Подставим это выражение в (6.1), умножим обе части уравнения на $f_k(x)$ и проинтегрируем на отрезке $[0, \xi]$. В итоге получим для определения функции $\varphi_k(t) = \varphi_k(t; \alpha, \beta)$ систему ($\varphi_k' = d\varphi_k/dt$)

$$\varphi_k'(t) - \alpha \sum_{l=1}^{N} a_{kl}(\beta)\varphi_l(t) = 0, \quad \varphi_k(0) = c_k, \quad k = 1, \ldots, N \tag{7.1}$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x), \quad a_{kl}(\beta) = \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{x} \exp(-\beta(x-z))\, f_l'(z)\, (\partial z)\, f_k(x)\, dx$$

Требуется найти α и β так, чтобы они минимизировали функцию

$$J_N(\alpha, \beta) = \int_0^{\xi} \left[\sum_{k=1}^{N} \varphi_k(\bar{t}; \alpha, \beta) f_k(x) - g(x)\right]^2 dx$$

Получена классическая задача оптимального управления, для решения которой имеются хорошо разработанные и эффективные методы [7]. Отметим, что в принципе решение системы (7.1) можно выписать аналитически.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nunziato J. W., Walsh E. K., Schuler K. W., Barker L. M.* Wave propagation in nonlinear viscoelastic solids.— In: Handbuch der Physik. Ed. by C. Truesdell, B.: Springer, 1974, B. VIa/4, S. 1—108.
2. *Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.* Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981. 256 с.
3. *Engelbrecht J.* One-dimensional deformation waves in nonlinear viscoelastic media.— Wave Motion, 1979, v. 1, No. 1, p. 65—74.
4. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
7. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 518 с.
8. *Lions J. L.* Some aspects of modelling problems in distributed parameter systems.— In: Lecture Notes in Control and Information Sciences. B.: Springer. 1978, v. 1, p. 11—41.

Таллин

Поступила в редакцию
14.III.1983

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Тарасьев А. М.

Рассматривается пример дифференциальной игры, для которого находится функция цены. Если известна функция цены, то построение оптимальных стратегий представляет собой относительно простую задачу [1]. В областях, где функция цены дифференцируема, она удовлетворяет уравнению в частных производных типа Гамильтона — Якоби — уравнению Айзекса — Беллмана [2], которое, как правило, оказывается вырожденным. Поэтому в пространстве позиций имеются так называемые сингулярные множества, на которых функция цены недифференцируема, что создает большие трудности для определения этой функции. К настоящему времени известно небольшое число примеров, для которых удается решить указанную задачу. Хотя в примере, рассмотренном в данной работе, уравнения движения и функция платы довольно просты, он в полной мере демонстрирует упомянутые выше трудности.

Полученные результаты могут быть полезны для изучения сингулярных поверхностей. Приведенные ниже формулы можно использовать для контроля алгоритмов, которые разрабатываются для вычисления цены игры. Отметим также, что в данном примере была опробована возможность применения дифференциальных неравенств [3, 4] для функции цены.

Рассмотрим конфликтно-управляемую систему

$$x_1^{\cdot} = x_2 + v, \quad x_2^{\cdot} = u; \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1 \tag{1}$$

на промежутке времени $I = [0, 2]$. Здесь x_1, x_2, u, v — скаляры, u и v — управления первого и второго игроков.

Платой является величина $\sigma(x(2))$, где

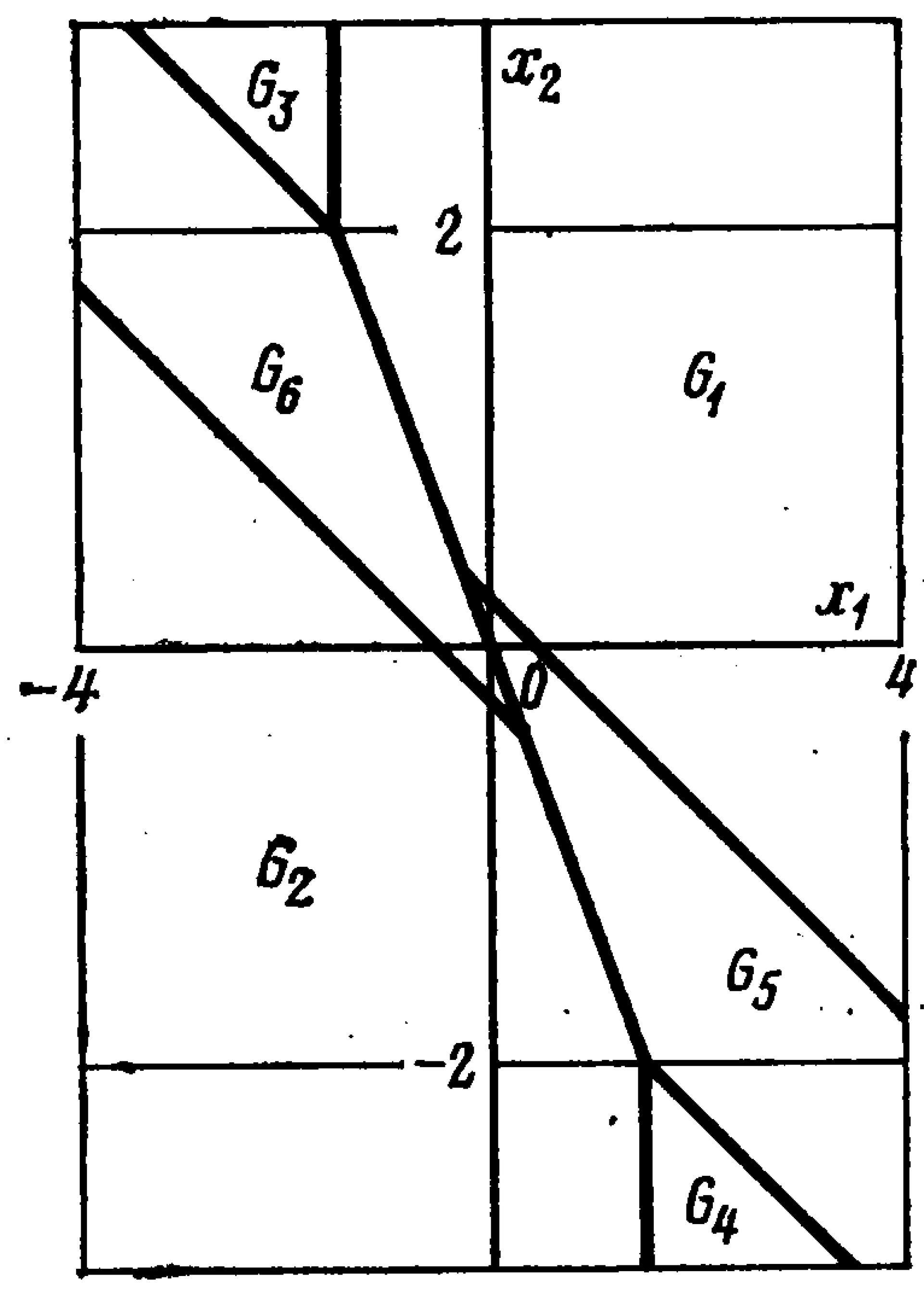
(2) $$\sigma(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

Уравнение Айзекса — Беллмана для системы (1) имеет вид

(3) $$\frac{\partial c}{\partial t} + x_2 \frac{\partial c}{\partial x_1} + \left|\frac{\partial c}{\partial x_1}\right| - \left|\frac{\partial c}{\partial x_2}\right| = 0$$

Для указанной дифференциальной игры удалось построить функцию цены $c(t, x)$ в пространстве позиций $I \times R^2$. Оказалось, что функция цены склеена из двенадцати гладких функций.

Предварительно поясним следующее обстоятельство. Может сложиться мнение, что сложность полученного решения вызвана тем, что выбрана «слишком плохая» функция платы. Однако это не так. Например, при выборе платы $\sigma(x) = \|x\|$ функция цены получается путем склейки меньшего числа гладких функций, чем в случае платы вида (2). Но построение этих гладких составляющих оказывается гораздо сложнее, чем в рассматриваемом случае. Отметим, что управляемая система вида (1) с другим функционалом платы изучалась ранее [1].



Фиг. 1

Приведем выражение, определяющее упомянутые функции

$$\varphi_1 = \varphi_1(t, x) = x_1 + (2 - t)x_2 + (2 - t) - {}^1/_2(2 - t)^2$$

$$\varphi_3 = \varphi_3(t, x) = x_2 - (2 - t)$$

$$\varphi_5 = \varphi_5(t, x) = 2 - \varphi_3 - 2(1 - \varphi_1 - \varphi_3)^{1/2}$$

$$\varphi_i = \varphi_i(t, x) = \varphi_{i-1}(t, x); \quad i = 2, 4, 6$$

Следующие шесть функций заданы неявно:

$$\Phi_7(t, x, \varphi_7) = 2\ln(1 + (1 - \varphi_1 - \varphi_7)^{1/2}) - 2(1 - \varphi_1 - \varphi_7)^{1/2} - \varphi_3 - \varphi_7 - 2(1 + \ln\varphi_7) = 0$$

$$\Phi_9(t, x, \varphi_9) = 2\ln(1 + (1 - \varphi_1 - \varphi_9)^{1/2}) - 2(1 - \varphi_1 - \varphi_9)^{1/2} - \varphi_3 - \varphi_9 - 2(2\varphi_9 - 1)^{1/2} = 0$$

$$\Phi_{11}(t, x, \varphi_{11}) = -(1 - \varphi_1 - \varphi_{11}) + {}^1/_4(\varphi_{11} - \varphi_3 - 2)^2 + (\varphi_{11} - \varphi_3 - 2) \times (\ln(\varphi_{11} - \varphi_3 - 2) - \ln(2(\Psi(\varphi_{11}) - 1))) = 0$$

$$\Psi(\varphi) = \exp(\varphi - 1 + (2\varphi - 1)^{1/2})$$

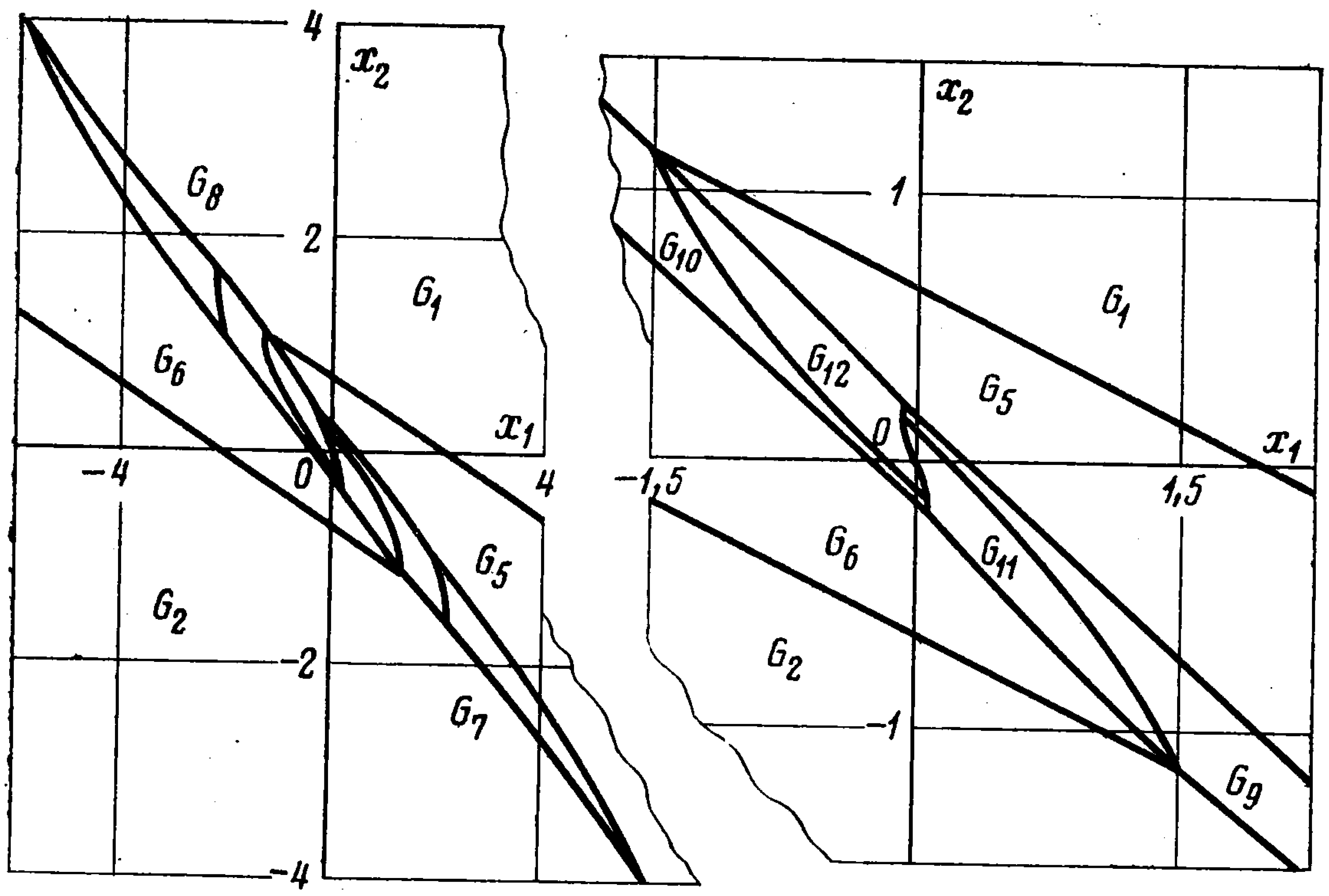
$$\Phi_i(t, x, \varphi_i) = \Phi_{i-1}(t, -x, \varphi_i) = 0; \quad i = 8, 10, 12$$

Отметим, что $\partial\Phi_i(t, x, \varphi_i)/\partial\varphi_i < 0$ для всех (t, x, φ_i) из области определения функции $\Phi_i(t, x, \varphi_i)$ $(i = 7, \ldots, 12)$. Функция $\varphi_i(t, x)$ $(i = 7, \ldots, 12)$ определяется однозначно из соответствующего уравнения. Это позволяет пользоваться необходимыми и достаточными условиями [3, 4], которым должна удовлетворять функция цены, для проверки правильности полученного результата.

Функция цены дифференциальной игры (1), (2) определяется следующим образом. Пространство позиций $I \times R^2$ разбивается [2] на двенадцать областей G_i $(i = 1, \ldots$

[1] *Пацко В. С.*, *Тарасова С. И.* Дифференциальная игра сближения с фиксированным моментом окончания. Свердловск, 1983.—112 с. Деп. в ВИНИТИ 26.09.83; № 5320—83.

[2] Аналитическое описание этого разбиения можно найти в работе: *Тарасьев А. М.* О построении функции цены в одной нерегулярной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. Свердловск, 1983.— 42 с. Деп. в ВИНИТИ 5.05.83; № 2455-83. Там же изложены построения, которые приводят к формулам, описывающим функцию цены и их обоснование.



Фиг. 2

. . ., 12). На фиг. 1, 2 изображены сечения областей G_i ($i = 1, \ldots, 12$) в моменты времени $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ соответственно (справа на фиг. 2 нанесен центральный участок в более крупном масштабе).

Функция цены задачи (1), (2) записывается в виде

$$c(t, x) = \varphi_i(t, x), \quad (t, x) \in G_i \quad (i = 1, \ldots, 12) \tag{4}$$

Отметим, что при $t \in [1, 2]$ цена игры совпадает с программным максимином и имеет простое аналитическое описание

$$c(t, x) = \begin{cases} \max\{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_6\}, & \text{если} \quad \varphi_1 + \varphi_3 \geqslant 0 \\ \max\{\varphi_2, \varphi_4, \varphi_5\}, & \text{если} \quad \varphi_2 + \varphi_4 \geqslant 0 \\ \max\{\varphi_5, \varphi_6\}, & \text{если} \quad \varphi_1 + \varphi_3 \leqslant 0 \text{ и } \varphi_2 + \varphi_4 \leqslant 0 \end{cases}$$

$(\varphi_i = \varphi_i(t, x), \ i = 1, \ldots, 6)$

В полосе $[0, 1] \times R^2$ цена игры, вообще говоря, не совпадает с программным максимином и имеет более сложную структуру.

В заключение скажем, что для нахождения функции цены использовались попятные процедуры и соответствующие предельные переходы [5—8]. Окончательная проверка найденных таким образом функций была проведена на основе необходимых и достаточных условий [3, 4], которым должна удовлетворять функция цены.

Автор благодарит А. И. Субботина и В. Н. Ушакова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели.— Матем. сб., 1978, т. 107, вып. 4, с. 541—571.
2. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
3. *Субботин А. И.* Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр.— Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 2, с. 293—297.
4. *Субботин А. И., Субботина Н. Н.* Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой цены дифференциальной игры.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 4, с. 862—865.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2.— Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
7. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр.— Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2, с. 285—287.
8. *Ушаков В. Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения — уклонения.— Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1980, № 4, с. 29—36.

Свердловск

Поступила в редакцию
18.X.1983