зать прямым методом Ляпунова, для чего следует лишь видоизменить функционал $H(W, W^{\cdot})$.

На фиг. 4 показана граница 1, 2, 3 области устойчивости на плоскости масса — скорость при значениях параметра $h = 0{,}1$; $0{,}5$; $0{,}9$. Область устойчивости располагается левее кривой $M(v)$. имеющей асимптотами прямую $v = 1$ и ось Ov. При малых значениях массы система устойчива в широком интервале скоростей $[0, v_*)$. С увеличением M область устойчивости сужается, при этом $v_* \to 1$.

На фиг. 5 приведена форма колебаний балки при значении параметра $M = M_*$, т. е. на границе области устойчивости. Кривым *1 — 4* соответствуют значения $\omega t = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$. Возбуждается волна, близ массы M, перемещающаяся противоположно движению массы. Относительно балки направления движения массы и волны совпадают.

Отметим, что рассматриваемая система может служить моделью трубы с потоком жидкости, имеющей в некотором месте массовое утолщение, в случае, когда отношение погонных масс трубы и жидкости мало. Если это отношение не мало, то необходимо в уравнение (1) ввести дополнительные члены [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гапонов-Грехов А. В., Долина И. С., Островский Л. А.* Аномальный эффект Доплера и радиационная неустойчивость движения осцилляторов в гидродинамике.— Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 4, с. 827—831.
2. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. т. X. М.: Наука, 1979. 527 с.
3. *Болотин В. В.* Конечные деформации гибких трубопроводов.— Тр. МЭИ, 1956, вып. 19, с. 272—291.
4. *Roth W.* Instabilität durchströmter Rohre.— Ing.-Arch., 1964, B. 33, H. 4, S. 236—263.
5. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат. 1953. 680 с.
7. *Fryba L.* Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Groningen: Noordhoff Internat. Publ., 1972. 484 p.
8. *Stadler W., Shreeves R. W.* The transient and steady-state response of the infinite Bernoulli — Euler beam with damping and elastic foundation.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1970, v. 23, pt 2, p. 197—208.
9. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949. 141 с.
10. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
11. *Мовчан А. А.* О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систе ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 483—493.

Горький

Поступила в редакцию 9.II.1984

УДК 539.3 : 534.1

ОСРЕДНЕННОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Беляев А. Ю.

Рассматривается задача Коши для волнового уравнения с коэффициентами, случайно зависящими от пространственной координаты. В предположении, что флуктуации коэффициентов малы и радиус корреляций мал, выводится уравнение, описывающее эволюцию математического ожидания решения. Осредненное уравнение, в отличие от исходного, оказывается необратимым по времени и имеет вид одномерного уравнения движения вязкоупругого материала. Коэффициент эффективной вязкости получается пропорциональным интенсивности флуктуаций случайных характеристик неоднородной среды.

Многие задачи о распространении упругих, электромагнитных и других волн в неоднородной среде сводятся к решению уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \tag{1}$$

с начальными данными при $t=0$. Если функции $\rho(x)$ и $a(x)$, характеризующие свойства среды, быстро осциллируют, то возникает проблема осредненного описания процесса распространения волн. В случайно-неоднородных сплошных средах из-за некогерентного рассеяния волн на неоднородностях среды проявляется эффект затухания решений, что приводит к необратимости осредненных уравнений.

Необратимые осредненные уравнения полуэмпирическим методом выводились [1] для двумерной сплошной среды, представляющей собой однородный упругий материал с малой концентрацией случайно расположенных включений. Для случая, когда флуктуации характеристик среды малы, выводились [2] уравнения, описывающие эволюцию математического ожидания решения уравнения (1), методом разложения по соответствующему малому параметру. Однако, как показано ниже, для уравнений, полученных в этой работе, задача Коши с начальными данными некорректна.

В предлагаемой работе уравнение для определения осредненного решения исходной задачи (1) строится вариационным методом. Оно имеет вид одномерного уравнения движения однородного вязкоупругого материала, и задача Коши для него корректна. При вариационном подходе автоматически решается вопрос о начальных данных, которых в [2] не обсуждался.

Пусть начальные данные для уравнения (1) имеют вид

$$u(0,x)=f(x),\quad u_t(0,x)=g(x) \tag{2}$$

Уравнение (1) можно получить из вариационного принципа [3, 4]

$$\delta H(u)=0 \tag{3}$$

где функционал $H(u)$ определен на множестве функций $u(t,x)$, удовлетворяющих первому условию (2), следующим образом:

$$H(u)=\frac{1}{2}\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}dx\,[\rho(x)\,u_t(t,x)\,u_t(T-t,x)+ \\ +a(x)\,u_x(T-t,x)\,u_x(t,x)]-\int_{-\infty}^{\infty}dx g(x)\,\rho(x)\,u(T,x) \tag{4}$$

Индексами t и x у функции u обозначены частные производные по t и x.

Из вариационного принципа (3) следует уравнение (1) и второе начальное условие (2).

Если функции $\rho(x)$ и $a(x)$ случайны, то решение уравнения (1) с начальными условиями (2) будет также случайной функцией. Обозначим ее математическое ожидание $M[u(t,x)]$ через $v(t,x)$.

Чтобы записать уравнения для нахождения $v(t,x)$, будем пользоваться методом, предложенным в [5]. Состоит он в следующем. На множестве случайных функций $u(t,x)$, удовлетворяющих первому условию (2), рассмотрим функционал $I(u)=M[H(u)]$. Условия стационарности этого функционала совпадают с исходным уравнением (1) и вторым начальным условием (2). Варьировать функционал $I(u)$ будем в два этапа. Сначала найдем его стационарную точку при ограничении

$$M[u(t,x])=v(t,x) \tag{5}$$

где $v(t,x)$ — неслучайная функция, удовлетворяющая условию

$$v(0,x)=f(x) \tag{6}$$

Значение функционала $I(u)$ в стационарной точке будет функционалом, зависящим от v. Обозначим его $I_0(v)$. Искомое уравнение для нахождения $v(t,x)$ получается из вариационного принципа $\delta I_0(v)=0$.

Вариация функционала $I(u)$ имеет вид

$$\delta I(u)=M\left\{\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}dx\delta u(T-t,x)\left[\rho(x)\,u_{tt}(t,x)-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\,u_x(t,x))\right]+\int_{-\infty}^{\infty}dx\rho(x)\,[u_t(0,x)-g(x)]\,\delta u(T,x)\right\}$$

Вариации δu в силу первого условия (2) обращаются в нуль при $t = 0$ и в силу ограничения (5) обладают нулевым математическим ожиданием, а в остальном произвольны.

Необходимые условия стационарности функционала $I(u)$ имеют вид

$$\rho(x)\, u_{tt} - (a(x)\, u_x)_x = h(x), \quad \rho(x)\,[u_t(0, x) - g(x)] = p(x) \tag{7}$$

где $h(t, x)$ и $p(x)$ — неслучайные функции, являющиеся множителями Лагранжа при ограничении (5). Решив эти уравнения относительно $u(t, x)$ и подставив найденное значение в функционал $I(u)$, получим функционал $I_0(v)$.

Сделаем следующее предположение относительно функций $\rho(x)$ и $a(x)$. Пусть их значения мало отличаются от математических ожиданий, которые предполагаются не зависящими от x и обозначаются ρ_0 и a_0 соответственно. Отклонение функций $\rho(x)$ и $a(x)$ от ρ_0 и a_0 обозначим через $\rho_1(x)$ и $a_1(x)$, а максимальное отклонение — через δ.

Уравнения (7) будем решать разложением неизвестных функций $u(t, x)$, $h(t, x)$, $p(x)$ в степенной ряд по параметру δ. Выражение для функционала $I_0(v)$, вычисленного с точностью до членов порядка δ^2 включительно, можно привести к виду

$$\begin{aligned} I_0(v) = M\Big\{\frac{1}{2}\int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [\rho_0 v_t(T-t, x)\, v_t(t, x) + a_0 v_x(T-t, x)\, v_x(t, x) + \\ + \rho_1(x)\, v_t(t, x)\, u_{1t}(T-t, x) + a_1(x)\, v_x(t, x)\, u_{1x}(T-t, x)] - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\rho_0 g(x)\, v(T, x) + \frac{1}{2}\rho_1(x)\, g(x)\, u_1(T, x)\right]\Big\} \end{aligned} \tag{8}$$

где функция $u_1(t, x)$ выражается через $v(t, x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1(t, x) = \frac{c}{2a_0}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} dy\, [(a_1(y)\, v_x(\tau, y))_y - \rho_1(y)\, v_{tt}(\tau, y)] - \\ - \frac{c}{2a_0}\int_{x-ct}^{x+ct} dy\, \rho_1(x)\,[v_t(0, y) - g(y)], \quad c = \left(\frac{a_0}{\rho_0}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Дальнейшие упрощения выражения (8) связаны с предположениями, что $a_1(x)$ и $\rho_1(x)$ — однородные, изотропные случайные функции с радиусом корреляций, много меньшим характерного масштаба изменения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Введем обозначения

$$\varepsilon_\rho = \rho_0^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} M[\rho_1(x)\, \rho_1(x+y)]\, dy, \quad \varepsilon_a = a_0^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} M[a_1(x)\, a_1(x+y)]\, dy$$

Числа ε_ρ и ε_a в силу однородности случайных функций $\rho_1(x)$ и $a_1(x)$ не зависят от x. Можно показать, что они неотрицательны и пропорциональны радиусам корреляций этих функций. Будем интересоваться асимптотикой $v(t, x)$ при ε_a, ε_ρ, стремящихся к нулю.

Если в функционале (8) оставить главные члены и члены первого порядка по параметрам ε_a, ε_ρ, считая функцию $v(t, x)$ не зависящей от ε_a, ε_ρ, то он примет вид

$$\begin{aligned} I_0(v) = \frac{1}{2}\int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [\rho_0 v_t(T-t, x)\, v_t(t, x) + \\ + \bar{a} v_x(T-t, x)\, v_x(t, x) - (2c)^{-1}\rho_0\varepsilon_\rho v_t(T-t, x)\, v_{tt}(t, x) + \\ + (2c)^{-1} a_0\varepsilon_a v_x(T-t, x)\, v_{xt}(t, x)] - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \{\rho_0 g(x)\, v(T, x) + \\ + (4c)^{-1}\rho_0\varepsilon_\rho\,[v_t(T, x)\, v_t(0, x) - 2v_t(T, x)\, g(x) + g^2(x)] + \\ + (4c)^{-1} a_0\varepsilon_a f_{xx}(x)\, v(T, x)\}, \quad \bar{a} = a_0 - a_0^{-1} M[a_1^2(x)] \end{aligned}$$

Варьируя это выражение по $v(t, x)$ при ограничении (6) и приравнивая вариацию нулю, получим уравнение

$$\rho_0 v_{tt} - \bar{a} v_{xx} - (2c)^{-1}\rho_0\varepsilon_\rho v_{ttt} - (2c)^{-1} a_0\varepsilon_a v_{xxt} = 0 \tag{9}$$

и некоторые начальные условия для него. К такому виду можно привести систему уравнений, полученных в [2]. Однако можно показать, что для полученного уравнения задача Коши некорректна, если $\varepsilon_\rho \neq 0$. Это следует из того, что существуют экспоненциально растущие со временем решения уравнения (9) вида $e^{i(kx+\omega t)}$ с вещественным k.

Причина неправильного ответа заключается в том, что в функционале $I_0(v)$ стремящиеся к нулю параметры стоят при членах со старшими производными. Это приводит к наличию пограничных слоев у функции $v(t, x)$ по t и, в краевых задачах, по x. Уравнение (9) при этом может быть асимптотически правильным в том смысле, что искомая функция $v(t, x)$ вне пограничного слоя удовлетворяет ему с точностью до членов порядка $o(\varepsilon_a + \varepsilon_\rho)$. Однако использовать его для нахождения функции v невозможно.

В подобных ситуациях асимптотический анализ не сводится к разложению функционала в степенной ряд по малым параметрам. Применим вариационно-асимптотической метод [6].

На первом шаге оставим в функционале (8) главные по параметрам ε_a, ε_ρ члены. Варьируя такой функционал при ограничении (6), получим уравнение и начальное условие

(10) $$\rho_0 v_{tt} = \bar{a} v_{xx}, \quad v_t(0, x) = g(x)$$

Решение этого уравнения обозначим через $v_0(t, x)$. Далее искомое решение представим в виде

$$v(t, x) = v_0(t, x) + v_1(t, x)$$

В силу ограничения (6) функция $v_1(t, x)$ должна обращаться в нуль при $t = 0$. Считая v_1 в асимптотическом смысле меньше v_0, оставим в функционале (8) главные члены по v_1 и главные перекрестные члены между v_0 и v_1. Получим функционал $I_1(v_1)$, который с учетом уравнения (10) можно представить в виде

$$I_1(v_1) = \frac{1}{2}\int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\rho_0 v_{1t}(T-t, x)\, v_{1t}(t, x) + \bar{a} v_{1x}(T-t, x)\, v_{1x}(t, x) - \right.$$
$$\left. - \frac{\rho_0\varepsilon_\rho}{c} v_{1t}(T-t, x)\, v_{0tt}(t, x) + \frac{a_0\varepsilon_a}{c} v_{1x}(T-t, x)\, v_{0xt}(t, x)\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{a_0\varepsilon_a}{c} f_{xx}(x)\, v_1(T, x)$$

Приравняв вариацию функционала $I_1(v_1)$ нулю, получим уравнение и начальное условие для определения $v_1(t, x)$

(11) $$\rho_0 v_{1tt} - \bar{a} v_{1xx} = (2c)^{-1}(\rho_0\varepsilon_\rho v_{0ttt} + a_0\varepsilon_a v_{0xxt})$$
$$v_{1t}(0, x) = {}^1/_2 c\,(\varepsilon_\rho + \varepsilon_a) f_{xx}(x)$$

Сюда следует добавить начальное условие $v_1(0, x) = 0$, которое является следствием ограничения (6). Совместно с определением функции $v_0(t, x)$ (10) уравнение (11) дает решение поставленной задачи. Заметим, что при использованном подходе не возникает некорректно поставленных задач.

В рамках рассматриваемой точности соотношения (10) и (11) можно объединить в одно уравнение относительно искомой функции $v(x, t)$

$$\rho_0 v_{tt} - \bar{a} v_{xx} - (2c)^{-1} a_0(\varepsilon_\rho + \varepsilon_a)\, v_{xxt} = 0, \quad v(0, x) = f(x),$$
$$v_t(0, x) = g(x) + {}^1/_2 c\,(\varepsilon_a + \varepsilon_\rho) f_{xx}(x)$$

Оно имеет вид уравнения движения одномерной вязкоупругой среды. Его решение с выписанными начальными условиями дает асимптотически точное значение осредненного решения исходного уравнения (1) при $t \gg c^{-1}(\varepsilon_a + \varepsilon_\rho)$.

При значениях времени t, близких к нулю, осредненное решение, как указывалось имеет характер пограничного слоя и для его нахождения следует пользоваться более сложными уравнениями, получающимися при варьировании функционала (8). Этим объясняется наличие последнего слагаемого во втором начальном условии, которое в точной постановке отсутствует вследствие соотношения (2) и определения осредненного решения. Это слагаемое описывает влияние временного погранслоя на поведение решения при конечных значениях времени.

Автор благодарит В. Л. Бердичевского за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кристенсен Р. М.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
2. *McCoy J. J.* Pressure signals in random lineary elastic rods.— Internat. J. Solids and Structures, 1972, v. 8, No. 7, p. 877—894.
3. *Gurtin M. E.* Variational principles for linear initial-value problems.— Quart. Appl. Math., 1964, v. 22, No. 3, p. 252—256.
4. *Tonti E.* On the variational formulation for linear initial-value problems.— Ann. mat. pura ed appl., 1973, ser. 4, v. 95, p. 331—359.
5. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы в проблеме осреднения случайных структур.— Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 2, с. 301—304.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.1984

УДК 539.3

МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ГИБКИХ ПОЛОГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Кириченко В. Ф., Крысько В. А., Сурова Н. С.

Доказывается существование решений сильно нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающей в рамках кинематической модели Тимошенко [1], принимаемой для всего пакета в целом [2], поведение гибкой многослойной оболочки, каждый слой которой изготовлен из неоднородного ортотропного материала. Для получения приближенного решения поставленной задачи предлагается и обосновывается процедура применения метода Бубнова — Галеркина (БГ), в основе которой лежит построение некоторой вспомогательной квазилинейной системы уравнений. Подобный подход позволяет распространить методику [3—6] исследования сходимости метода БГ на сильно нелинейные системы уравнений эллиптического типа и добиться сходимости последовательности приближенных решений к точному в пространствах любой наперед заданной гладкости, не накладывая дополнительных ограничений на исходные данные задачи.

Исходная задача формулируется следующим образом: в области $\Omega \subset E_2$ (E_2 — евклидово пространство, (x, y) — точка в E_2) с границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условиям, гарантирующим применение теорем вложения Соболева [7], найти решение системы дифференциальных уравнений с краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & L_1(u) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}(T_1) - \frac{\partial}{\partial y}(S) - P_x = 0\\
& L_2(v) \equiv -\frac{\partial}{\partial y}(T_2) - \frac{\partial}{\partial x}(S) - P_y = 0\\
& L_3(w) \equiv -k_xT_1 - k_yT_2 - \frac{\partial}{\partial x}(Q_1) - \frac{\partial}{\partial y}(Q_2) - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_1\frac{\partial w}{\partial x}\right) -\\
& -\frac{\partial}{\partial y}\left(T_2\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(S\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial w}{\partial y}\right) - q = 0\\
& L_4(\gamma_x) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}(M_{11}) - \frac{\partial}{\partial y}(M_{12}) + Q_1 = 0\\
& L_5(\gamma_y) \equiv -\frac{\partial}{\partial y}(M_{22}) - \frac{\partial}{\partial x}(M_{12}) + Q_2 = 0\\
& u = v = w = \gamma_x = \gamma_y = 0 \text{ на } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
& T_\lambda = C_{1\lambda}\varepsilon_{11} + C_{\lambda 2}\varepsilon_{22} + K_{1\lambda}\varkappa_{11} + K_{\lambda 2}\varkappa_{22}, \quad S = C_{66}\varepsilon_{12} + K_{66}\varkappa_{12}\\
& M_{\lambda 1} = K_{1\lambda}\varepsilon_{11} + K_{\lambda 2}\varepsilon_{22} + D_{1\lambda}\varkappa_{11} + D_{\lambda 2}\varkappa_{22}, \quad M_{12} = K_{66}\varepsilon_{12} + D_{66}\varkappa_{12}\\
& Q_\lambda = A_{\lambda\lambda}\varepsilon_{\lambda 3}; \quad \lambda = 1, 2\\
& \varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - k_xw + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - k_yw + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}
$$