ЛИТЕРАТУРА

1. *Кристенсен Р. М.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
2. *McCoy J. J.* Pressure signals in random lineary elastic rods.— Internat. J. Solids and Structures, 1972, v. 8, No. 7, p. 877—894.
3. *Gurtin M. E.* Variational principles for linear initial-value problems.— Quart. Appl. Math., 1964, v. 22, No. 3, p. 252—256.
4. *Tonti E.* On the variational formulation for linear initial-value problems.— Ann. mat. pura ed appl., 1973, ser. 4, v. 95, p. 331—359.
5. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы в проблеме осреднения случайных структур.— Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 2, с. 301—304.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.1984

УДК 539.3

МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ГИБКИХ ПОЛОГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Кириченко В. Ф., Крысько В. А., Сурова Н. С.

Доказывается существование решений сильно нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающей в рамках кинематической модели Тимошенко [1], принимаемой для всего пакета в целом [2], поведение гибкой многослойной оболочки, каждый слой которой изготовлен из неоднородного ортотропного материала. Для получения приближенного решения поставленной задачи предлагается и обосновывается процедура применения метода Бубнова — Галеркина (БГ), в основе которой лежит построение некоторой вспомогательной квазилинейной системы уравнений. Подобный подход позволяет распространить методику [3—6] исследования сходимости метода БГ на сильно нелинейные системы уравнений эллиптического типа и добиться сходимости последовательности приближенных решений к точному в пространствах любой наперед заданной гладкости, не накладывая дополнительных ограничений на исходные данные задачи.

Исходная задача формулируется следующим образом: в области $\Omega \subset E_2$ (E_2 — евклидово пространство, (x, y) — точка в E_2) с границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условиям, гарантирующим применение теорем вложения Соболева [7], найти решение системы дифференциальных уравнений с краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & L_1(u) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}(T_1) - \frac{\partial}{\partial y}(S) - P_x = 0\\
& L_2(v) \equiv -\frac{\partial}{\partial y}(T_2) - \frac{\partial}{\partial x}(S) - P_y = 0\\
& L_3(w) \equiv -k_x T_1 - k_y T_2 - \frac{\partial}{\partial x}(Q_1) - \frac{\partial}{\partial y}(Q_2) - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_1 \frac{\partial w}{\partial x}\right) -\\
& -\frac{\partial}{\partial y}\left(T_2 \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(S\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial w}{\partial y}\right) - q = 0\\
& L_4(\gamma_x) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}(M_{11}) - \frac{\partial}{\partial y}(M_{12}) + Q_1 = 0\\
& L_5(\gamma_y) \equiv -\frac{\partial}{\partial y}(M_{22}) - \frac{\partial}{\partial x}(M_{12}) + Q_2 = 0\\
& u = v = w = \gamma_x = \gamma_y = 0 \text{ на } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

Здесь

$$T_\lambda = C_{1\lambda}\varepsilon_{11} + C_{\lambda 2}\varepsilon_{22} + K_{1\lambda}\varkappa_{11} + K_{\lambda 2}\varkappa_{22}, \qquad S = C_{66}\varepsilon_{12} + K_{66}\varkappa_{12}$$

$$M_{\lambda 1} = K_{1\lambda}\varepsilon_{11} + K_{\lambda 2}\varepsilon_{22} + D_{1\lambda}\varkappa_{11} + D_{\lambda 2}\varkappa_{22}, \qquad M_{12} = K_{66}\varepsilon_{12} + D_{66}\varkappa_{12}$$

$$Q_\lambda = A_{\lambda\lambda}\varepsilon_{\lambda 3}; \quad \lambda = 1, 2$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_{13}=\gamma_x+\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23}=\gamma_y+\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varkappa_{11}=\frac{\partial\gamma_x}{\partial x}, \quad \varkappa_{22}=\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}, \quad \varkappa_{12}=\frac{\partial\gamma_x}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_y}{\partial x}$$

$A_{\lambda\lambda}(x, y)$ — функции жесткости, определяемые следующим образом:

в случае нечетного числа слоев постоянной толщины, симметрично расположенных относительно срединной поверхности $z = 0$ ([2], с. 156)

$$(2) \qquad A_{\lambda\lambda}(x, y)=G_{\lambda 3}^{m+1}\int\limits_{-h_{m+1}}^{h_{m+1}} f(z)\,dz+2\sum_{s=1}^{m} G_{\lambda 3}^{s}\int\limits_{h_{s+1}}^{n_s} f(z)\,dz$$

в случае произвольного числа слоев постоянной толщины ([2], с. 163)

$$(3) \qquad A_{\lambda\lambda}(x, y)=\sum_{s=1}^{m+n} G_{\lambda 3}^{s}\int\limits_{\delta_{s-1}-\Delta}^{\delta_s-\Delta} f(z)\,dz$$

в случае слоев переменной толщины ([2], с. 206) — по формуле (3) при $\delta_s = \delta_s(x, y)$, $\Delta = 0$; $\lambda = 1, 2$.

Используются следующие обозначения: $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ — перемещения точек срединной поверхности вдоль линий x, y, z соответственно; $\gamma_x(x, y)$, $\gamma_y(x, y)$ — углы поворота нормали в плоскостях xz, yz соответственно, $k_x(x, y)$, $k_y(x, y)$ — кривизны срединной поверхности, $P_x(x, y)$, $P_y(x, y)$ — интенсивности продольных нагрузок, $q(x, y)$ — интенсивность поперечной нагрузки, T_1, T_2, S — тангенциальные усилия, M_{11}, M_{22}, M_{12} — изгибающие и крутящий моменты, Q_1, Q_2 — поперечные силы, ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} — деформации растяжения и сдвига срединной поверхности, ε_{13}, ε_{23} — деформации поперечного сдвига, $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{22}$, $\varkappa_{12}$ — деформации изгиба, $G_{ij}(x, y)$, $K_{ij}(x, y)$, $D_{ij}(x, y)$ — известные функции жесткости [2], $G_{13}(x, y)$, $G_{23}(x, y)$ — модули сдвига в плоскостях xz, yz соответственно, не зависящие от переменной z, $f(z)$ — функция распределения касательных напряжений по толщине оболочки [1], h_i, δ_i, Δ — постоянные в формулах (2), (3), характеризующие толщину и расположение каждого слоя в оболочке [2]. В силу своего определения функции C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}, A_{ij} удовлетворяют условиям

$$(4) \qquad 0<\alpha_1\leqslant C_{ij}\leqslant\beta_1,\ 0<\alpha_2\leqslant A_{ij}\leqslant\beta_2,\ 0<\alpha_3\leqslant K_{ij}\leqslant\beta_3,$$
$$0<\alpha_4\leqslant D_{ij}\leqslant\beta_4$$

Будем использовать следующие обозначения пространств Соболева:

$$W_2^m(\Omega)=\{u\mid D^\alpha u\in L_2(\Omega),\ \forall\alpha\mid\alpha\mid\leqslant m\},\ W_2^{\circ 1}(\Omega)=$$
$$=\{u\mid u\in W_2^1(\Omega),\ u=0 \text{ на } \partial\Omega\},\ H_1=[W_2^{\circ 1}]^5$$
$$H_2=[W_2^{\circ 1}]^2\times W_2^2\cap W_2^{\circ 1}\times[W_2^{\circ 1}]^2$$

$(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $W_2^{\circ}(\Omega)\equiv L_2(\Omega)$, $|\cdot|_M$ — норма в гильбертовом пространстве M, в частности $|\cdot|_{01}$ норма в $W_2^{\circ 1}(\Omega)$, $|\cdot|_m$ — норма в $W_2^m(\Omega)$. Нормы в H_1 и H_2 введем следующим образом:

$$|\cdot|_{H_1}^2=|\cdot|_{01}^2+|\cdot|_{01}^2+|\cdot|_{01}^2+|\cdot|_{01}^2+|\cdot|_{01}^2,$$
$$|\cdot|_{H_2}^2=|\cdot|_{01}^2+|\cdot|_{01}^2+|\cdot|_{2}^2+|\cdot|_{01}^2+|\cdot|_{01}^2$$

Назовем обобщенным решением задачи (1) вектор $\omega=(u, v, w, \gamma_x, \gamma_y)\in H_1$, удовлетворяющий интегральным тождествам

$$(5) \qquad (L_1(u), \varphi_1)\equiv\left(T_1, \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\left(S, \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)-(P_x, \varphi_1)=0$$

$$(L_2(v), \varphi_2)\equiv\left(T_2, \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)+\left(S, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)-(P_y, \varphi_2)=0$$

$$(L_3(w), \varphi_3)\equiv(T_1, -k_x\varphi_3)+(T_2, -k_y\varphi_3)+\left(A_{11}\left(\gamma_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)+$$
$$+\left(A_{22}\left(\gamma_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right), \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right)+\left(T_1, \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)+\left(T_2, \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(S, \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(S, \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)-(q, \varphi_3)=0$$

$$(L_4(\gamma_x), \varphi_4) \equiv \left(M_{11}, \frac{\partial\varphi_4}{\partial x}\right) + \left(M_{12}, \frac{\partial\varphi_4}{\partial y}\right) + \left(A_{11}\left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \varphi_4\right) = 0$$

$$(L_5(\gamma_y), \varphi_5) \equiv \left(M_{22}, \frac{\partial\varphi_5}{\partial y}\right) + \left(M_{12}, \frac{\partial\varphi_5}{\partial x}\right) + \left(A_{22}\left(\gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \varphi_5\right) = 0,$$

$$\forall\varphi \in H_1, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$$

Наряду с задачей (1) рассмотрим вспомогательную задачу

(6) $$L_1(u) = P_x,\ L_2(v) = P_y,\ L_3(w) + \varepsilon\Delta^2 w = q,\ L_4(\gamma_x) = 0,\ L_5(\gamma_y) = 0$$

$$u = v = w = \gamma_x = \gamma_y = 0, \quad \Delta w - \frac{1-\nu}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega$$

где $\partial/\partial n$ — производная по верхней нормали, ρ — радиус кривизны контура $\partial\Omega$, ν — положительная постоянная, Δ — оператор Лапласа.

Назовем обобщенным решением задачи (6) вектор $\omega_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon, \gamma_{x\varepsilon}, \gamma_{y\varepsilon})$, удовлетворяющий интегральному тождеству

(7) $$(L_1(u_\varepsilon), \psi_1) + (L_2(v_\varepsilon), \psi_2) + (L_3(w_\varepsilon), \psi_3) + (L_4(\gamma_{x\varepsilon}), \psi_4) + (L_5(\gamma_{y\varepsilon}), \psi_5) + \varepsilon\iint_\Omega \left(\Delta w_\varepsilon \Delta\psi_3 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}\right)\right) d\Omega = \iint_\Omega (P_x\psi_1 + P_y\psi_2 + q\chi_3)\, d\Omega,$$

$$\forall\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5) \in H_2$$

Теорема 1. Пусть

(8) $$k_x(x, y),\quad k_y(x, y),\quad P_x(x, y),\quad P_y(x, y),\quad q(x, y),\quad A_{ij}(x, y),$$
$$C_{ij}(x, y),\quad D_{ij}(x, y),\quad K_{ij}(x, y) \in L_2(\Omega)$$
$$\alpha_1 - \beta_3 > 0,\quad \alpha_4 - \beta_3 > 0,\quad \alpha_1/2 - 2\beta_3 > 0,\quad \alpha_4/2 - 2\beta_3 > 0$$

Тогда: 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует хотя бы один вектор $\omega_\varepsilon^\circ = (u_\varepsilon^\circ, v_\varepsilon^\circ, w_\varepsilon^\circ\ \gamma_{x\varepsilon}^\circ, \gamma_{y\varepsilon}^\circ)$, удовлетворяющий тождеству (7); 2) приближенное решение задачи (6) может быть найдено методом БГ в виде (суммирования по повторяющемуся индексу от 1 до n)

(9) $$u_\varepsilon^n = \sum a_i\chi_i,\quad v_\varepsilon^n = \sum b_j\chi_j,\quad w_\varepsilon^n = \sum c_k\chi_{1k},\quad \gamma_{x\varepsilon}^n = \sum d_l\chi_l,\quad \gamma_{y\varepsilon}^n = \sum e_p\chi_p$$

где $\{\chi_{1i}(x, y)\}$, $\{\chi_i(x, y)\}$ — базисные системы соответственно в $W_2^2(\Omega) \cap W_2^{\circ 1}(\Omega)$ и $W_2^{\circ 1}(\Omega)$. При этом $v_\varepsilon^n \to \overset{\circ}{u_\varepsilon}$, $v_\varepsilon^n \to \overset{\circ}{v_\varepsilon}$, $\gamma_{x\varepsilon}^n \to \overset{\circ}{\gamma}_{x\varepsilon}$, $\gamma_{y\varepsilon}^n \to \overset{\circ}{\gamma}_{y\varepsilon}$ слабо в $W_2^{\circ 1}(\Omega)$ $w_\varepsilon^n \to w_\varepsilon$ слабо в $W_2^2(\Omega) \cap W_2^{\circ 1}(\Omega)$ и сильно в $W_2^{\circ 1}(\Omega)$.

Доказательство. Для нахождения приближенного решения задачи (6) используем процедуру БГ, определяя коэффициенты в представлении (9) из следующей системы уравнений:

(10) $$(L_1(u_\varepsilon^n), \chi_i) + (L_2(v_\varepsilon^n), \chi_j) + (L_3(w_\varepsilon^n), \chi_{1k}) + (L_4(\gamma_{x\varepsilon}^n), \chi_l) + (L_5(\gamma_{y\varepsilon}^n), \chi_p) + \varepsilon\iint_\Omega \Delta w_\varepsilon^n \mu\chi_{1k} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w_\varepsilon^n}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\chi_{1k}}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_\varepsilon^n}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_\varepsilon^n}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_\varepsilon^n}{\partial y^2}\frac{\partial^2\chi_{1j}}{\partial x^2}\right)\Bigg) d\Omega = \iint_\Omega (P_x\chi_i + P_y\chi_j + q\chi_{1k})\, d\Omega,\quad i, j, k, l, p = 1, 2, \ldots, n$$

Разрешимость системы (10) следует из леммы «об остром угле» [8]. Действительно, введем, подобно [8], отображение $P(C) \equiv (L_1(C), L_2(C), L_3(C), L_4(C), L_5(C))$: $R \to R$, где $R = [C^n]^5$, C^n — банахово пространство непрерывных функций от n переменных. Непрерывность отображения $L_j(C)$ $(j = 1, 2, \ldots, 5)$ очевидна (непрерывность нелинейных членов следует из компактности вложения $W_4^1(\Omega)$ в $W_2^2(\Omega)$. Покажем, что имеет место условие «острого угла», для чего умножим каждое из уравнений системы (10) на соответствующий множитель a_i, b_j, c_k, d_l, e_p и просуммируем по i, j, k, l, p от 1 до n

(11) $$(P(C), C) \geqslant |\sqrt{C_{11}}\,\varepsilon_{11}^n|^2 + |\sqrt{C_{22}}\,\varepsilon_{22}^n|^2 + |\sqrt{C_{66}}\,\varepsilon_{12}^n|^2 + |\sqrt{D_{12}}\,\varkappa_{11}^n|^2 +$$

$$+|\sqrt{D_{22}}\varkappa_{22}{}^n|^2+|\sqrt{D_{66}}\varkappa_{12}{}^n|^2+\left|\sqrt{A_{11}}\left(\gamma_{x\varepsilon}^n+\frac{\partial w_\varepsilon{}^n}{\partial x}\right)\right|^2+$$
$$+\left|\sqrt{A_{22}}\left(\gamma_{y\varepsilon}^n+\frac{\partial w_\varepsilon{}^n}{\partial y}\right)\right|^2+2(C_{12}\varepsilon_{22}{}^n,\varepsilon_{11}{}^n)+2(D_{12}\varkappa_{22}{}^n,\varkappa_{11}{}^n)+$$
$$+2(K_{11}\varkappa_{11}{}^n,\varepsilon_{11}{}^n)+2(K_{12}\varkappa_{22}{}^n,\varepsilon_{11}{}^n)+2(K_{12}\varkappa_{11}{}^n,\varepsilon_{22}{}^n)+2(K_{22}\varkappa_{22}{}^n,\varepsilon_{22}{}^n)+$$
$$+2(K_{66}\varkappa_{12}{}^n,\varepsilon_{12}{}^n)+c|\sqrt{\varepsilon}w_\varepsilon{}^n|^2_{W_2{}^2(\Omega)}-((P_x,u_\varepsilon{}^n)+(P_y,v_\varepsilon{}^n)+$$
$$+(q,w_\varepsilon{}^n)),\quad c=\mathrm{const}>0$$

где $\varepsilon_{11}{}^n$, $\varepsilon_{22}{}^n$, $\varepsilon_{12}{}^n$, $\varkappa_{11}{}^n$, $\varkappa_{22}{}^n$, $\varkappa_{12}{}^n$ получаются из ε_{11}, ε_{22}, ε_{12}, $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{22}$, $\varkappa_{12}$ заменой вектора $\omega=(u,v,w,\gamma_x,\gamma_y)$ на вектор $\omega_\varepsilon{}^n=(u_\varepsilon{}^n,v_\varepsilon{}^n,w_\varepsilon{}^n,\gamma_{x\varepsilon}{}^n,\gamma_{y\varepsilon}{}^n)$.

Из определения коэффициентов C_{ij}, D_{ij} [2] с учетом условия (6) следует, что $C_{\lambda\lambda}-C_{12}\geqslant\alpha_1/2$, $D_{\lambda\lambda}-D_{12}\geqslant\alpha_4/2$ $(\lambda=1,2)$. Используя неравенство Коши с «ε» ([7], с. 33) и для последнего слагаемого в (11) неравенство Коши — Буняковского [7], имеем

$$(12)\qquad (P(C),C)\geqslant\left(\frac{\alpha_1}{2}-2\beta_3\right)(|\varepsilon_{11}{}^n|^2+|\varepsilon_{22}{}^n|^2)+(\alpha_1-\beta_3)|\varepsilon_{12}{}^n|^2+$$
$$+\left(\frac{\alpha_4}{2}-2\beta_3\right)(|\varkappa_{11}{}^n|^2+|\varkappa_{22}{}^n|^2)+(\alpha_4-\beta_3)|\varkappa_{12}{}^n|^2+$$
$$+\alpha_2\left(\left|\gamma_{x\varepsilon}^n+\frac{\partial w_\varepsilon{}^n}{\partial x}\right|^2+\left|\gamma_{y\varepsilon}^n+\frac{\partial w_\varepsilon{}^n}{\partial y}\right|^2\right)+c|\sqrt{\varepsilon}w_\varepsilon{}^n|^2_{W_2{}^2(\Omega)}-$$
$$-c_1(|P_x||u_\varepsilon{}^n|+|P_y||v_\varepsilon{}^n|+|q||w_\varepsilon{}^n|)$$

Таким образом, при достаточно большом $|C|$ (с учетом условия теоремы 1 выполняется условие острого угла: $(P(C),C)>0$, что позволяет утверждать разрешимость системы (10) и записать следующие априорные оценки для множества приближенных решений:

$$(13)\qquad |u_\varepsilon{}^n|_{01}\leqslant c^\circ,\quad |v_\varepsilon{}^n|_{01}\leqslant c^\circ,\quad |\sqrt{\varepsilon}w_\varepsilon{}^n|_2\leqslant c^\circ$$
$$|\gamma_{x\varepsilon}^n|_{01}\leqslant c^\circ,\quad |\gamma_{y\varepsilon}^n|_{01}\leqslant c^\circ,\quad c^\circ=\mathrm{const}>0$$

Используя оценки (13) и теоремы о компактности вложения $W_4{}^1(\Omega)$ в $W_2{}^2(\Omega)$, осуществляем известным образом [4, 5] предельный переход от n в (10). Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, в каком смысле решение задачи (6) аппроксимирует решение задачи (1).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при $\varepsilon\to0$ найдется подпоследовательность $\{u_\varepsilon,v_\varepsilon,w_\varepsilon,\gamma_{x\varepsilon},\gamma_{y\varepsilon}\}$, сходящаяся к решению $\omega^\circ=(u^\circ,v^\circ,w^\circ,\gamma_x{}^\circ,\gamma_y{}^\circ)$ задачи (1) в следующем смысле: $u_\varepsilon\to u^\circ$, $v_\varepsilon\to v^\circ$, $\gamma_{x\varepsilon}\to\gamma_x{}^\circ$, $\gamma_{y\varepsilon}\to\gamma_y{}^\circ$ слабо в $W_2^{\circ1}(\Omega)$, $w_\varepsilon\to w^\circ$ слабо в $W_2{}^2(\Omega)\cap W_2^{\circ1}(\Omega)$ и $w_\varepsilon\to w^\circ$ сильно в $W_2^{\circ1}(\Omega)$.

Доказательство. Заметим, что имеют место оценки приближенных решений задачи (6), получаемые из (13) путем предельного перехода по n. Наличие этих оценок позволяет выбрать некоторую подпоследовательность $\{\omega_\varepsilon\}=\{u_\varepsilon,v_\varepsilon,w_\varepsilon,\gamma_{x\varepsilon},\gamma_{y\varepsilon}\}$, слабо сходящуюся в H_2, что и обосновывает вместе с теоремами вложения Соболева возможность предельного перехода по $\varepsilon\to0$ в интегральном тождестве (7) и приводит к интегральному тождеству (5) после предварительного замыкания множества $\{\chi_1\}\in H_2$ в норме пространства H_1.

Замечания. 1°. В теореме 1 условие (8) будет всегда выполнено для слоев постоянной толщины как для симметричного расположения слоев, так и для произвольного при надлежащем выборе расположения координатной поверхности [2], а в случае слоев переменной толщины условие (8) выполняется, в частности, при симметрично расположении слоев относительно координатной поверхности $z=0$.

2°. В качестве вспомогательной задачи (6) можно рассмотреть задачу, у которой вместо бигармонического оператора стоит произвольный положительно-определенный оператор T с естественными краевыми условиями, энергетическое пространство которого компактно вложено в $W_2{}^2(\Omega)\cap W_2^{\circ1}(\Omega)$. Отметим, что произвол в выборе оператора T позволяет, в известном смысле, «конструировать» свойства итоговой алгебраической системы в методе БГ с целью увеличения вычислительной эффективности используемого алгоритма.

Введение вспомогательной задачи (6) позволяет получить сильную сходимость некоторой последовательности приближенных решений w_ε^n к точному решению w°, что важно с точки зрения практической реализации алгоритма. Подобный результат можно получить и для других искомых функций u, v, γ_x, γ_y, если дополнить выражения $L_1(u)$, $L_2(v)$, $L_4(\gamma_x)$, $L_5(\gamma_y)$ в системе (6) членами вида $\varepsilon_1 T_1 u$, $\varepsilon_2 T_2 v$, $\varepsilon_3 T_3 \gamma_x$, $\varepsilon_4 T_4 \gamma_y$ соответственно, где $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, T_i — положительно-определенные операторы с естественными краевыми условиями, энергетическое пространство которых компактно вложено в $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Очевидно, выбирая должным образом операторы T, T_i, можно добиться практически любой сходимости подпоследовательности приближенных решений к точному не накладывая дополнительных ограничений на исходные данные задачи (1).

3°. Доказательство, аналогичное приведенному, справедливо и для других краевых условий (например, когда тип краевого условия меняется вдоль контура [9]), естественно, при соответствующем перенесении краевых условий для модели типа Тимошенко.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
3. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек.— Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2, с. 203—206.
4. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 4, с. 449—474.
5. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
8. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения.— В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 9. М.: ВИНИТИ, 1976, с. 3—130.
9. *Ворович И. И., Лебедев А. П.* О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 4, с. 691—704.

Саратов

Поступила в редакцию 9.IV.1984

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 24.05.85 Подписано к печати 12.07.85 Т-14831 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Усл. кр.-отт. 37,1 Уч.-изд. л. 17,9 Бум. л. 6,0
Тираж 2188 экз. Зак. 1432

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 6