldsymbol{\cdot}} + m\,[(b - c) + (a - b)\sin^2 q_2]\sin 2q_1 q_0^{\boldsymbol{\cdot}} q_1^{\boldsymbol{\cdot}} + \ldots$$

где функция L_0 определена формулой (4.1). Система уравнений (2.2), определяющая вместе с условиями (2.3) замену переменных (2.1), будет такой:

$$\frac{df_1}{dQ_0} = \frac{5}{2R^2}\,[(c - b) + (b - a)\sin^2 f_2]\sin 2f_1 + \ldots$$

$$\frac{df_2}{dQ_0} + \cos f_1 \frac{df_3}{dQ_0} = \frac{5}{2R^2}\,(b - a)\sin^2 f_1 \sin 2f_2 + \ldots$$

$$\frac{df_3}{dQ_0} + \cos f_1 \frac{df_2}{dQ_0} = \ldots$$

Отсюда получим явный вид замены переменных (2.1)

$$q_1 = Q_1 + \frac{5}{2R^2}\,Q_0\,[(c - b) + (b - a)\sin^2 Q_2]\sin 2Q_1 + \ldots \tag{7.1}$$

$$q_2 = Q_2 + \frac{5}{2R^2}\,Q_0\,(b - a)\sin 2Q_2 + \ldots$$

$$q_3 = Q_3 - \frac{5}{2R^2}\,Q_0\,(b - a)\cos Q_1 \sin 2Q_2 + \ldots$$

$$q_0 = Q_0$$

Отметим, что в силу того, что координата ψ циклическая, переменная Q_3 будет также циклической для системы с преобразованной функцией Лагранжа.

Сделав замену переменных (7.1) перейдем к вспомогательной системе M^*, заменив величину Q_0 на величину $|\,Q_0\,|$. А затем запишем уравнения движения системы M^* в гамильтоновой форме. За переменные, определяющие движение тела относительно центра тяжести, примем переменные Андуайе [6, 8], а за переменные, описывающие движение центра тяжести возьмем переменные I, W, введенные в п. 4. Ограничимся случаем симметричного эллипсоида ($a = b$). Записав разность $(c - a)$ в виде $\mu\,(c' - a')$, где $0 < \mu \ll 1$, а $(c' - a')$ имеет порядок единицы, после некоторых преобразований, использующих связь переменных Андуайе с углами Эйлера и их производными [6], получим функцию Гамильтона системы M^* в виде

$$H = H_0 + \mu H_1 + \ldots \tag{7.2}$$

где функция H_0 определена формулой (6.1), а

$$H_1\,(I_2, I, \varphi_2, W) = 2m\,(c' - a')\sin\delta_1 \sin\delta_2 I_2{}^2 A^{-2}|\,q_0\,(I, W)\,| \times (\sin\delta_1\sin\delta_2\cos 2\varphi_2 - \cos\delta_1\cos\delta_2\cos\varphi_2) + mg\,(c' - a')\cos^2 Q_1 \tag{7.3}$$

$$\cos Q_1 = \cos\delta_1\cos\delta_2 - \sin\delta_1\sin\delta_2\cos\varphi_2, \quad \cos\delta_1 = I_3/I_2, \quad \cos\delta_2 = L/I_2$$

Здесь I_3 и L — проекции кинетического момента на вертикаль и ось симметрии; они являются первыми интегралами и содержатся в функции

(7.2) в качестве параметров. Переменная I_2 — величина кинетического момента, φ_2 — сопряженная ей координата [6]. Невыписанные в (7.2) члены второго и более высоких порядков по μ являются функциями величин I_2, I, φ_2, W, причем по φ_2 и W они 2π-периодичны.

Содержащаяся в H_1 функция $q_0\,(I,\,W)$ определена равенствами (4.4), (4.6). Функция $|\,q_0\,|$ представима рядом Фурье

$$(7.4)\qquad |q_0(I,W)| = \frac{g}{4\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nW}{n^2}\right)$$

При $\mu = 0$ движение в системе с функцией Гамильтона (7.2) описывается формулами

$$(7.5)\qquad \begin{aligned} &I_2 = I_{20} = \mathrm{const}, \quad I = I_0 = \mathrm{const} \\ &\varphi_2 = \omega_2 t, \quad W = \omega t + \lambda \ \ (\lambda = \mathrm{const}) \end{aligned}$$

Принято, что $\varphi_2 = 0$ при $t = 0$; это не ограничивает общности, так как уравнения движения явно время не содержат. В (7.5) $\omega_2 = I_{20}/A$, а ω вычисляется по формуле (4.7) при $I = I_0$.

Соотношения (7.5) описывают равномерное вращение тела с угловой скоростью ω_2 вокруг неизменного вектора кинетического момента. При этом тело периодически ударяется о плоскость; время между двумя последовательными соударениями равно π/ω. Максимальная высота h подскока тела над плоскостью вычисляется по формуле (4.6), в которой надо положить $I = I_0$.

Если отношение ω_2/ω будет рациональным числом, то описанное движение будет периодическим с некоторым периодом $\varkappa$. При μ отличном от нуля, но достаточно малом, существование $\varkappa$-периодических движений можно установить методом Пуанкаре ([4], п. 42).

Для этого надо вычислить среднее значение $\langle H_1\rangle$ функции H_1 на невозмущенном $\varkappa$-периодическом движении (7.5)

$$\langle H_1\rangle = \frac{1}{\varkappa}\int_0^{\varkappa} H_1(I_{20}, I_0, \omega_2 t, \omega t + \lambda)\, dt$$

Величина $\langle H_1\rangle$ будет функцией I_{20}, I_0 и λ.

Если при $I_2 = I_{20}$, $I = I_0$ гессиан функции H_0 отличен от нуля и при некотором $\lambda = \lambda_*$ выполняются соотношения

$$(7.6)\qquad \frac{\partial\langle H_1\rangle}{\partial\lambda} = 0, \qquad \frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\lambda^2} \neq 0$$

то при достаточно малых μ существует $\varkappa$-периодическое движение, аналитическое по μ и переходящее при $\mu = 0$ в движение (7.5), в котором $\lambda = \lambda_*$.

Согласно известным результатам ([1], п. 79), два характеристических показателя, соответствующих этому движению, равны нулю, а два других $\pm\alpha$ разлагаются в сходящиеся ряды по возрастающим степеням величины $\mu^{1/2}$

$$\alpha = \alpha_1\mu^{1/2} + \alpha_2\mu + \alpha_3\mu^{3/2} + \ldots$$

причем

$$(7.7)\qquad \omega_2^2\alpha_1^2 = \left.\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_*}\left(\omega_2^2\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} - 2\omega_2\omega\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2\partial I} + \omega^2\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2^2}\right)$$

Отсюда следует условие орбитальной устойчивости периодического движения в первом (линейном) приближении для достаточно малых μ: правая часть равенства (7.7) должна быть отрицательной.

Вопрос об орбитальной устойчивости периодического движения в строгой нелинейной постановке может быть решен при помощи следующего условия [1]: если выполнено условие орбитальной устойчивости в первом (линейном) приближении, то для того, чтобы периодическое движение было действительно орбитально устойчивым, достаточно, чтобы при $\lambda = \lambda_*$ выполнялось неравенство:

$$(7.8)\qquad 3\,\frac{\partial^4 \langle H_1\rangle}{\partial\lambda^4}\,\frac{\partial^2 \langle H_1\rangle}{\partial\lambda^2} - 5\left(\frac{\partial^3 \langle H_1\rangle}{\partial\lambda^3}\right)^2 \neq 0$$

Вычисления, опирающиеся на формулы (7.3) — (7.5), показывают, что в рассматриваемой задаче в первом приближении по μ обнаруживаются периодические движения, для которых частота ω_2 невозмущенного движения (7.5) кратна частоте ω : $\omega_2 = k\omega$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Для таких движений (7.5) тело за время между двумя последовательными соударениями с плоскостью поворачивается вокруг вектора кинетического момента на угол $k\pi$.

При $\omega_2 = k\omega$ имеем

$$(7.9)\qquad \langle H_1\rangle = mg\,(c' - a')\left(\cos^2\delta_1\cos^2\delta_2 + \frac{1}{2}\sin^2\delta_1\sin^2\delta_2\right) - $$
$$- \frac{1}{2}\,mg\,(c' - a')\sin^2\delta_1\sin^2\delta_2 \times$$
$$\times \begin{cases} \cos 2\lambda, & k \text{ — нечетно} \\ (\cos 2\lambda - 4\,\mathrm{ctg}\,\delta_1\,\mathrm{ctg}\,\delta_2\cos\lambda), & k \text{ — четно} \end{cases}$$

Из (7.6) и (7.9) следует, что искомые периодические движения должны быть такими, чтобы для них при $\mu = 0$ величина $\sin\delta_1 \sin\delta_2$ не была равной нулю, т. е. невозмущенное периодическое движение не должно быть вращением тела вокруг вертикали или вокруг оси симметрии.

Кратко приведем результаты проверки условий (7.6) — (7.8) в рассматриваемой задаче.

Пусть k — нечетное число. Тогда существует два типа периодических движений:

а) $\lambda_* = 0$ или π. Соответствующее периодическое движение орбитально устойчиво при выполнении неравенства

$$(7.10)\qquad (c - a)(1 - \beta) < 0;\quad \beta = 1/40\pi^2R^2h^{-2}k^2$$

б) $\lambda_* = {}^1/_2\pi$ или ${}^3/_2\pi$. Соответствующее периодическое движение орбитально устойчиво, если

$$(7.11)\qquad (c - a)(1 - \beta) > 0$$

Если k — четное число, то существует три типа периодических движений:

а) $\lambda_* = 0$ и в невозмущенном движении $\mathrm{ctg}\,\delta_1\,\mathrm{ctg}\,\delta_2 \neq 1$. Периодическое движение орбитально устойчиво, если $\mathrm{ctg}\,\delta_1\,\mathrm{ctg}\,\delta_2 \neq 4$ и выполняется неравенство

$$(7.12)\qquad (c - a)(1 - \mathrm{ctg}\,\delta_1\mathrm{ctg}\,\delta_2)(1 - \beta) < 0$$

б) $\lambda_* = \pi$ и в невозмущенном движении $\mathrm{ctg}\,\delta_1\,\mathrm{ctg}\,\delta_2 \neq -1$. Соответствующее периодическое движение орбитально устойчиво, если

[1] См. *Саитбатталов А. А.* Периодические решения Пуанкаре и их устойчивость в задаче о движении твердого тела под действием гравитационных моментов: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: Моск. авиац. ин-т, 1984. 171 с.

$\operatorname{ctg}\delta_1 \operatorname{ctg}\delta_2 \neq -4$ и

$$(c-a)(1+\operatorname{ctg}\delta_1 \operatorname{ctg}\delta_2)(1-\beta) < 0 \tag{7.13}$$

в) $\cos\lambda_* = \operatorname{ctg}\delta_1 \operatorname{ctg}\delta_2$ ($|\operatorname{ctg}\delta_1 \operatorname{ctg}\delta_2| < 1$). Периодическое движение орбитально устойчиво, если

$$(c-a)(1-\beta) > 0 \tag{7.14}$$

Если неравенства (7.10)—(7.14) выполняются с обратными знаками, то соответствующие периодические движения неустойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов А. П., Маркеев А. П.* О динамике систем с односторонними связями.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 632—636.
2. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4, с. 527—530.
3. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 5, с. 13—40.
4. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971, с. 8—326.
5. *Садов Ю. А.* Переменные действие — угол в задаче Эйлера — Пуансо.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 962—964.
6. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
7. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
8. *Andoyer M. H.* Cours de mécanique céleste. P.: Gauthier-Villars, 1923, v. 1. 440 p.; 1926, v. 2. 454 p.

Москва

Поступила в редакцию 9.I.1984