2 *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость.— Итоги науки и техники. Серия «Механика жидкости и газа». М.: ВИНИТИ, 1978, т. 11, с. 66—154.
4. *Акопян Р. С., Зельдович Б. Я.* Переориентация директора жидкого кристалла светом вблизи порога пространственно-периодической конвективной неустойчивости.— ЖЭТФ, 1984, т. 86, вып. 2, с. 533—545.
5. *Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я., Мамаев А. В., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В.* Исследование плотности дислокации волнового фронта световых полей со спекл-структурой.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, вып. 5 (11), с. 1702—1710.

Москва

Поступила в редакцию
22.III.1984

УДК 532.685

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА В ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА И ПОГЛОЩЕНИЯ ВЕЩЕСТВА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Тихонов Н. А.

Рассматриваются вопросы оптимизации режима подачи вещества на поверхность пористой среды в случае, когда это вещество переносится проходящим сквозь среду потоком и частично поглощается в ней. Такая задача возникает, например, при подаче удобрений на поверхность почвы или подаче химических компонентов на границу среды, в которой протекает реакция с поглощением.

Для определенности рассмотрим задачу о переносе питательных веществ в почве. Их перенос определяется движением влаги. В слое почвы $0 \leqslant z \leqslant l$ динамика влажности описывается задачей

$$u_t + q_z = -F(z, t); \quad q\,|_{z=0} = q_0(t), \; R(q, u)\,|_{z=l} = 0, \; u\,|_{t=0} = \varphi(z) \tag{1}$$

Здесь t — время, z — вертикальная координата ($z = 0$ на поверхности среды), u — плотность влаги, q — ее поток, $q_0(t)$ — заданная функция, определяемая осадками, поливами и испарением с поверхности почвы, R — оператор, описывающий граничные условия при $z = l$, $F(z, t)$ — мощность потребления влаги корнями растений.

Пусть на поверхности почвы при $t > 0$ находится слой вещества A в кристаллическом виде. Концентрацию растворенного вещества в воде, прошедшей сквозь этот слой, обозначим $\chi(t)$. В линейном приближении

$$\chi H(q_0) = \beta(c_0 - \chi); \qquad H(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

где $\beta(t)$ — коэффициент обмена между твердой и жидкой фазами A, зависящий от количества находящегося на поверхности вещества в кристаллическом виде, $C_0 = \mathrm{const}$ — насыщенная концентрация A.

Динамика переносимых влагой веществ описывается задачей

$$\begin{gathered} L(c, u) = 0; \; \chi(t) H(q_0(t)) = R_1(c, q_0)\,|_{z=0} \\ R_2(c, q)\,|_{z=l} = 0, \quad c\,|_{t=0} = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

где c — концентрация рассматриваемого вещества в почве, L — дифференциальный оператор, описывающий перенос, диффузию и сорбцию вещества A в зависимости от потока q и плотности влаги u; R_1 и R_2 определяют граничные условия. Например, $R_1(c, q) = qc - a(q)c_z$, $R_2(c, q) = c_z$, где $a(q)$ — коэффициент диффузии.

При невысокой точности опытных данных, вызванной пространственной неоднородностью почв, достаточно обычно рассматривать линейные относительно c модели [1]. Будем считать L, R_1 и R_2 линейными по c, а также, что решение задачи (1), (3) существует, единственно, неотрицательно при любом $\chi \geqslant 0$ и интеграл $\int\limits_0^l c(z, t)\,dz$

ограничен, если ограничено количество вошедшего в среду с поверхности вещества

$$\int_0^t \chi H(q_0)\,d\tau$$

Соотношения (1)—(3) образуют модель процесса.

Пусть на поверхность может наноситься слой кристаллического вещества A различной плотности и тем самым $\beta(t)$ меняется в некоторых пределах: $0 \leqslant \beta(t) \leqslant \beta_m = \mathrm{const}$. Пусть растения потребляют вещество вместе с водой и функция F ограничена. Тогда полезное потребление вещества за время T составляет

$$Q = \int_0^T dt \int_0^l F(z, t)\, c(z, t)\, dt$$

За это же время расход вещества на поверхности составит

$$P = \int_0^T \chi(t)\, H(q(t))\, dt$$

Поставим следующую задачу оптимизации. Требуется определить управляющую функцию $\beta(t)$, меняющуюся в указанных пределах, при которой потребление Q равно заданному значению Q_0, а расход P минимален. При этом будем считать, что заданная величина Q_0 удовлетворяет неравенству $0 < Q_0 < Q_m$, где Q_m — значение Q при $\beta = \beta_m$.

Обозначим $G(z, t, \tau)$ решение задачи (1), (3) при граничном условии $R_1(c, t) = \delta(t - \tau)$. Задача (3) линейна по c, поэтому при произвольном χ имеем

$$c(z, t) = \int_0^t \chi(\tau)\, H(q_0(\tau))\, G(z, t, \tau)\, d\tau$$

Подставляя это соотношение в выражение для Q и меняя порядок интегрирования, получаем

$$Q = \int_0^T \chi(\tau)\, H(q_0(\tau))\, B(\tau)\, d\tau; \qquad B(\tau) = \int_0^l dz \int_0^T F(z, t)\, G(z, t, \tau)\, dt \tag{4}$$

По условию

$$0 \leqslant F < \infty, \qquad G \geqslant 0, \qquad \int_0^l G\, dz < \infty$$

Поэтому $0 \leqslant B < \infty$. Рассмотрим функционал

$$I = P\lambda - Q = \int_0^T \chi(\tau)\, H(q_0(\tau))\, [\lambda - B(\tau)]\, d\tau \tag{5}$$

где λ — произвольное фиксированное число. При заданном значении Q минимум P и I достигается на одних и тех же кривых. Обозначим T_0 множество тех t, при которых $q_0(t) = 0$; $T^+(\lambda)$ — множество t, для которых $q_0(t) > 0$ и $B(t) > \lambda$; $T^-(\lambda)$ — множество t, для которых $q_0(t) > 0$ и $B(t) < \lambda$.

Значение χ на множестве T_0 не влияет на величину (4) и (5). При $q_0 > 0$ из (2) имеем: $\chi = \beta c_0 (\beta + q_0)^{-1}$ — монотонно возрастающая функция β. Очевидно, что при любом λ значение (5) будет минимальным, если $\chi = 0$ на $T^-(\lambda)$ и $\chi = \chi_m(t) = c_0\beta_m(\beta_m + q_0(t))^{-1}$ при $t \in T^+(\lambda)$. Соответственно выбираем $\beta = 0$ на множестве $T^-(\lambda)$ и $\beta = \beta_m$ на $T^+(\lambda)$. При этом $Q = f(\lambda) = \int\limits_{T^+(\lambda)} \chi_m q_0 B\, d\tau$.

С ростом λ множество $T^+(\lambda)$ не увеличивается, а следовательно, $f(\lambda)$ является монотонно невозрастающей функцией. При этом $f(\lambda)$, вообще говоря, не будет непрерывной функцией. При $\lambda > 0$ значение $T^-(\lambda) = 0$ и $f(\lambda) = \int_0^T \chi_m q_0 B\, d\tau > Q_0$

по условию. Вследствие ограниченности B при $\lambda \to \infty$ множество $T^+(\lambda) = 0$ и $f(\lambda) = 0 < Q_0$. Следовательно, найдется такое λ_0, что либо $f(\lambda_0) = Q_0$, либо $f(\lambda_0) > Q_0$, $f(\lambda_0 + 0) < Q_0$, в точке λ_0 функция $f(\lambda)$ имеет разрыв, а $B(t) = \lambda_0$ на конечном множестве $T_{\lambda_0} = T^+(\lambda_0) - T^+(\lambda_0 + 0)$. В первом случае для $\beta(t) = \beta_m$ при $t \in T^+(\lambda_0)$ и $\beta_{(t)} = 0$ при $t \in T^-(\lambda_0)$ выполнено условие $Q = Q_0$ и достигается сильный минимум функционала (4) в классе допустимых изменений β. Второй случай отличается тем, что на множестве T_{λ_0} функция β должна удовлетворять соотношению

$$\int\limits_{T_{\lambda_0}} \frac{\beta c_0 q_0}{\beta + q_0} d\tau = Q_0 - \int\limits_{T^+(\lambda_0+0)} \frac{\beta_m c_0 q_0}{\beta_m + q_0} d\tau \tag{6}$$

В результате имеет место следующая

Теорема. Существует решение поставленной задачи оптимизации — функция $\beta(t)$ из допустимого класса, доставляющая минимум функционалу P при фиксированном $Q = Q_0$. Эта функция определяется следующим образом: $\beta(t) = \beta_m$ при $t \in T^+(\lambda_0) = \{t : q_0(t) > 0, B(t) < \lambda_0\}$; $\beta(t) = 0$ при $t \in T^-(\lambda_0) = \{t : q_0(t) > 0, B(t) > \lambda_0\}$; $\beta(t)$ произвольна при $t \in T_0 = \{t : q_0(t) = 0\}$; $\beta(t)$ удовлетворяет соотношению (6), а в остальном произвольна при $t \in T_{\lambda_0} = \{t : q_0(t) > 0, B(t) = \lambda_0\}$; λ_0 — такое число (оно существует и единственно), что

$$\int\limits_{T^+(\lambda_0)} \frac{\beta_m c_0 q_0}{q_0 + \beta_m} d\tau \leqslant Q_0 \leqslant \int\limits_{T^+(\lambda_0) + T_{\lambda_0}} \frac{\beta_m c_0 q_0}{\beta_m + q_0} d\tau$$

Решение поставленной задачи единственно на множестве

$$\{t : q_0(t) > 0,\ B(t) \neq \lambda_0\}$$

Для нахождения множества $T^+(\lambda)$ необходимо определить функцию $B(\tau)$. В общем случае это можно сделать численно. Однако часто, при значительном разбросе результатов наблюдений, вызванном пространственной неоднородностью среды, согласованными по точности с данными опытов являются относительно простые модели. Для них можно получить аналитическое решение.

Рассмотрим следующий пример. Будем описывать динамику усредненных за несколько дней значений потоков влаги и солей. Пусть $q = b(u - u_0)$, где b и u_0 — постоянные, причем $q_0(t)$ превосходит суммарное потребление влаги корнями, т. е. $q > 0$ всюду. В соответствии с [2] полагаем $L(c, u) = mc_t + qc_z - ac_{zz}$, где $a = a_0 q$ — коэффициент диффузии вещества A, a_0 и m — постоянные, $R_1 = qc - ac_z$. Рассматривая для простоты задачу на участке $0 < z < \infty$, $t > -\infty$, получаем

$$\begin{aligned} & bq_t + q_z = -F(z, t), \quad q|_{z=0} = q_0(t) \\ & mc_t + qc_z = a_0 q c_{zz}, \quad c|_{t<0} = \chi|_{t<0} = 0 \\ & (c - a_0 c_z)|_{z=0} = \chi(t) = \frac{\beta(t) c_0}{\beta(t) + q_0(t)} \end{aligned} \tag{7}$$

Решаем задачу для q. Вводим функцию

$$v(z, t, \tau) = \int\limits_\tau^t q(z, \theta)\, d\theta = \int\limits_\tau^t \left[q_0(\theta - bz) - \int\limits_0^z F(x, \theta - bx)\, dx \right] d\theta \tag{8}$$

Рассматриваем v и z как новые переменные, а τ — как параметр. Тогда уравнение для c в (7) преобразуется в уравнение с постоянными коэффициентами. В данном случае $G(z, t, \tau) = K(z, v(z, t, \tau))$, где $K(z, x)$ удовлетворяет соотношениям

$$mK_x + K_z = a_0 K_{zz}; \quad x > -\infty, \quad 0 < z < \infty$$
$$K|_{x<0} = 0, \quad (K - a_0 K_z)|_{z=0} = \delta(x)$$

Решая эту задачу, находим G, после чего для B имеем

$$B(\tau) = \int\limits_0^\infty dz \int\limits_\tau^T F(z, t) \left[\frac{\exp(-\xi^2)}{\sqrt{\pi a_0 m v}} - \frac{\exp(z/a_0)\,\mathrm{erfc}(\xi)}{2a_0 m} \right] dt, \quad \xi = \frac{zm + v}{a_0 m v} \tag{9}$$

Итак, зависимость $B(\tau)$, определяемая видом функций F, $q(u)$ и видом операторов L, R, R_1, R_2, в рассматриваемом примере находится в аналитическом виде. Для расчета оптимального режима подачи вещества нужно иметь конкретные выражения для функций $q_0(t)$ и $F(z, t)$. Зная q_0 и F, из (8) находим v, затем из (9) — B. Далее, согласно рассмотренному выше, определяем λ_0 и оптимальный режим $\beta(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко Е. В., Пачепский Я. А.* Водная миграция ионов и химических соединений в почвах. Линейные модели.— В кн.: Материалы по математическому обеспечению ЭВМ. «Экомодель». Вып. 3. Пущино: ОНТИ НЦБИ, 1980. 64 с.
2. *Веригин Н. Н., Васильев С. В., Куранов Н. П., Саркисян В. С., Шульгин Д. Ф.* Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. М.: Колос, 1979. 334 с.

Москва Поступила в редакцию 22.III.1984

УДК 539.3 : 534.1

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ БЕЗГРАНИЧНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Денисов Г. Г., Кугушева Е. К., Новиков В. В.

Рассматривается упругая подпружиненная балка, вдоль которой перемещается точечная масса, показаны особенности поведения таких систем. Исследуется устойчивость системы точечная масса — балка. Определяется скорость, превышение которой приводит к неустойчивости балки, и находится зависимость ее от параметров системы.

Движение неоднородности в среде сопровождается волнообразованием. Волновую картину можно разделить на стационарную часть, имеющую вид «замороженных» волн в системе координат, связанной с телом, и на волны нестационарные, возникающие при переходных процессах или порожденные неустойчивостью рассматриваемой системы. Примеры изученных стационарных волн весьма многочисленны и имеются в разных областях науки. Изучению нестационарных волн, по которым, в частности, можно судить об устойчивости или неустойчивости системы тело — среда, посвящено значительно меньше работ. Некоторые принципиальные вопросы, связанные с взаимодействием тела и движущейся относительно него среды, решены в [1].

При исследовании устойчивости линейных однородных безграничных систем обычно исходят из дисперсионного уравнения — соотношения, связывающего частоту волны и волновой вектор, имеющий вещественные компоненты [2]. Появление неоднородности в системе не позволяет ограничиться рассмотрением дисперсионного уравнения. Одна из отличительных особенностей этих задач состоит в негладкости решения или какой-либо его производной в точке нахождения неоднородности, и решение следует искать в классе функций, исчезающих на бесконечности (компоненты волнового вектора — комплексные величины). При этом может возникнуть необходимость усложнения модели исследуемой системы, например введением сил трения.

Ниже на примере упругой подпружиненной балки иллюстрируются некоторые аспекты поведения безграничной среды, взаимодействующей с движущимся телом. Одномерные безграничные упругие системы изучались рядом авторов. Наиболее интересными представляются работы [3, 4], где, в частности, была обнаружена неустойчивость, обусловленная относительным движением распределенных масс трубопровода и текущей внутри него жидкости. В связи со сказанным можно ожидать появления неустойчивости и при движении вдоль упругой системы (балки) дискретной массы. Естественно предположить, что растущее возмущение должно группироваться близ места нахождения тела, при колебаниях которого балка получает энергию, и экспоненциально (так как система линейна) исчезать на бесконечности.

Рассматривается следующая модель: точечная масса m движется вдоль бесконечной балки, покоящейся на упруговязком основании. Движение массы складывается из движения с постоянной скоростью v вдоль Ox и безотрывного перемещения вместе с балкой по Oy (фиг. 1). Поведение балки изучается относительно системы координат $O\xi y$, движущейся вдоль Ox со скоростью v, т. е. $\xi = x - vt$. Уравнение изгиба балки и условия сопряжения решения в месте нахождения точечной массы после перехода к безразмерным переменным и параметрам имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - 2v\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \xi} + v^2\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + h\left(\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial \xi}v\right) + \frac{1}{4}W = 0 \tag{1}$$

$$W_+(0, t) = W_-(0, t) \tag{2}$$

$$\frac{\partial W_+(0, t)}{\partial \xi} = \frac{\partial W_-(0, t)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 W_+(0, t)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 W_-(0, t)}{\partial \xi^2}$$