Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 517.96+620.17:534.1

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Тобиас Т. А., Энгельбрехт Ю. К.

Анализируется проблема определения ядра релаксации при помощи решения обратной задачи для эволюционного уравнения, которое описывает искажение профиля отдельной волны. Рассматривается общий случай, когда ядро задано в параметрической форме, и частный случай экспоненциального ядра. Нелинейная обратная задача решается градиентным методом. Для линейного уравнения показана возможность применения метода преобразования Лапласа.

1. Пусть задано уравнение движения

$$\rho U_{TT}(T, X) = G(0)\, U_{XX}(T, X) + \frac{\partial}{\partial X}\int\limits_0^\infty G(s)\, U_X(T-s, X)\, ds \tag{1.1}$$

$$U(0, X) = U_T(0, X) = 0, \quad U_X(T, 0) = \varphi_0(T), \quad \lim_{X\to\infty} U(T, X) = 0$$

Здесь U — перемещение, ρ — плотность, X — лагранжева координата, T — время. Обратная задача для уравнения (1.1) состоит в следующем. Задано измерение $U_x(T, \bar X) = \varphi(T, \bar X)$ в точке $X = \bar X$, требуется по функции $\varphi(T, \bar X)$ определить ядро $G(s)$.

Для стационарной монохроматической волны с частотой ω наиболее эффективен для решения обратной задачи следующий метод. Экспериментальным путем определяются фазовая скорость $c(\omega)$ и коэффициент затухания и при помощи техники преобразования Фурье восстанавливается ядро $G(s)$ [1]. Решение задачи заметно усложняется в нелинейной постановке. В этом случае целесообразно расчленить волновой процесс на отдельные волны, что ведет к описанию эволюции отдельных волн через соответствующие эволюционные уравнения [2]. В общем случае одномерное эволюционное уравнение первого приближения для продольной волны имеет вид

$$u_t + a_{01} u u_x - \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^x u_z(t, z)\, K(x-z)\, dz = 0 \tag{1.2}$$

$$x = c_0 T - X, \quad t = \varepsilon X$$

где c_0 — скорость продольной волны, ε — некоторый малый параметр, $u(t, x)$ — первое приближение скорости частицы (возможен переход к деформации u_x), $K(x)$ — ядро; коэффициент $a_{01} = \mathrm{const}$ определяет влияние геометрической и физической нелинейностей [3]. Детали перехода от уравнения второго порядка типа (1.1) или от системы более высокого порядка к эволюционному уравнению типа (1.2) представлены в [2].

Добавим к уравнению (1.2) следующие условия:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = 0 \tag{1.3}$$

Допустим, что ядро $K(x)$ таково, что уравнение (1.2) имеет единственное решение $u(t, x)$, удовлетворяющее условию (1.3). Обратная задача для уравнения (1.2) состоит в определении ядра $K(x)$ из условия $u(\bar t, x) = u_1(x)$, где $t = \bar t$ — фиксированный момент времени. Известно, что, вообще говоря, обратные задачи некорректны. Если допустить, что неизвестное ядро $K(x)$ принадлежит к заданному компакту, то известно следующее [4]. Если соотношение между измерением $u_1(x)$ и ядром $K(x)$ взаимно однозначно и непрерывно (в определенной метрике), то рассматриваемая обратная задача корректна по А. Н. Тихонову. Ниже выполнение указанных условий установлено для линейной задачи. В нелинейной постановке требуемые свойства сильно зависят от свойств класса допустимых ядер $K(x)$.

Решение обратной задачи (1.2), (1.3) по сравнению с задачей типа (1.1) имеет ряд преимуществ· обратная задача эволюционного уравнения (1.2) с начальными условиями более исследована, чем обратная задача (1.1) с граничным режимом [4]; прямая задача решения уравнения (1.2) [5, 6], позволяющая определить искажение отдельной волны, хорошо соответствует возможностям экспериментальной техники; порядок эволюционного уравнения ниже порядка основного уравнения.

Так как уравнения типа (1.2) выведены асимптотическим методом, то обратные задачи определения их коэффициентов или ядра по своему физическому смыслу можно называть асимптотическими. Далее представлены некоторые возможности решения обратной задачи для уравнения (1.2) как в линейной, так и в нелинейной постановках с произвольной функцией $u_0(x)$. Это позволяет использовать предлагаемую методику в импульсной акустодиагностике.

2. Сперва рассмотрим параметрический случай, когда ядро задано в виде $K(x, \alpha)$, где α — неизвестный параметр.

Рассмотрим уравнение

$$u_t + a_{01}uu_x - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x K(x-z, \alpha)\, u_z dz = 0 \tag{2.1}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = 0$$

Предположим, что краевое и начальное условия согласованы, т. е. $u_0(0) = 0$ Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A$, где A — замкнутое, ограниченное и выпуклое множество в R_n. Пусть функция $K(x, \alpha)$ такая, что при любом $\alpha \in A$ существует единственное решение $u = u(t, x) = u(t, x; \alpha)$ уравнения (2.1) и пусть $u(t, x; \alpha)$, $\partial u(t, x; \alpha)/\partial\alpha$, $K(x, \alpha)$ и $\partial K(x, \alpha)/\partial\alpha$ непрерывно зависят от параметра α. Допустим, что если $\alpha_m \to \alpha$, то $u_m(t, x; \alpha_m)$ равномерно сходится вместе с производными к функции $u(t, x; \alpha)$ и ее производным, соответственно.

Пусть имеется возможность оценить (измерить) решение уравнения (2.1) при $t = \bar{t}$. В результате измерения получим приближенное значение $g(x)$ точного решения, т. е.

$$u_1(x) = u(\bar{t}, x; \alpha) = g(x) + \varepsilon(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant \infty \tag{2.2}$$

Требуется по этой информации (по функции $g(x)$) определить истинное значение α^* параметра $\alpha \in A$.

Если известен точный вид решения $u(t, x; \alpha)$, то имеем задачу нелинейной регрессии. Но так как точный вид решения неизвестен, то приходится пользоваться другими методами. Рассмотрим задачу определения параметра α по наблюдаемому значению $g(x)$ как задачу оптимизации, т. е. в качестве истинного значения параметра выберем) $\alpha = \bar{\alpha}$, такое, чтобы $u(\bar{t}, x; \bar{\alpha})$ наилучшим образом (в среднеквадратичном смысле соответствовало бы наблюдаемому значению $g(x)$.

Пусть

$$J(\alpha) = \int_0^\xi [u(\bar{t}, x; \alpha) - g(x)]^2\, dx \tag{2.3}$$

Задача идентификации параметра α состоит в следующем: найти такое $\bar{\alpha} \in A$, что $\min_\alpha J(\alpha) = J(\bar{\alpha})$. Так как A — замкнутое и ограниченное множество, то $\bar{\alpha}$ существует и задача определения параметра $\bar{\alpha}$ по наблюдениям корректна. Тем не менее, если число компонент $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ велико, то задача их определения становится плохо обусловленной и необходимо ставить вопрос о выборе числа параметров. Обычно число параметров выбирается минимальным при условии сопоставимости данных расчета с данными измерений. Задавая погрешность измерения ε, необходимо требовать, что $|u(\bar{t}, x; \alpha^*) - g(x)| \leqslant \varepsilon$, где α^* — вычисленные по $g(x)$ значения параметра $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Для нахождения решения $\bar{\alpha}$ нужно прибегнуть к различным численным методам, позволяющим построить минимизирующую последовательность $\{\alpha^k\}$, $\alpha^k \to \bar{\alpha}$. В большинстве таких методов используется градиент функции $J(\alpha)$.

Опишем, например, метод проекции градиента.

Пусть

$$\operatorname{grad} J(\alpha) = (\partial J/\partial\alpha_1, \ldots, \partial J/\partial\alpha_n) \tag{2.4}$$

и $P_A(\alpha)$ — проекция элемента $\alpha \in R_n$ на выпуклое множество A. Будем строить последовательность α^k по правилу

$$\alpha^{k+1} = P_A(\alpha^k - t_k \operatorname{grad} J(\alpha^k)), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.5}$$

где t_k — положительная величина. Условия сходимости последовательности α^k к локальному минимуму функции $J(\alpha)$ и способы выбора шага t_k можно найти, например, в [7].

Исходя из уравнения (2.1) выведем выражение для градиента, т. е. найдем функцию (2.4). Подобный метод вычисления градиента при помощи сопряженного уравнения был использован, например [8].

3. Обозначим через $u^\Delta = u(t, x; \alpha + \Delta\alpha)$ решение уравнения (2.1) при замене α на $\alpha + \Delta\alpha = (\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \ldots, \alpha_n + \Delta\alpha_n)$. Тогда

$$\begin{gathered}(u^\Delta - u)_t + a_{01}(u^\Delta - u)u_x^\Delta + a_{01}u(u^\Delta - u)_x - \\ - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x K(x - z, \alpha + \Delta\alpha)(u^\Delta - u)_z\,dz - \\ - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x [K(x - z, \alpha + \Delta\alpha) - K(x - z, \alpha)]\,u_z\,dz = 0 \\ u^\Delta(0, x) - u(0, x) = 0, \quad u^\Delta(t, 0) - u(t, 0) = 0\end{gathered} \tag{3.1}$$

Обозначим $v_i = v_i(t, x; \alpha) = \partial u(t, x; \alpha)/\partial\alpha_i$. Разделим обе части уравнения (3.1) на $\Delta\alpha_i$, тогда при $\Delta\alpha \to 0$ получим

$$\begin{gathered}(v_i)_t + a_{01}(uv_i)_x - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x K(x - z, \alpha)(v_i)_z\,dz = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{\partial K(x - z, \alpha)}{\partial\alpha_i}\,u_z\,dz, \quad v_i(0, x) = v_i(t, 0) = 0\end{gathered} \tag{3.2}$$

$i = 1, \ldots, n$

Очевидно, что

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha_i} = 2\int_0^\xi [u(\bar t, x; \alpha) - g(x)]\,v_i(\bar t, x; \alpha)\,dx \tag{3.3}$$

Чтобы преобразовать это выражение, введем сопряженное к (2.1) уравнение

$$\begin{gathered}-p_t - a_{01}p_x u - \frac{\partial}{\partial x}\int_x^\xi K(z - x, \alpha)\,p_z\,dz = \\ = 2[u(t, x; \alpha) - g(x)]\,\delta(t - \bar t), \quad p(\tau, x) = p(t, \xi) = 0\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $\delta(t - \bar t)$ — дельта-функция, $p = p(t, x; \alpha)$, где $(t, x) \in D = (0, \tau) \times (0, \xi)$, $0 < \bar t < \tau < \infty$.

Умножим обе части уравнения (3.4) на $v_i(t, x; \alpha)$ и проинтегрируем по области D. Интегрируя по частям и используя граничные значения функций v_i и p, получим

$$2\int_D [u(t, x; \alpha) - g(x)]\,v_i(t, x; \alpha)\,\delta(t - \bar t)\,dx\,dt = \frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha_i} \tag{3.5}$$

$$-\int_D p_t v_i\,dx\,dt = \int_D (v_i)_t\,p\,dx\,dt \tag{3.6}$$

$$-\int_D p_x u v_i\,dx\,dt = \int_D (uv_i)_x\,p\,dx\,dt \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}-\int_0^\tau\int_0^\xi \frac{\partial}{\partial x}\int_x^\xi K(z - x, \alpha)\,p_z(t, z; \alpha)\,dz\,v_i(t, x; \alpha)\,dx\,dt = \\ = -\int_0^\tau dt\int_0^\xi p(t, z; \alpha)\,\frac{\partial}{\partial z}\int_0^z K(z - x, \alpha)\,\frac{\partial v_i(t, x; \alpha)}{\partial x}\,dx\,dz\end{gathered} \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.2), (3.5), (3.6), (3.7) и (3.8) следует

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \int_0^\tau\int_0^\xi \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{\partial K(x-z,\alpha)}{\partial \alpha_i} u_z(t, z; \alpha)\, dz p(t, x; \alpha)\, dx\, dt \tag{3.9}$$

$$i = 1, \ldots, n$$

Из формулы (3.9) видно, что метод (2.5) требует на каждом шаге решения двух интегродифференциальных уравнений. При значении $\alpha = \alpha^k$ решаются уравнения (2.1) и (3.4), затем по формуле (3.9) вычисляется градиент функции $J(\alpha)$ и по формуле (2.5) находится новое приближение α^{k+1} и т. д.

4. Выше был рассмотрен параметрический случай, когда $K = K(x, \alpha)$. Направление градиента в пространстве параметров $\alpha \in R_n$ было определено формулой (3.9), куда входят решения уравнений (2.1) и (3.4). Можно было воспользоваться и непосредственно формулой (3.3), зависящей от решений уравнений (2.1) и (3.2). Но к выражению вида (3.9) необходимо обратиться в непараметрическом случае, когда через наблюдение $g(x)$ определяется неизвестная функция $K(x)$.

Например, пусть $K(x) = K^0(x) + \alpha K^1(x)$, где $K^0(x)$ — известная функция. Если поправка $K^1(x)$ считается известной, то имеет место параметрический случай определения параметра α, описанный в предыдущем пункте. Но может оказаться, что именно вид поправки $K^1(x)$ неизвестен и $K^1(x)$ приходится определять при помощи измерения. Тогда линейное относительно $K^1(x)$ приращение функционала $J(K)$ получается преобразованиями, аналогичными выводу формулы (3.9).

Пусть L_2 — класс интегрируемых с квадратом функций на отрезке $[0, \xi]$. Обозначим

$$(f_1, f_2) = \int_0^\xi f_1(x) f_2(x)\, dx$$

Пусть $u = u(t, x; K)$ — решение уравнения

$$u_t + a_{01} u u_x - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x K(x-z) u_z\, dz = 0 \tag{4.1}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = 0$$

Допустим, что $K \in M \subset L_2$, где M — выпуклый компакт гладких функций в L_2. Не будем уточнять свойства функции $K(x)$ и класса M, поэтому следующие ниже выводы носят формальный характер. Пусть при каждом $K \in M$ существует единственное решение $u(t, x; K)$ уравнения (4.1), имеющее в области $D = (0, \tau) \times (0, \xi)$ непрерывные производные u_t и u_x и зависящие вместе с производными непрерывно от функции K.

Пусть

$$J(K) = \int_0^\xi [u(\bar{t}, x; K) - g(x)]^2\, dx$$

Требуется определить $K^* \in M$ так, чтобы $J(K^*) = \min_{K \in M} J(K)$. Так как M — компакт, то K^* существует.

Допустим, что градиент функционала $J(K)$ существует. Тогда метод проекции градиента для вычисления K^* имеет вид

$$K_{n+1} = P_M(K_n - t_n \operatorname{grad} J(K_n)), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.2}$$

где $P_M(f)$ — проекция элемента f на выпуклый компакт M.

Пусть функция $p = p(t, x; K)$ удовлетворяет уравнению (3.4), где величина $K(z - x, \alpha)$ заменена функцией $K(z - x)$. Тогда можно вывести (детали опустим), что

$$\left.\frac{dJ(K^0 + \alpha K^1)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = (\operatorname{grad} J(K), K^1) =$$

$$= \int_0^\tau\int_0^\xi \frac{\partial}{\partial y}\int_y^\xi u_x(t, x-y; K)\, p(t, x; K)\, dx K^1(y)\, dy\, dt$$

Отсюда видно, что

$$\operatorname{grad} J(K) = \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial y} \int_y^\xi u_x(t, x-y; K)\, p(t, x; K)\, dx\, dt$$

5. Пусть в уравнении (4.1) $a_{01} = 0$, т. е. имеем линейное уравнение

$$(5.1) \qquad u_t - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x K(x-z)\, u_z\, dz = 0: \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = 0$$

где $u_0(0) = 0$.

Пусть задано $u_1(\bar t, x) = u(\bar t, x; K)$, требуется определить функцию $K(x)$.

Применим к уравнению (5.1) преобразование Лапласа по аргументу x.

Пусть

$$Lu = \bar u(t, s) = \int_0^\infty \exp(-sx)\, u(t, x)\, dx$$

$$Lu_0 = \bar u_0(s), \quad LK = \bar K(s), \quad Lu_1 = \bar u_1(s)$$

Для зависящей от параметра s функции $\bar u(t, s)$ получим уравнение

$$\bar u_t(t, s) - s^2 \bar K(s)\, \bar u(t, s) = 0, \ \bar u(0, s) = \bar u_0(s)$$

откуда $\bar u(t, s) = \bar u_0(s) \exp(s^2 \bar K(s)\, t)$. Так как $\bar u(\bar t, s) = \bar u_1(s)$, то

$$(5.2) \qquad \bar K(s) = \frac{1}{s^2 \bar t} \ln \frac{\bar u_1(s)}{\bar u_0(s)}$$

Ввиду того, что $\bar K(s)$ не зависит от значения $t = \bar t$, должна существовать функция $A(s)$, такая, что выполняется условие

$$(5.3) \qquad \bar u(t, s) = \bar u_0(s) \exp(A(s)\, t)$$

Отсюда получим

$$(5.4) \qquad \bar K(s) = A(s)/s^2$$

Итак, если выполняется условие (5.3), где функция $A(s)$ такова, что $A(s)/s^2$ — преобразование Лапласа допустимых функций $K \in M$, то функция $u(\bar t, x) = g(x)$ определяет однозначно функцию $K(x)$ при любом $\bar t > 0$.

Из формулы (5.2) вытекает, что между функциями $K(x)$ и $u_1(\bar t, x) = u(\bar t, x; K)$ существует взаимно однозначное и непрерывное отображение. Так как $K(x)$ принадлежит компакту M, то исследуемая задача корректна по А. Н. Тихонову [4].

Необходимо, однако, отметить, что в случае задания $u_1(\bar t, x)$ с ошибкой возникает вопрос о принадлежности вычисленного ядра K к компакту M. Вполне ясно, что погрешность в $u_1(\bar t, x)$ может привести к ситуации, когда ядро $K(x)$ уже не принадлежит к данному компакту M. В том случае нужно применить метод регуляризации А. Н. Тихонова.

Формулы (5.3) и (5.4) могут служить для решения как уравнения (5.1), так и соответствующей обратной задачи.

Примеры. 1°. Пусть $\bar u_1(s) = \bar u_0(s) \exp \bar t$ (т. е. $u(t, x) = u_0(x) \exp t$). Из (5.3) получим, что $A(s) \equiv 1$. Соотношение (5.4) дает $\bar K(s) = 1/s^2$, откуда $K(x) = x$. Уравнение (5.1) преобразуется к виду $u_t - u = 0$, откуда, действительно, $u(t, x) = u_0(x) \exp t$.

2°. Пусть $K(x) = \alpha \exp(-\beta x)$ и по экспериментальным данным построена функция $u_1(x) \approx u(\bar t, x; \alpha, \beta)$, на основании которой требуется определить постоянные α и β. Найдем $\bar u_1(s)$ и $\bar K(s) = \alpha/(s+\beta)$. Из формулы (5.4) получим, что $A(s) = \alpha s^2/(s+\beta)$

Тогда по (5.3)

$$(5.5) \qquad \bar u_1(s) = \bar u_0(s) \exp(\alpha s^2 t/(s+\beta))$$

Из соотношения (5.5) можно многими способами определить приближенные значения параметров α и β (учитывая и случайные ошибки при построении функции $u_1(x)$, а тем самым и $\bar u_1(s)$).

6. Пусть в уравнении (5.1) $K(x) = \alpha \exp(-\beta x)$, т. е.

$$u_t - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \exp[-\beta(x-z)]\, u_z(t, z)\, dz = 0 \tag{6.1}$$

Обозначим

$$w(t, x) = \int_0^x \exp[-\beta(x-z)]\, u_z(t, z)\, dz$$

Так как $w_x = u_x - \beta w$, то уравнение (6.1) можно заменить следующей эквивалентной системой:

$$u_t - \alpha w_x = 0, \quad u_x - w_x - \beta w = 0$$
$$u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, 0) = 0, \quad w(t, 0) = 0$$

Пусть задано $g(x) \approx u(\bar{t}, x; \alpha, \beta)$. Требуется определить α и β так, чтобы

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^\xi [u(\bar{t}, x; \alpha, \beta) - g(x)]^2\, dx \to \min \tag{6.2}$$

Рассмотрим градиентный метод определения параметров α и β.

Обозначим $\partial u/\partial\alpha = u^1$, $\partial u/\partial\beta = u^2$, $\partial w/\partial\alpha = w^1$, $\partial w/\partial\beta = w^2$.

Можно показать, что

$$u_t^1 - \alpha w_x^1 = w_x, \quad u_x^1 - w_x^1 - \beta w^1 = 0$$
$$u^1(0, x) = w^1(t, 0) = u^1(t, 0) = 0$$

и

$$u_t^2 - \alpha w_x^2 = 0, \quad u_x^2 - w_x^2 - \beta w^2 = w$$
$$u^2(0, x) = w^2(t, 0) = u^2(t, 0) = 0$$

Введем следующие сопряженные системы:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} = 2[u(t, x; \alpha, \beta) - g(x)]\, \delta(t - \bar{t})$$
$$-\frac{\partial q_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial p_1}{\partial x} + \beta q_1 = 0, \quad p_1(\tau, x) = p_1(t, \xi) = q_1(t, \xi) = 0$$
$$-\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial q_2}{\partial t} = 2[u(t, x; \alpha, \beta) - g(x)]\, \delta(t - \bar{t})$$
$$\alpha \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} - \beta p_2 = 0, \quad p_2(t, \xi) = q_2(\tau, x) = q_2(t, \xi) = 0$$

Используя рассуждения, применявшиеся выше, можно показать, что

$$\frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \int_0^\tau \int_0^\xi p_1(t, x; \alpha, \beta)\, w_x(t, x; \alpha, \beta)\, dx\, dt$$
$$\frac{\partial J(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \int_0^\tau \int_0^\xi p_2(t, x; \alpha, \beta)\, w(t, x; \alpha, \beta)\, dx\, dt$$

Для определения параметров α и β имеем следующую процедуру:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - s_n \frac{\partial J(\alpha_n, \beta_n)}{\partial \alpha}, \quad \beta_{n+1} = \beta_n - t_n \frac{\partial J(\alpha_n, \beta_n)}{\partial \beta}$$

где величины s_n и t_n определяют длину шага градиентного метода.

7. Практическое применение изложенных выше методов наталкивается на значительные вычислительные трудности. Поэтому уместно предварительно упрощать исходное уравнение. Остановимся на одном способе такого упрощения.

Пусть задано уравнение (6.1). Требуется минимизировать функцию (6.2).

Дискретизируем уравнение (6.1) методом Галеркина. Пусть $\{f_k(x)\}$ — полная ортонормированная система функций на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant \infty$. $f_k(0) = 0$. Пусть

$$u \approx u_N(t, x; \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t)\, f_i(x)$$

Подставим это выражение в (6.1), умножим обе части уравнения на $f_k(x)$ и проинтегрируем на отрезке $[0, \xi]$. В итоге получим для определения функции $\varphi_k(t) = \varphi_k(t; \alpha, \beta)$ систему ($\varphi_k' = d\varphi_k/dt$)

$$\varphi_k'(t) - \alpha \sum_{l=1}^{N} a_{kl}(\beta)\varphi_l(t) = 0, \quad \varphi_k(0) = c_k, \quad k = 1, \ldots, N \tag{7.1}$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x), \quad a_{kl}(\beta) = \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{x} \exp(-\beta(x - z))\, f_l'(z)\, (\partial z)\, f_k(x)\, dx$$

Требуется найти α и β так, чтобы они минимизировали функцию

$$J_N(\alpha, \beta) = \int_0^{\xi} \Big[\sum_{k=1}^{N} \varphi_k(\bar{t}; \alpha, \beta) f_k(x) - g(x)\Big]^2 dx$$

Получена классическая задача оптимального управления, для решения которой имеются хорошо разработанные и эффективные методы [7]. Отметим, что в принципе решение системы (7.1) можно выписать аналитически.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nunziato J. W., Walsh E. K., Schuler K. W., Barker L. M.* Wave propagation in nonlinear viscoelastic solids.— In: Handbuch der Physik. Ed. by C. Truesdell, B.: Springer, 1974, B. V1a/4, S. 1—108.
2. *Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.* Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981. 256 с.
3. *Engelbrecht J.* One-dimensional deformation waves in nonlinear viscoelastic media.— Wave Motion, 1979, v. 1, No. 1, p. 65—74.
4. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
6. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
7. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 518 с.
8. *Lions J. L.* Some aspects of modelling problems in distributed parameter systems.— In: Lecture Notes in Control and Information Sciences. B.: Springer. 1978, v. 1, p. 11—41.

Таллин

Поступила в редакцию
14.III.1983

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Тарасьев А. М.

Рассматривается пример дифференциальной игры, для которого находится функция цены. Если известна функция цены, то построение оптимальных стратегий представляет собой относительно простую задачу [1]. В областях, где функция цены дифференцируема, она удовлетворяет уравнению в частных производных типа Гамильтона — Якоби — уравнению Айзекса — Беллмана [2], которое, как правило, оказывается вырожденным. Поэтому в пространстве позиций имеются так называемые сингулярные множества, на которых функция цены недифференцируема, что создает большие трудности для определения этой функции. К настоящему времени известно небольшое число примеров, для которых удается решить указанную задачу. Хотя в примере, рассмотренном в данной работе, уравнения движения и функция платы довольно просты, он в полной мере демонстрирует упомянутые выше трудности.

Полученные результаты могут быть полезны для изучения сингулярных поверхностей. Приведенные ниже формулы можно использовать для контроля алгоритмов, которые разрабатываются для вычисления цены игры. Отметим также, что в данном примере была опробована возможность применения дифференциальных неравенств [3, 4] для функции цены.

Рассмотрим конфликтно-управляемую систему

$$x_1^{\cdot} = x_2 + v, \; x_2^{\cdot} = u; \; |u| \leqslant 1, \; |v| \leqslant 1 \tag{1}$$