

ЛИТЕРАТУРА

1. Мироненко Е. В., Пачепский Я. А. Водная миграция ионов и химических соединений в почвах. Линейные модели.— В кн.: Материалы по математическому обеспечению ЭВМ. «Экомодель». Вып. 3. Пущино: ОНТИ НЦБИ, 1980. 64 с.
2. Веригин Н. Н., Васильев С. В., Куранов Н. П., Саркисян В. С., Шутьгин Д. Ф. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. М.: Колос, 1979. 334 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.III.1984

УДК 539.3 : 534.1

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ БЕЗГРАНИЧНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Денисов Г. Г., Кугушева Е. К., Новиков В. В.

Рассматривается упругая подпружиненная балка, вдоль которой перемещается точечная масса, показаны особенности поведения таких систем. Исследуется устойчивость системы точечная масса — балка. Определяется скорость, превышение которой приводит к неустойчивости балки, и находится зависимость ее от параметров системы.

Движение неоднородности в среде сопровождается волнообразованием. Волновую картину можно разделить на стационарную часть, имеющую вид «замороженных» волн в системе координат, связанной с телом, и на волны нестационарные, возникающие при переходных процессах или порожденные неустойчивостью рассматриваемой системы. Примеры изученных стационарных волн весьма многочисленны и имеются в разных областях науки. Изучению нестационарных волн, по которым, в частности, можно судить об устойчивости или неустойчивости системы тело — среда, посвящено значительно меньше работ. Некоторые принципиальные вопросы, связанные с взаимодействием тела и движущейся относительно него среды, решены в [1].

При исследовании устойчивости линейных однородных безграничных систем обычно исходят из дисперсионного уравнения — соотношения, связывающего частоту волны и волновой вектор, имеющий вещественные компоненты [2]. Появление неоднородности в системе не позволяет ограничиться рассмотрением дисперсионного уравнения. Одна из отличительных особенностей этих задач состоит в негладкости решения или какой-либо его производной в точке нахождения неоднородности, и решение следует искать в классе функций, исчезающих на бесконечности (компоненты волнового вектора — комплексные величины). При этом может возникнуть необходимость усложнения модели исследуемой системы, например введением сил трения.

Ниже на примере упругой подпружиненной балки иллюстрируются некоторые аспекты поведения безграничной среды, взаимодействующей с движущимся телом. Одномерные безграничные упругие системы изучались рядом авторов. Наиболее интересными представляются работы [3, 4], где, в частности, была обнаружена неустойчивость, обусловленная относительным движением распределенных масс трубопровода и текущей внутри него жидкости. В связи со сказанным можно ожидать появления неустойчивости и при движении вдоль упругой системы (балки) дискретной массы. Естественно предположить, что растущее возмущение должно группироваться близ места нахождения тела, при колебаниях которого балка получает энергию, и экспоненциально (так как система линейна) исчезать на бесконечности.

Рассматривается следующая модель: точечная масса m движется вдоль бесконечной балки, покоящейся на упруговязком основании. Движение массы складывается из движения с постоянной скоростью v вдоль Ox и безотрывного перемещения вместе с балкой по Oy (фиг. 1). Поведение балки изучается относительно системы координат $O\xi y$, движущейся вдоль Ox со скоростью v , т. е. $\xi = x - vt$. Уравнение изгиба балки и условия сопряжения решения в месте нахождения точечной массы после перехода к безразмерным переменным и параметрам имеют следующий вид:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \xi} + v^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + h \left(\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial \xi} v \right) + \frac{1}{4} W = 0.$$

$$(2) \quad W_+(0, t) = W_-(0, t)$$

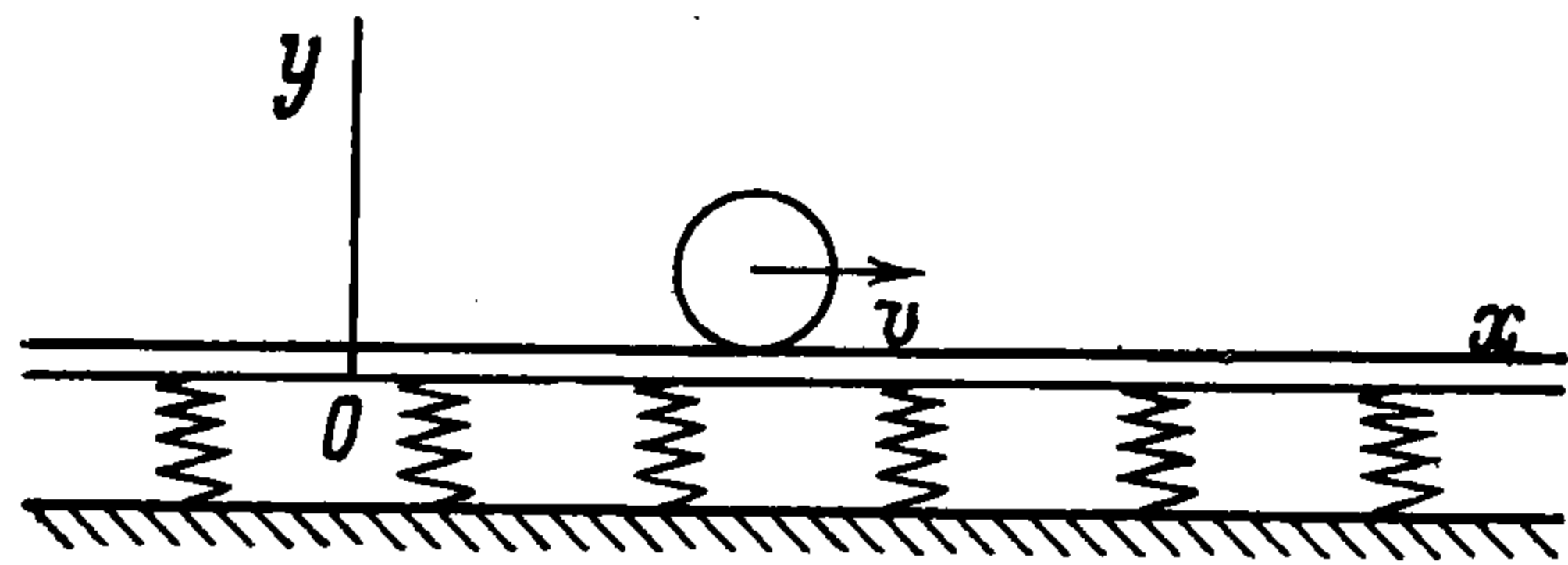
$$\frac{\partial W_+(0, t)}{\partial \xi} = \frac{\partial W_-(0, t)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 W_+(0, t)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 W_-(0, t)}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^3 W_-(0, t)}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^3 W_+(0, t)}{\partial \xi^3} = P + M \frac{\partial^2 W(0, t)}{\partial t^2}$$

$$(h = \eta (4d\rho)^{-1/2} \quad P = mg (4dEI)^{-1/2}, \quad M = \frac{m}{\rho} \left(\frac{4d}{EI} \right)^{1/4})$$

Кроме того, решение задачи должно удовлетворять условию ограниченности при $x \in (-\infty, \infty)$.

Здесь масштабами времени и длины служат соответственно $(\rho/(4d))^{1/2}$ и $(EI/(4d))^{1/4}$, EI — изгибная жесткость, ρ — погонная масса балки; параметр η характеризует



Фиг. 1

трение в упругом основании, а d — его упругие свойства; g — ускорение свободного падения, $W_+(\xi, t)$ и $W_-(\xi, t)$ — соответственно прогиб балки справа и слева от движущейся массы.

Решение задачи (1), (2) представляет собой суперпозицию стационарного $W_0(\xi)$ и нестационарного изгиба, который в дальнейшем обозначаем как $W(\xi, t)$. Стационарный профиль балки

дается выражением

$$(3) \quad W_{0\pm}(\xi) = e^{\mp a\xi} (A_{10}^{\pm} \cos b_{\pm} \xi + A_{20}^{\pm} \sin b_{\pm} \xi)$$

$$A_{10}^+ = A_{10}^- = 4 \frac{aP}{A_0}, \quad A_0 = 8a^2 [2a^2 + (b_+ + b_-)^2] + (b_+^2 - b_-^2)^2$$

$$A_{20}^+ = -P \frac{4a^2 - b_+^2 + b_-^2}{b_+ A_0}, \quad A_{20}^- = P \frac{4a^2 + b_+^2 - b_-^2}{b_- A_0}$$

Величины a , b_{\pm} определяются из уравнения

$$(4) \quad \lambda^4 + v^2 \lambda^2 - hv\lambda + 1/4 = 0$$

корни которого имеют вид $\lambda_{1,2} = -a \pm ib_+$, $\lambda_{3,4} = a \pm ib_-$.

$$\text{При } h = 0 \text{ имеем } a = \left(\frac{1 - v^2}{4} \right)^{1/2}, \quad b_+ = b_- = \left(\frac{1 + v^2}{4} \right)^{1/2}.$$

В случае $v < 1$ профиль балки определяется соотношениями (3). При $v \rightarrow 1$ (скорость приближается к критическому значению, принятому здесь в качестве масштаба скорости $v_k = (4dEI\rho^{-2})^{1/4}$ [5]) прогиб балки неограниченно возрастает. Для $v > 1$ задача не имеет решений, обращающихся в нуль на бесконечности.

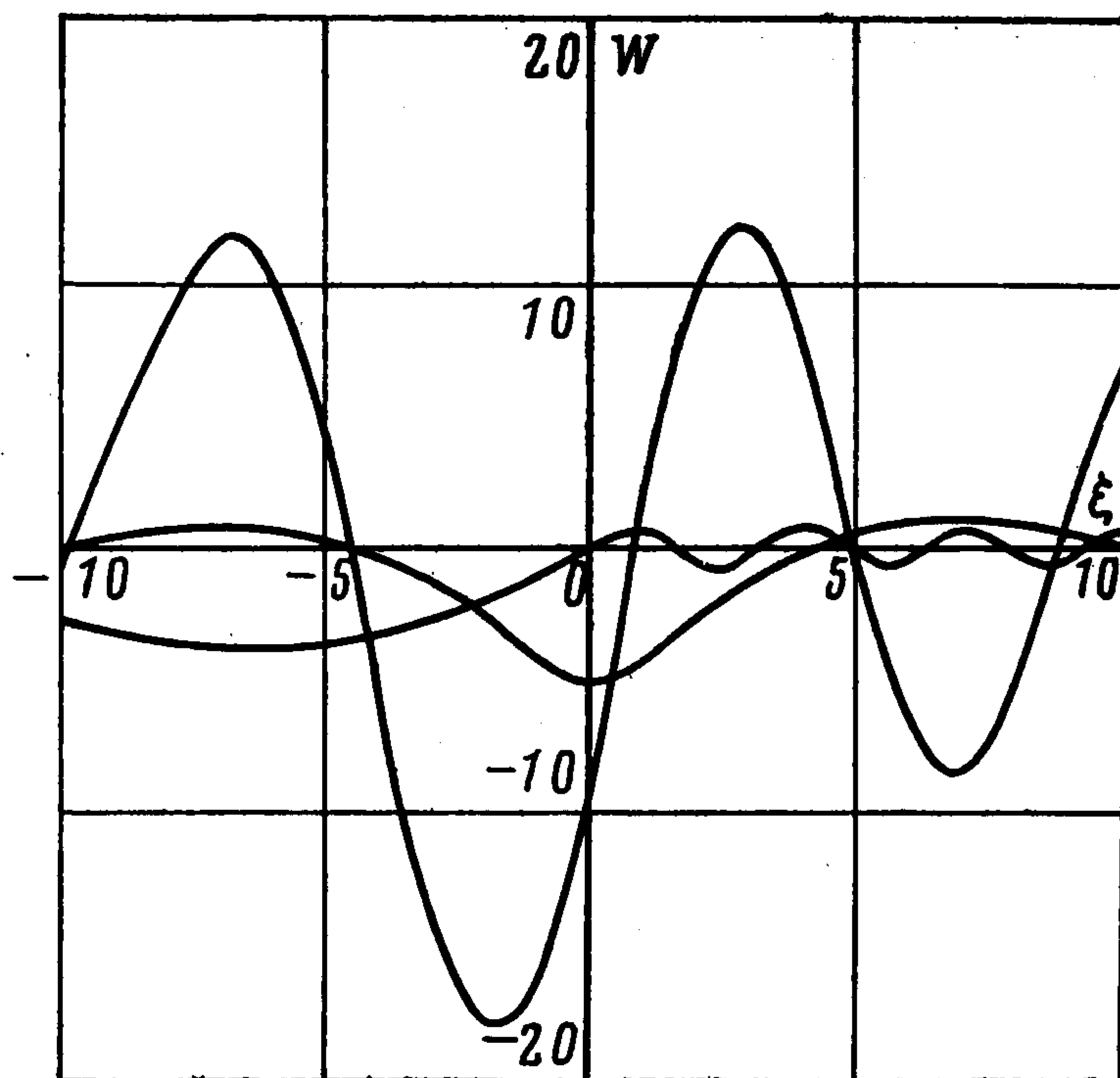
Как $W_{0+}(\xi)$, так и $W_{0-}(\xi)$ представляют собой сумму четырех синусоидальных функций. Для нахождения всех постоянных, входящих в W_{0+} и W_{0-} , условий сшивки решений в точке $\xi = 0$ недостаточно, т. е. стационарный прогиб не определен однозначно. Для однозначности решения требуется внести изменения в постановку задачи. Можно, в частности, сформулировать некоторые дополнительные условия для $W_0(\xi)$. В данном случае уместно воспользоваться принципом предельного поглощения [6]. Для этого вводится в рассмотрение трение (демпфирование в основании). Оно выделяет в решении затухающие и нарастающие на бесконечности составляющие, последние из которых исключаются. Можно получить единственное решение и для консервативного случая предельным переходом $h \rightarrow 0$.

На фиг. 2 показан стационарный профиль балки при разных значениях v . Обращает на себя внимание резкая смена (при малом h) симметричной картины стационарного прогиба при $v < 1$ на несимметричную при $v > 1$. При расчетах принято $h = 0,05$. Отметим, что сходные графики содержатся в работе [7]. Стационарный профиль при более сложном нагружении получен в [8], однако устойчивость балки ни в этих работах, ни в других, известных авторам, не обсуждалась. Таким образом, вопрос о реализации найденных стационарных решений остается открытым.

Обратимся к нестационарному решению задачи (1), (2). Оно ищется в виде $W(\xi, t) = e^{pt + \lambda \xi}$. Подставив $W(\xi, t)$ в уравнение (1), имеем

$$(5) \quad \lambda^4 + (p - v\lambda)^2 + h(p - v\lambda) + 1/4 = 0$$

В общем случае среди четырех комплексных корней λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) имеется, по крайней мере, один корень с положительной и один с отрицательной действительной частью, так как сумма корней равна нулю ввиду отсутствия в (5) члена с λ^3 .



Фиг. 2

Возможны три различных варианта расположения корней на комплексной плоскости относительно мнимой оси: один — с одной, три корня — с другой ее стороны и по два корня в каждой полуплоскости.

Остановимся на последнем случае и будем для определенности считать, что вещественные части корней λ_1 и λ_2 отрицательны, а корней λ_3 и λ_4 — положительны. Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию обращения в нуль на бесконечности, принимает вид

$$W_+(\xi, t) = e^{pt} (A_1 e^{\lambda_1 \xi} + A_2 e^{\lambda_2 \xi}); \quad W_-(\xi, t) = e^{pt} (B_1 e^{\lambda_3 \xi} + B_2 e^{\lambda_4 \xi})$$

В силу линейности системы нагрузка P не входит ни в уравнения движения, ни в условия сопряжения нестационарных решений. Влияние нагрузки на нестационарные движения проявляется здесь через массу $M \neq 0$. При $M = 0$ уравнения в отклонениях не имеют особенности при $\xi = 0$, и поэтому упругая балка устойчива как не нагруженная диссипативная система.

Условия сшивки (2) приводят к однородной системе алгебраических уравнений относительно величин A_1, A_2, B_1, B_2 . Приравнивание нулю определителя этой системы дает уравнение «частот»

$$\frac{2p^2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} \{M - \Lambda\} = 0$$

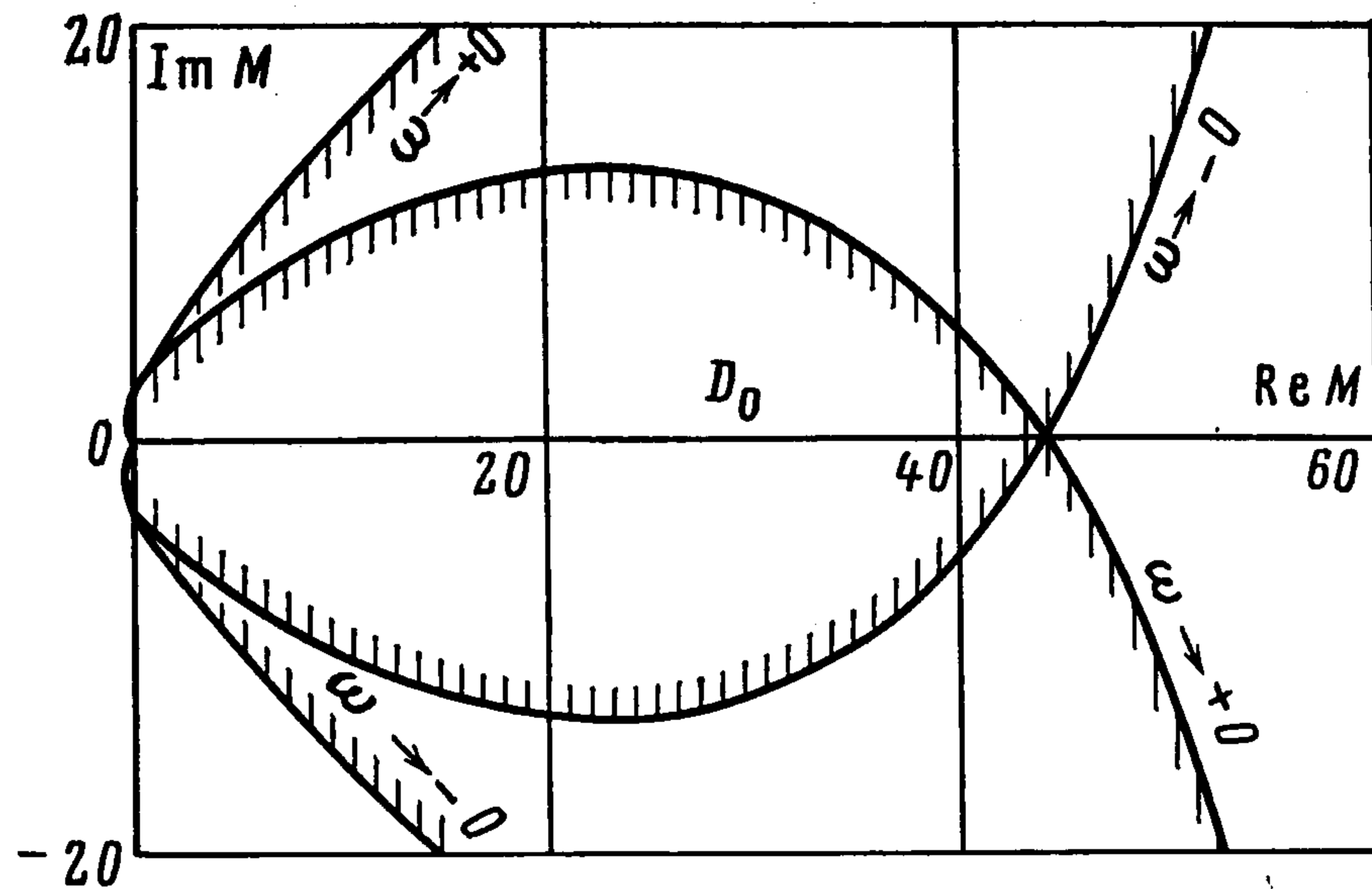
$$\Lambda = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{2p^2 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

При $M \neq 0$ спектр собственных частот системы смешанный, причем точечные частоты находятся из условия

$$(6) \quad M = \Lambda$$

определяющего устойчивость системы. Решая при этом условие уравнение (5) при конкретных значениях входящих в него параметров, имеем возможность определить устойчивость стационарного профиля балки относительно возмущений движущейся массой, по знаку вещественной части корней p . Однако такой подход представляется громоздким и малоэффективным.

В данном случае удобен метод D -разбиений [9, 10]. Отвлекаясь на время от физического существа задачи, будем считать M комплексным параметром и отобразим на комплексную плоскость M прямую $p = i\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$: при некотором значении $\omega = \omega_0$ решается уравнение (5), найденные λ_j после сортировки по знаку вещественной части подставляются в условие (6) и затем вычисляется $M(\omega_0)$. Здесь, как и при определении однозначности стационарного решения, необходим учет пусть сколь угодно малого трения ($h \neq 0$), так как лишь при его наличии корни λ_j при $p = i\omega$ обрета-



Фиг. 3

ют реальные части и становится возможной сортировка корней. В результате вычислений при различных $\omega \in (-\infty, \infty)$ получим кривую $M(\omega)$ (границу D -разбиения), разделяющую комплексную плоскость M на области с различным числом характеристических показателей p с положительной вещественной частью. При вещественных положительных значениях M , принадлежащих области, в которой все $\text{Re } p < 0$, система устойчива, неустойчивость имеет место, если значение M взято из области, где хоть одно из $\text{Re } p > 0$. Из соотношений (5) и (6) следует, что граница D -разбиения симметрична относительно оси $\text{Re } M$.

В зависимости от значения параметра v возможны следующие случаи (фиг. 3):
 $v < 1$; кривая $M(\omega)$ не имеет пересечения с осью $\text{Re } M$;

$v > 1$; кривая $M(\omega)$ имеет пересечение с осью $\text{Re } M$ лишь в одной точке $M_*(v)$. С уменьшением v точка M_* сдвигается вправо по оси $\text{Re } M$ и $M_* \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow 1$. Увеличение второго параметра задачи h приводит также к увеличению M_* без качественного изменения в поведении кривой $M(\omega)$.

В проведенном рассмотрении предполагалось определенное расположение корней уравнения (5) на комплексной плоскости: по два корня с каждой стороны от мнимой оси. В тех случаях, когда реализуется другое возможное расположение корней, уравнение (6) видоизменяется и принимает форму

$$(7) \quad M = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4) p^{-2} \quad \text{при } \text{Re } \lambda_1 < 0; \text{Re } \lambda_2, \text{Re } \lambda_3, \text{Re } \lambda_4 > 0$$

$$M = -(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4) p^{-2} \quad \text{при } \text{Re } \lambda_4 > 0; \text{Re } \lambda_1, \text{Re } \lambda_2, \text{Re } \lambda_3 < 0$$

В программе расчета на ЭВМ границы D -разбиения учтены все возможности расположения корней λ_j , поэтому обсуждавшиеся результаты имеют общий характер.

Воспользовавшись правилом штриховки границы D -разбиения (штриховкой помечена сторона границы, обращенная к области с большим числом корней с $\text{Re } p < 0$), заключаем, что в области D_0 (фиг. 3) число корней с положительной действительной частью наименьшее, т. е. интервал значений $\text{Re } M [0, M_*)$, возможно, принадлежит области устойчивости системы.

Покажем, что стационарный профиль балки устойчив при достаточно малых значениях массы M , а следовательно, D_0 — область устойчивости системы.

Для этого используем уравнения движения и условия сшивки в системе координат, связанной с балкой

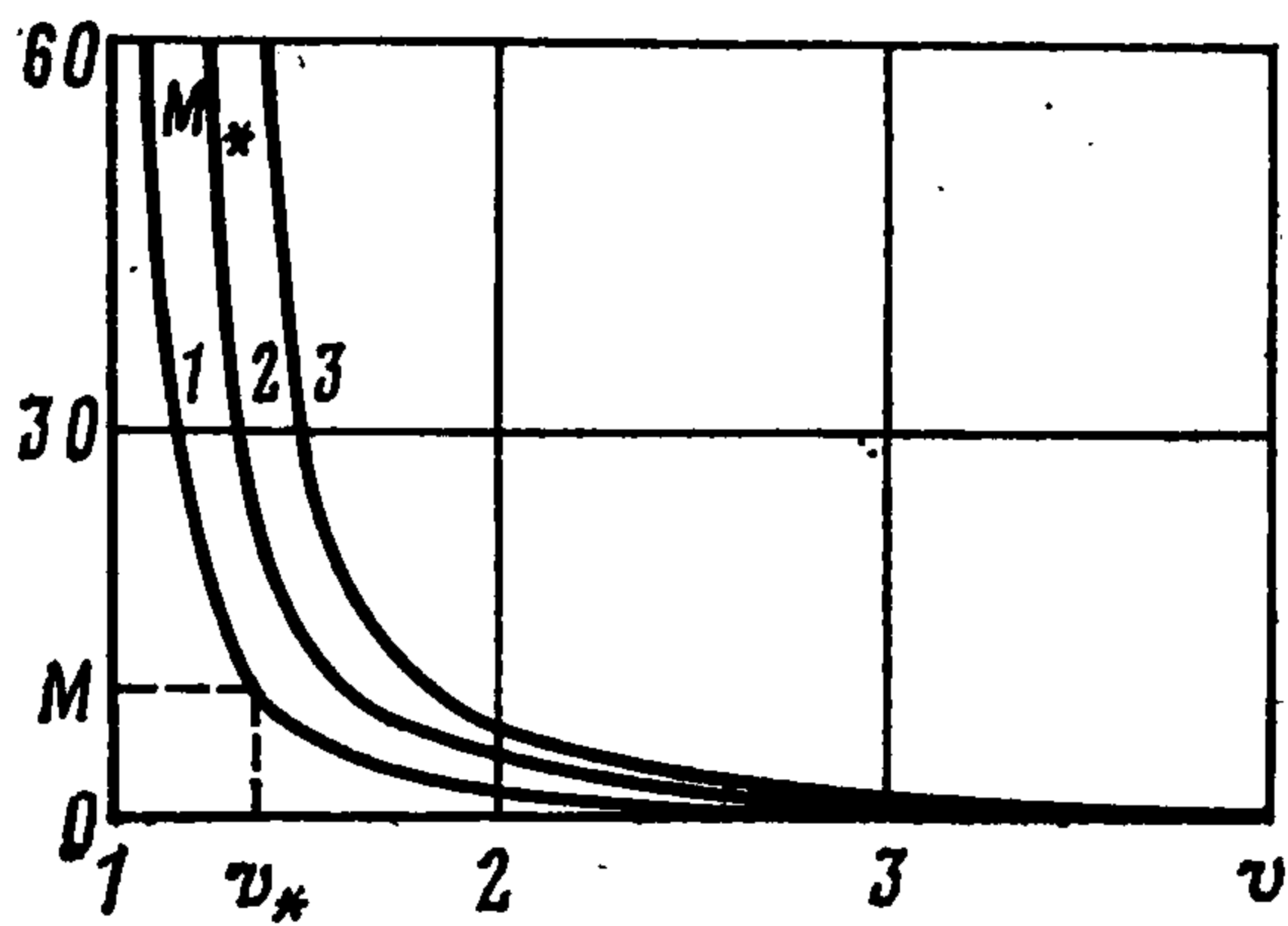
$$(8) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + h \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{4} W = 0$$

в точке $x = vt$

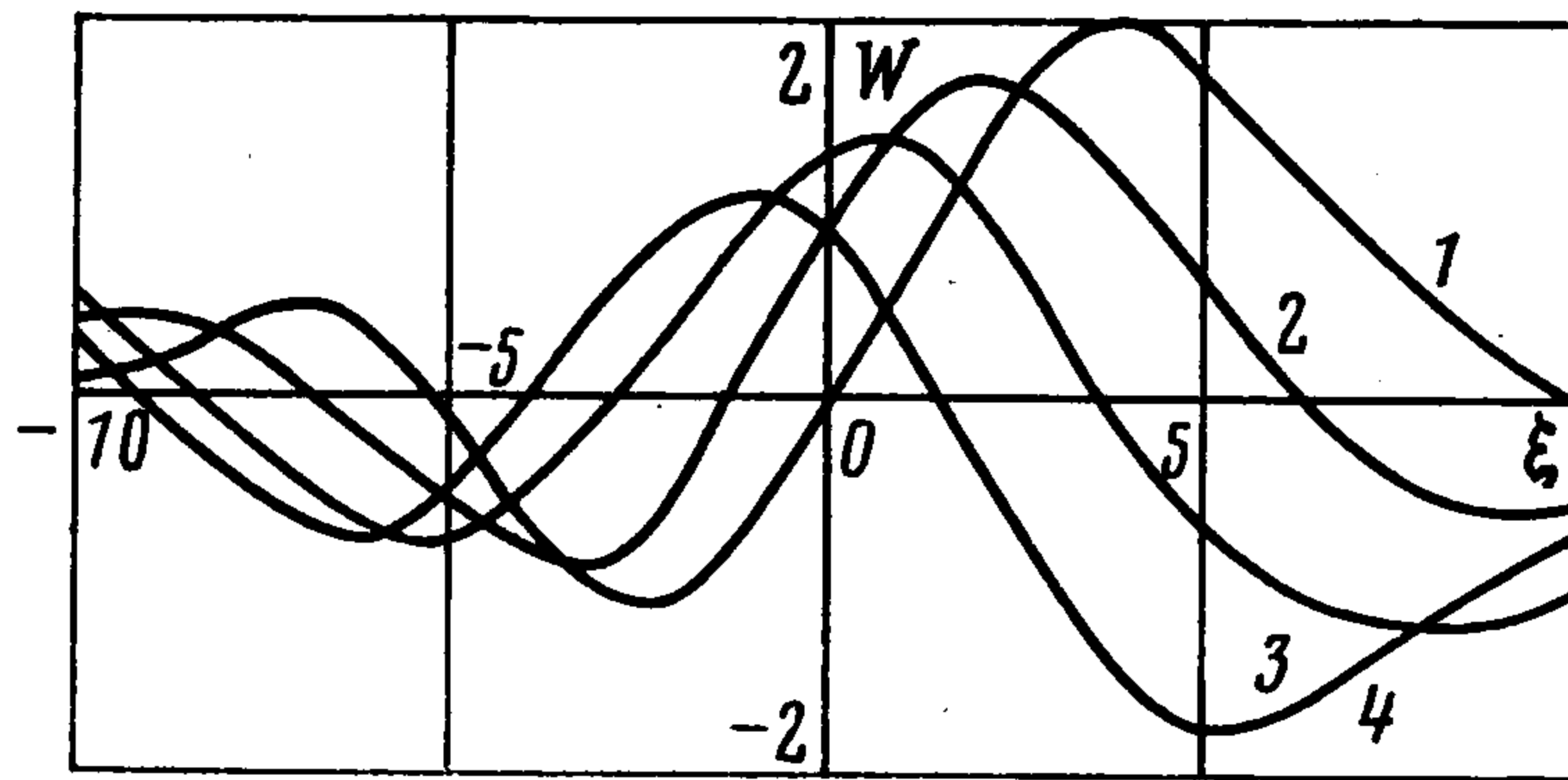
$$(9) \quad W_+(x = vt, t) = W_-(x = vt, t)$$

$$\frac{\partial W_+}{\partial x} = \frac{\partial W_-}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 W_+}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W_-}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 W_-}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 W_+}{\partial x^3} = M \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Считаем, что функция $W(x, t)$ непрерывна по совокупности x, t вместе со своими первыми и вторыми производными. Решение задачи должно быть затухающим на бесконечности, поэтому в дальнейшем исходим из того, что $W(x, t)$ убывает при $x \rightarrow \pm\infty$ не медленнее, чем $\exp(-\alpha|x|)$ (α — положительное число).

При исследовании устойчивости в качестве меры возмущения примем функционал (штрих означает дифференцирование по переменной x , точка — по t , черта — комплексное сопряжение)

$$s(W, W') = \int_{-\infty}^{\infty} [W''\bar{W}'' + W\bar{W} + W'\bar{W}'] dx + \sup_x W\bar{W}'$$

и рассмотрим определенно-положительный функционал

$$H(W, W') = \int_{-\infty}^{\infty} \left[W''\bar{W}'' + \frac{1}{4} W\bar{W} + W'\bar{W}' \right] dx + MW\bar{W}'|_{x=vt},$$

допускающий бесконечно малый высший предел. Последнее следует из соотношения (M — некоторое положительное число)

$$H(W, W') < \max\{M, 1\} s(W, W')$$

При некотором фиксированном значении параметра h существует конечная окрестность точки $M = 0$, в которой функционал $H(W, W')$ в силу уравнения (8) и условий в точке $x = vt$ (9) убывает со временем. Действительно, условие

$$H' = -2h \int_{-\infty}^{\infty} W'\bar{W}' dx - vM \{W'(2\bar{W}'' + v\bar{W}') + \bar{W}'(2W'' + vW')\}|_{x=vt} < 0$$

заведомо выполняется при выполнении неравенства

$$(10) \quad 2h \int_{-\infty}^{\infty} W'\bar{W}' dx > vM \max\{|W'W''|, v|W'W''|\}|_{x=vt}$$

Интеграл в левой части неравенства положителен и в силу экспоненциального спада функции $W(x, t)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ ограничен. Выражения в фигурных скобках конечны, поскольку входящие в них функции ограничены при $x \in (-\infty, \infty)$.

Поскольку условия теоремы прямого метода Ляпунова об устойчивости [11] выполнены, заключаем, что исследуемая система устойчива при достаточно малых значениях параметра M . Этот факт в совокупности с D -разбиением комплексной плоскости M приводит к окончательному результату: D_0 — область устойчивости, следовательно, «стационарный» профиль балки устойчив при значении M (имеется в виду физический параметр) из интервала $[0, M_*)$. Условия устойчивости (10) легко поддаются физической трактовке: слева стоит член, уменьшающий энергию системы за счет рассеяния в упруговязком основании, а справа — член, приводящий к ее росту, обусловленному колебаниями массы M . С увеличением h и уменьшением M и v устойчивость системы повышается.

Заметим, что неоднородность в безграничной системе может быть обусловлена не только точечной массой, но и другими факторами (например, точечной упругой силой). Но не всякая неоднородность при движении вдоль балки может возбудить волны с нарастающей во времени амплитудой. В частности, в случае точечной упругой силы такое возбуждение волн не наблюдается ни при каких значениях v . Это можно пока-

зять прямым методом Ляпунова, для чего следует лишь видоизменить функционал $H(W, W')$.

На фиг. 4 показана граница 1, 2, 3 области устойчивости на плоскости масса — скорость при значениях параметра $h = 0,1; 0,5; 0,9$. Область устойчивости располагается левее кривой $M(v)$, имеющей асимптотами прямую $v = 1$ и ось Ov . При малых значениях массы система устойчива в широком интервале скоростей $[0, v_*)$. С увеличением M область устойчивости сужается, при этом $v_* \rightarrow 1$.

На фиг. 5 приведена форма колебаний балки при значении параметра $M = M_*$, т. е. на границе области устойчивости. Кривым 1 — 4 соответствуют значения $\omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$. Возбуждается волна, близ массы M , перемещающаяся противоположно движению массы. Относительно балки направления движения массы и волны совпадают.

Отметим, что рассматриваемая система может служить моделью трубы с потоком жидкости, имеющей в некотором месте массовое утолщение, в случае, когда отношение погонных масс трубы и жидкости мало. Если это отношение не мало, то необходимо в уравнение (1) ввести дополнительные члены [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В., Долина И. С., Островский Л. А. Аномальный эффект Доплера и радиационная неустойчивость движения осцилляторов в гидродинамике. — Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 4, с. 827—831.
2. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. т. X. М.: Наука, 1979. 527 с.
3. Болотин В. В. Конечные деформации гибких трубопроводов. — Тр. МЭИ, 1956, вып. 19, с. 272—291.
4. Roth W. Instabilität durchströmter Rohre. — Ing.-Arch., 1964, В. 33, Н. 4, S. 236—263.
5. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат. 1953. 680 с.
7. Fryba L. Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Groningen: Noordhoff Internat. Publ., 1972. 484 p.
8. Stadler W., Shreeves R. W. The transient and steady-state response of the infinite Bernoulli — Euler beam with damping and elastic foundation. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1970, v. 23, pt 2, p. 197—208.
9. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949. 141 с.
10. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
11. Мовчан А. А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 483—493.

Горький

Поступила в редакцию
9.II.1984

УДК 539.3 : 534.1

ОСРЕДНЕННОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Беляев А. Ю.

Рассматривается задача Коши для волнового уравнения с коэффициентами, случайно зависящими от пространственной координаты. В предположении, что флуктуации коэффициентов малы и радиус корреляций мал, выводится уравнение, описывающее эволюцию математического ожидания решения. Осредненное уравнение, в отличие от исходного, оказывается необратимым по времени и имеет вид одномерного уравнения движения вязкоупругого материала. Коэффициент эффективной вязкости получается пропорциональным интенсивности флуктуаций случайных характеристик неоднородной среды.

Многие задачи о распространении упругих, электромагнитных и других волн в: