

ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЖИДКОСТЯХ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ПОГЛОЩЕНИЕМ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Акопян Р. С., Зельдович Б. Я.

Рассматривается задача о регулярной естественной конвекции в горизонтальном слое жидкости, находящемся в поле тяжести при пространственно-периодическом в плоскости слоя распределении объемных источников тепла. Показано, что отклик системы максимален при прочих равных условиях, когда период источников приблизительно равен удвоенной толщине слоя.

В литературе имеется большое число аналитически решенных задач о естественной конвекции при наличии градиента температуры [1—3], создаваемого при подведении тепла к границам слоя. В настоящее время поглощение энергии когерентной световой волны от лазера позволяет создавать объемное тепловыделение практически с любым желаемым пространственным распределением, а также легко изменять это распределение.

1. **Линеаризованные уравнения конвекции с объемными источниками тепла.** Рассмотрим горизонтальный слой $-L/2 \leq z \leq L/2$ жидкости толщиной L , находящийся в поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, $g > 0$. Предположим, что на слой падают две плоские когерентные световые волны, интерференция которых приводит к пространственно-периодическому распределению интенсивности $|E(x, y)|^2$ и, при наличии слабого поглощения света, — к распределенным в объеме источникам тепла вида

$$(1.1) \quad Q(x, y) = \frac{\kappa cn}{8\pi} |E(x, y)|^2 = \frac{\kappa cn}{8\pi} [|E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1 \bar{E}_2 \exp(ik_x x + ik_y y) + \bar{E}_1 E_2 \exp(-ik_x x - ik_y y)]$$

Здесь $k = (k_x, k_y)$ — волновой вектор неоднородной части тепловыделения, $|k| = 2\pi |\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2| / \lambda$, где α_1, α_2 — углы падения волн, λ — длина волны света в воздухе, κ — коэффициент поглощения света ($\kappa L \ll 1$), c — скорость света в пустоте, n — показатель преломления жидкости.

Пусть на жестких границах слоя $z = \pm L/2$ поддерживается температура T_0 и задано граничное условие прилипания жидкости: $\mathbf{v}(z = \pm L/2) = 0$. В соответствии светового поля равновесное состояние

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad T_0 = \text{const}, \quad \rho_0 = \text{const}, \quad p_0 = p(z=0) - \rho_0 g z$$

где \mathbf{v} — скорость, ρ — плотность, p — давление. При освещении слоя система возмущается и стационарные уравнения для вариаций $\theta = T - T_0$, $\delta\rho = -\alpha\rho_0\theta$, $\delta p = p - p_0$ в приближении Буссинеска имеют вид [1, 2]

$$(1.2) \quad \nabla^2 \theta = -q |E(x, y)|^2, \quad q = \frac{\kappa cn}{8\pi \rho_0 c_p \chi}$$

$$(1.3) \quad \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \text{grad } \delta p + \rho_0 g \alpha \theta \mathbf{e}_z = 0$$

$$(1.4) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Здесь c_p — теплоемкость, χ — температуропроводность, η — вязкость, α — коэффициент объемного расширения жидкости.

Действуя, как обычно, операторами $\mathbf{e}_z \text{rot}$ и $\mathbf{e}_z \text{rot rot}$ на уравнение (1.3) и применяя (1.4), получаем

$$(1.5) \quad \nabla^2 \xi = 0, \quad \xi \equiv \mathbf{e}_z \text{rot } \mathbf{v}$$

$$(1.6) \quad \nabla^4 v_z + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0, \quad A = \frac{\alpha \rho_0 g}{\eta}$$

Из граничных условий следует, что $\partial v_x / \partial x = \partial v_x / \partial y = \partial v_y / \partial y = \partial v_y / \partial x = 0$ при $z = \pm L/2$. Отсюда и из (1.4) получается, что $\partial v_z / \partial z = 0$ и $\xi(\mathbf{r}) = 0$ при $z = \pm L/2$. Система уравнений (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6) совместно с указанными граничными условиями служит для определения возмущенных величин $\theta(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

2. **Естественная конвекция.** Из уравнений (1.5) и граничного условия для ξ следует $\xi(\mathbf{r}) = 0$ во всех точках жидкости, т. е. отсутствие «винтовых» движений. Решение системы уравнений (1.2), (1.4), (1.6) и $\xi(\mathbf{r}) = 0$ будем искать в виде

$$(2.1) \quad \theta(\mathbf{r}) = q \frac{|E_1|^2 + |E_2|^2}{2} \left[\left(\frac{L}{2} \right)^2 - z^2 \right] + \Theta(z) \exp(ik_x x + ik_y y) + \text{к. с.}$$

$$v_{x, y, z}(\mathbf{r}) = V_{x, y, z}(z) \exp(ik_x x + ik_y y) + \text{к. с.}$$

Тогда для $\Theta(z)$ и $V_z(z)$ получаем систему уравнений

$$(2.2) \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2} - a^2 \right) \Theta = - \frac{1}{L^2 A} I, \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2} - a^2 \right)^2 V_z = L^2 A a^2 \Theta$$

$$a = kL, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad I = \frac{\alpha g L^4 \kappa \rho n E_1 \bar{E}_2}{8 \pi c_p \kappa \eta}$$

Однородная по пространству часть тепловыделения в пренебрежении конвекцией приводит к параболическому распределению температуры — формула (2.1). Для него градиент температуры максимален вблизи границ, где $|\partial T / \partial z| = q (|E_1|^2 + |E_2|^2) / 2$. Если ввести число Релея, используя указанное значение градиента температуры

$$(2.3) \quad R = \frac{L^4}{\kappa} \left| \frac{\partial T}{\partial z} \right| = \frac{\alpha g L^3 \kappa \rho n}{16 \pi c_p \kappa^2 \eta} (|E_1|^2 + |E_2|^2)$$

то можно сформулировать критерий применимости проведенного рассмотрения. Линеаризация исходной системы, приводящая к приближению Буссинеска, справедлива при $R \lesssim 4 \cdot 10^3$. Как известно (например, [4]), значение $R = R_+ = 18,66 \cdot 10^3$ определяет порог устойчивости в случае, когда верхняя и нижняя границы слоя имеют одинаковую температуру, а неустойчивая стратификация обусловлена только внутренним выделением тепла. Поэтому влияние однородного тепловыделения на рассматриваемую естественную конвекцию пренебрежительно мало, если число Релея с запасом удовлетворяет условию, наложенному выше для применимости приближения Буссинеска.

Из (2.2) для z -компоненты скорости получаем уравнение с граничными условиями

$$(2.4) \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2} - a^2 \right)^3 V_z = - I a^2$$

$$(2.5) \quad Z = \pm \frac{1}{2}, \quad V_z = \frac{dV_z}{dZ} = \left(\frac{d^2}{dZ^2} - a^2 \right)^2 V_z = 0$$

Как видно, уравнение (2.4) вместе с граничными условиями (2.5) инвариантно относительно преобразования $Z \rightarrow -Z$. Следовательно, его решение должно быть четной функцией Z . Поэтому общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$(2.6) \quad V_z(Z) = I a^{-4} + (c_1 + c_3 Z^2) \operatorname{ch}(aZ) + c_2 Z \operatorname{sh}(aZ)$$

При этом граничные условия при $Z = 1/2$ и $Z = -1/2$ совпадают, и получаются три условия (2.5) для определения трех постоянных c_1, c_2, c_3 , откуда

$$(2.7) \quad c_1 = - \frac{I}{32 a^4} \left[32 a \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} + (32 + a^2) \operatorname{sh} a - a^3 \right] \left[\operatorname{ch} \frac{a}{2} (a + \operatorname{sh} a) \right]^{-1}$$

$$c_2 = \frac{I}{4 a^3} \left(8 \operatorname{sh} \frac{a}{2} + a \operatorname{ch} \frac{a}{2} \right) (a + \operatorname{sh} a)^{-1}, \quad c_3 = - \frac{I}{8 a^2} \left(\operatorname{ch} \frac{a}{2} \right)^{-1}$$

В тех же обозначениях из уравнений (1.3), первого уравнения (2.2) и $\xi(r) = 0$ следует

$$(2.8) \quad \Theta(Z) = \frac{\eta}{\alpha g \rho_0 L^2} [I a^{-2} + 8 c_3 \operatorname{ch}(aZ)]$$

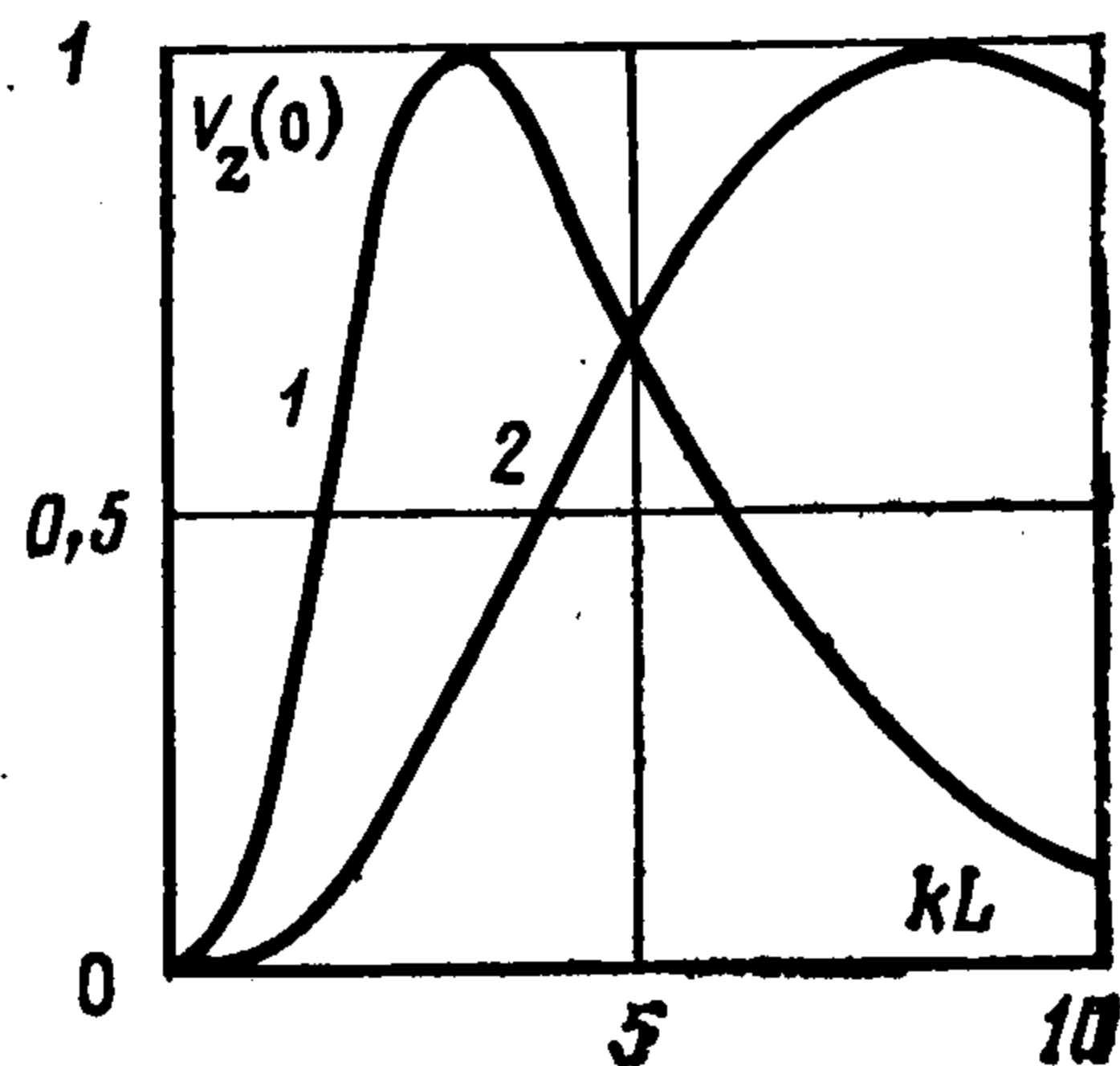
$$(2.9) \quad V_{x,y}(Z) = i \frac{a_{x,y}}{a^2} \frac{dV_z(Z)}{dZ}$$

Поворотом осей координат в плоскости x, y можно добиться $a_y = 0$, что и будет подразумеваться в дальнейшем. Рассмотрим некоторые особенности поведения полученных функций. Как видно из (2.6), амплитуда z -компоненты скорости $V_z(Z)$ достигает своего максимального значения V_z^+ в центре кюветы, $V_z^+ \equiv V_z(0)$. Последнее сильно зависит от L, k и κL . При малых значениях параметра $a \ll \pi$, т. е. при наиболее плавной картине интерференции, когда $\Lambda \equiv 2\pi/k \gg L$, $V_z(0)$ ведет себя как $\propto k^2 L^5 (\kappa L)$ ($V_z(0) \approx (13 \cdot 2^{-6} / 6!) I a^2$), а при $a \gg \pi$ — как $\propto k^{-4} L^{-1} (\kappa L)$ ($V_z(0) \approx I a^{-4}$). При фиксированных L и κL эта функция от k достигает своего максимального значения $V_z^+(0) \approx 8,19 \cdot 10^{-4} I$ при $kL \approx \pi$, что соответствует пространственно-периодической структуре с периодом, равным удвоенной толщине.

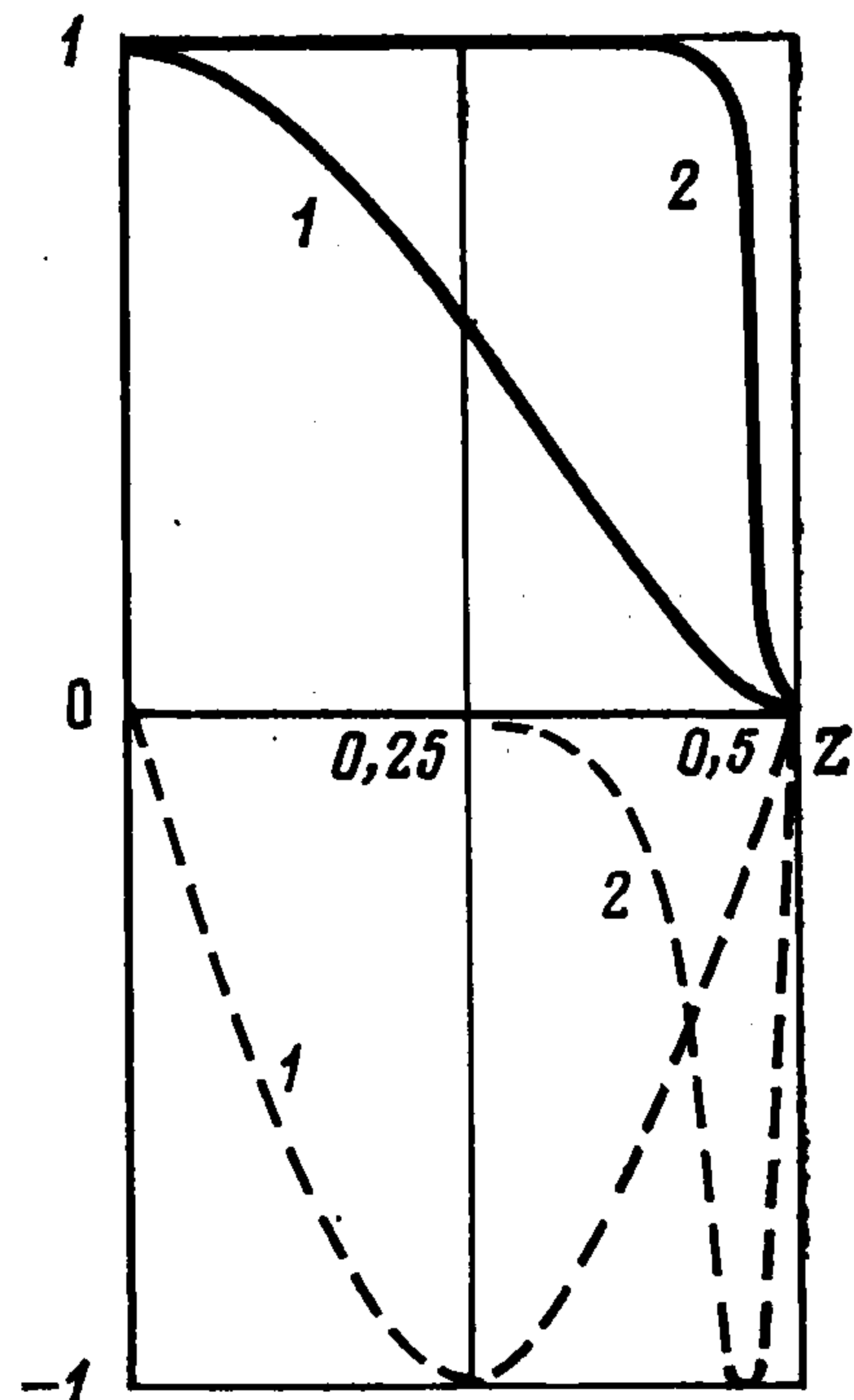
На фиг. 1 (кривая 1) показана эта зависимость, отнормированная на единичное значение в максимуме. При фиксированных k и κL функция $V_z(0)$ от L принимает максимальное значение $V_z^+(0) \approx 0,094 \cdot I a^{-3}$ при $kL \approx 8,2$. Соответствующая зависимость показана на фиг. 1 (кривая 2).

Функция $V_z(Z)$ — четная относительно середины слоя $z = 0$, а функция $V_x(Z)$ — нечетная. Профиль функции $V_z(Z)$ при $a \ll \pi$ не зависит от параметров среды и пространственного периода тепловыделения, он показан кривой 1 на фиг. 2. При $a \gg \pi$ амплитуда z -компоненты скорости $V_z(Z)$ почти постоянна вдоль ячейки и только к краям резко падает до нуля; кривая 2 на фиг. 2 построена для $a = 50$.

Амплитуда x -компоненты скорости есть $-iV_x(Z)$. Множитель i в (2.9) означает, что она отстает по фазе на $\pi/2$ от z -компоненты скорости. Обозначим через $\pm Z_+$ положение двух максимумов модуля величины $V_x(Z)$. Тогда при $a \ll \pi$ получается $Z_+ \approx 0,281$. Как Z_+ , так и профиль $V_x(Z)$ (кривая 3 на фиг. 2) не зависят от параметров задачи. Значение в максимуме ведет себя как $|V_x(Z_+)| \approx 8,7 \cdot 10^{-4} \cdot I a \propto \propto kL^4$ (κL). В другом предельном случае, $a \gg \pi$, максимальная точка профиля $V_x(Z)$ прижимается к границам слоя по закону $Z_+ \approx 1/2 - 2/a$. Значение мак-



Фиг. 1



Фиг. 2

сима ведет себя как $|V_x(Z_+)| \approx I/(2a^4e^2) \propto k^{-4}L^{-1}$ (κL). Профиль функции $-iV_x(Z)$ при $a = 50$ показан на фиг. 2 (кривая 4).

Амплитуда возмущения температуры $\Theta(Z)$ — четная функция от Z и в использованном здесь приближении не зависит от наличия или отсутствия движения жидкости. Она является параболой при $a \ll \pi$ с максимумом при $Z = 0$, равным $\Theta(0) \approx \approx \eta I / (8\alpha g \rho_0 L^2) \propto L$ (κL), и с не зависящим от параметров системы профилем. Заметим, что при $a \ll \pi$ возмущение температуры не зависит от периода интерференционной картины интенсивности. При $a \gg \pi$ имеем $\Theta(0) \approx \eta I / (\alpha g \rho_0 L^2 a^2) \propto k^{-2}L^{-1}$ (κL), а функция $\Theta(Z)$ почти постоянна вдоль Z и только к границам резко падает до нуля.

Эти результаты показывают, что уже при весьма скромном значении плотности мощности интерферирующих световых волн (порядка 100 Вт/см^2 при толщине $L \propto \propto 0,1 \text{ см}$ и $\kappa L = 0,5$) создается чрезвычайно сильная принудительная конвекция. Амплитуда этих конвективных движений ($v_z \propto 0,04 \text{ см/с}$) заведомо достаточна для того, чтобы навязать системе желаемую структуру начальных возмущений. Подчеркнем, что световым полем легко создать начальные возмущения с самой разнообразной структурой — в виде равномерных роликов, роликов с дислокациями [5], кольцевых роликов, ячеек с квадратной или гексагональной упаковкой как идеальной, так и с различными дислокациями. Возможно также плавное изменение периодов картины принудительной конвекции. Все сказанное делает лазерные пучки чрезвычайно удобным инструментом при изучении конвекции.

Авторы заинтересовались рассмотренным кругом вопросов в связи с аналогичной задачей о конвекции в анизотропной жидкости (в нематическом жидком кристалле [4]). Для анизотропной жидкости явного аналитического решения задачи о конвекции в таких условиях получить не удастся. Полученные выше результаты представляют один из немногочисленных примеров аналитического решения задачи о конвекции в слое с точным учетом реальных граничных условий.

Авторы благодарят В. А. Городцова, В. М. Ентова, А. В. Сухова и Ю. С. Чилингаряна за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 654 p.

2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость.— Итоги науки и техники. Серия «Механика жидкости и газа». М.: ВИНТИ, 1978, т. 11, с. 66—154.
4. Акопян Р. С., Зельдович Б. Я. Переориентация директора жидкого кристалла светом вблизи порога пространственно-периодической конвективной неустойчивости.— ЖЭТФ, 1984, т. 86, вып. 2, с. 533—545.
5. Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я., Мамаев А. В., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Исследование плотности дислокации волнового фронта световых полей со спекл-структурой.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, вып. 5 (11), с. 1702—1710.

Москва

Поступила в редакцию
22.III.1984

УДК 532.685

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА В ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА И ПОГЛОЩЕНИЯ ВЕЩЕСТВА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Тихонов Н. А.

Рассматриваются вопросы оптимизации режима подачи вещества на поверхность пористой среды в случае, когда это вещество переносится проходящим сквозь среду потоком и частично поглощается в ней. Такая задача возникает, например, при подаче удобрений на поверхность почвы или подаче химических компонентов на границу среды, в которой протекает реакция с поглощением.

Для определенности рассмотрим задачу о переносе питательных веществ в почве. Их перенос определяется движением влаги. В слое почвы $0 \leq z \leq l$ динамика влажности описывается задачей

$$(1) \quad u_t + q_z = -F(z, t); \quad q|_{z=0} = q_0(t), \quad R(q, u)|_{z=l} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(z)$$

Здесь t — время, z — вертикальная координата ($z = 0$ на поверхности среды), u — плотность влаги, q — ее поток, $q_0(t)$ — заданная функция, определяемая осадками, поливами и испарением с поверхности почвы, R — оператор, описывающий граничные условия при $z = l$, $F(z, t)$ — мощность потребления влаги корнями растений.

Пусть на поверхности почвы при $t > 0$ находится слой вещества A в кристаллическом виде. Концентрацию растворенного вещества в воде, прошедшей сквозь этот слой, обозначим $\chi(t)$. В линейном приближении

$$(2) \quad \chi H(q_0) = \beta(c_0 - \chi); \quad H(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

где $\beta(t)$ — коэффициент обмена между твердой и жидкой фазами A , зависящий от количества находящегося на поверхности вещества в кристаллическом виде, $C_0 = \text{const}$ — насыщенная концентрация A .

Динамика переносимых влагой веществ описывается задачей

$$(3) \quad \begin{aligned} L(c, u) &= 0; \quad \chi(t)H(q_0(t)) = R_1(c, q_0)|_{z=0} \\ R_2(c, q)|_{z=l} &= 0, \quad c|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

где c — концентрация рассматриваемого вещества в почве, L — дифференциальный оператор, описывающий перенос, диффузию и сорбцию вещества A в зависимости от потока q и плотности влаги u ; R_1 и R_2 определяют граничные условия. Например, $R_1(c, q) = qc - a(q)c_z$, $R_2(c, q) = c_z$, где $a(q)$ — коэффициент диффузии.

При невысокой точности опытных данных, вызванной пространственной неоднородностью почв, достаточно обычно рассматривать линейные относительно c модели [1]. Будем считать L , R_1 и R_2 линейными по c , а также, что решение задачи (1), (3)

существует, единственно, неотрицательно при любом $\chi \geq 0$ и интеграл $\int_0^l c(z, t) dz$