Прикладная математика и механика. Том 49, вып. 4, 1985

УДК 539.374

К ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

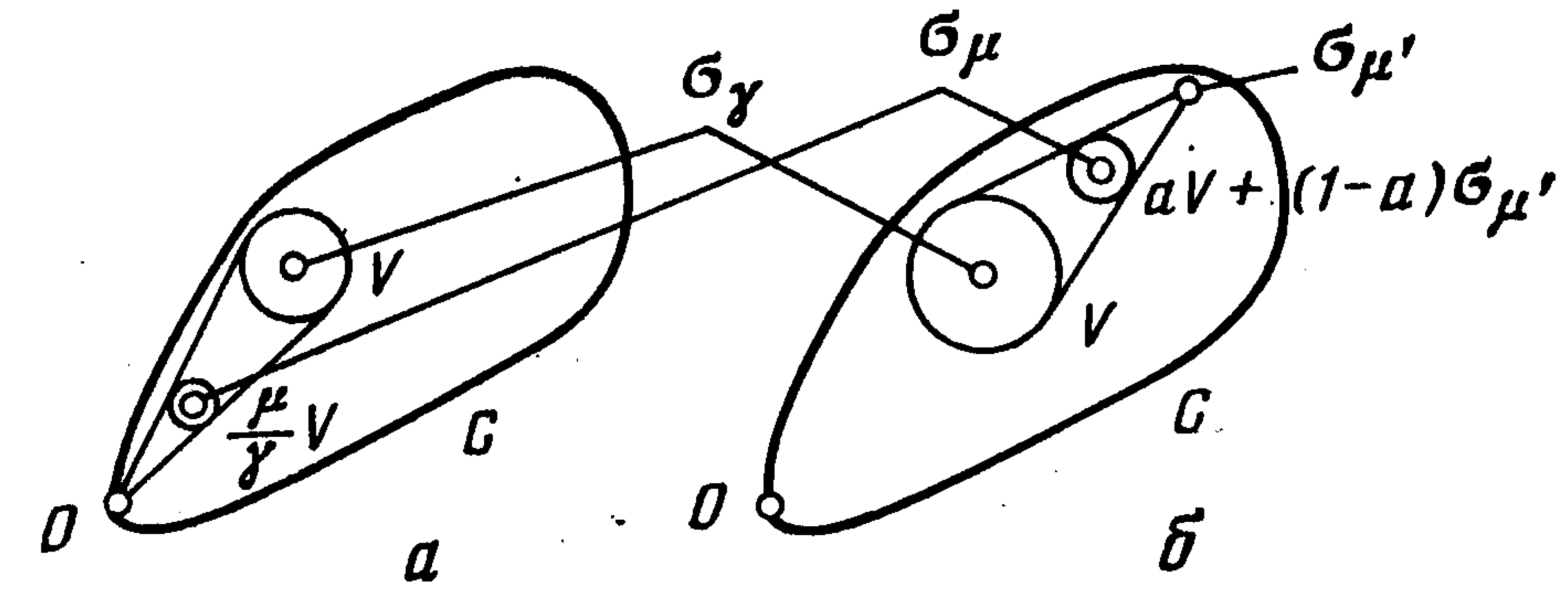
Каменярж Я. А., Мерзляков А. Г.

В теории предельной нагрузки [1—7] используются некоторые условия, накладываемые на поверхность текучести. Обычно принимается, что нулевые напряжения лежат строго внутри нее и (или) поверхность текучести ограничена. Эти условия, однако, не выполнены в некоторых случаях (например, для идеально сыпучих сред, поверхность текучести имеет вид конуса с вершиной в нуле [8]). Ниже показано, что основные утверждения о предельной нагрузке остаются справедливыми и во многих случаях, когда указанные условия не выполняются. Однако эти утверждения верны тогда уже не для всех нагрузок, а для некоторого (широкого) их класса, описанного ниже. В то же время для других нагрузок эти утверждения могут быть несправедливы, например кинематический метод дает лишь тривиальную верхнюю оценку коэффициента запаса нагрузки. Соответствующий пример, который приводится ниже, показывает, что обычно используемые ограничения на поверхность текучести существенны с точки зрения выполнения известных утверждений применительно ко всем нагрузкам.

1. Рассмотрим сначала для простоты дискретную жестко идеально пластическую систему. Пусть $S = \mathbf{R}^m$ — пространство внутренних усилий, $\mathbf{F} = \mathbf{R}^m$ — пространство соответствующих скоростей деформаций, $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle$ — мощность работы внутренних усилий $\boldsymbol{\sigma}$ на скоростях деформаций $\mathbf{e}$. Множество C пластически допустимых усилий (не выходящих за поверхность текучести) задается соотношением $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) \leqslant 0$, где Φ — выпуклая функция. Усилия $\boldsymbol{\sigma}$ и скорости деформаций $\mathbf{e}$ в системе связаны ассоциированным законом или, что то же самое, принципом максимума пластической мощности: $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle \geqslant \langle \boldsymbol{\sigma}_*, \mathbf{e} \rangle$ для всех $\boldsymbol{\sigma}_*$, удовлетворяющих условию $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_*) \leqslant 0$.

Предполагается, что усилия $\boldsymbol{\sigma} = 0$ пластически допустимы ($\Phi(0) \leqslant 0$), но не обязательно являются внутренней точкой множества C допустимых усилий. Это множество также не предполагается ограниченным. Таким образом, условия, достаточные [6] для совпадения статического $\alpha(\mathbf{l})$ и кинематического $\beta(\mathbf{l})$ предельных коэффициентов нагрузки $\mathbf{l}$, не выполнены (предельными коэффициентами называются наилучшие оценки, получаемые при помощи соответственно статических и кинематических коэффициентов [9]). Не выполнено, вообще говоря, и условие (о том, что $\boldsymbol{\sigma} = 0$ — внутренняя точка множества C), обеспечивающее недеформируемость системы для нагрузки $\mu\mathbf{l}$ при $0 \leqslant \mu < \alpha(\mathbf{l})$. Опишем тем не менее класс нагрузок, для которых эти свойства сохраняются (пример нагрузки, для которой они не сохраняются, приведен ниже). Справедливо следующее утверждение.

Если для нагрузки $\mathbf{l}$ можно указать такой коэффициент $\gamma > 0$, что нагрузка $\gamma\mathbf{l}$ уравновешивается безопасными усилиями, то 1) статический и кинематический предельные коэффициенты этой нагрузки совпадают: $\alpha(\mathbf{l}) = \beta(\mathbf{l})$, 2) при нагрузке $\mu\mathbf{l}$ с коэффициентом $0 < \mu < \alpha(\mathbf{l})$ система остается жесткой.



Фиг. 1

(Усилия σ называются безопасными, если σ — внутренняя точка множества C пластически допустимых усилий.)

Пусть s_γ — безопасные усилия, уравновешивающие нагрузку γl. Рассмотрим вспомогательную жестко идеально пластическую систему, отличающуюся от исходной лишь областью пластически допустимых усилий, которую зададим условием $\Phi^\circ(\sigma) \equiv \Phi(\sigma + s_\gamma) \leqslant 0$.

Заметим, что если $m_s \geqslant \gamma$ — статический коэффициент нагрузки l для исходной системы, т. е. нагрузка $m_s l$ уравновешивается некоторыми усилиями τ, причем $\Phi(\tau) \leqslant 0$, то усилия $\tau - s_\gamma$ уравновешивают нагрузку $(m_s - \gamma)\, l$ и являются допустимыми для вспомогательной системы: $\Phi^\circ(\tau - s_\gamma) = \Phi(\tau) \leqslant 0$. Аналогично, если m_s° — статический коэффициент нагрузки l для вспомогательной системы, то $m_s = m_s^\circ + \gamma$ — ее статический коэффициент для исходной системы. Тогда для соответствующих предельных статических коэффициентов справедливо соотношение $\alpha = \alpha^\circ + \gamma$.

Пусть e — кинематически допустимые скорости деформаций, в частности мощность работы нагрузки $l - \langle \gamma^{-1} s_\gamma, e\rangle \geqslant 0$ (выражение для мощности записано с учетом того, что усилия $\gamma^{-1} s_\gamma$ уравновешивают нагрузку l). Если $D(e) = \sup\{\langle\sigma, e\rangle : \Phi(\sigma) \leqslant 0\}$ — диссипация [10] для исходной системы, то диссипация для вспомогательной системы

$$D^\circ(e) = \sup\{\langle\sigma, e\rangle : \Phi^\circ(\sigma) \leqslant 0\} =$$
$$= \sup\{\langle\tau - s_\gamma, e\rangle : \Phi(\tau) \leqslant 0\} = D(e) - \langle s_\gamma, e\rangle$$

Тогда очевидна связь кинематических коэффициентов нагрузки для исходной (m_k) и вспомогательной (m_k°) систем

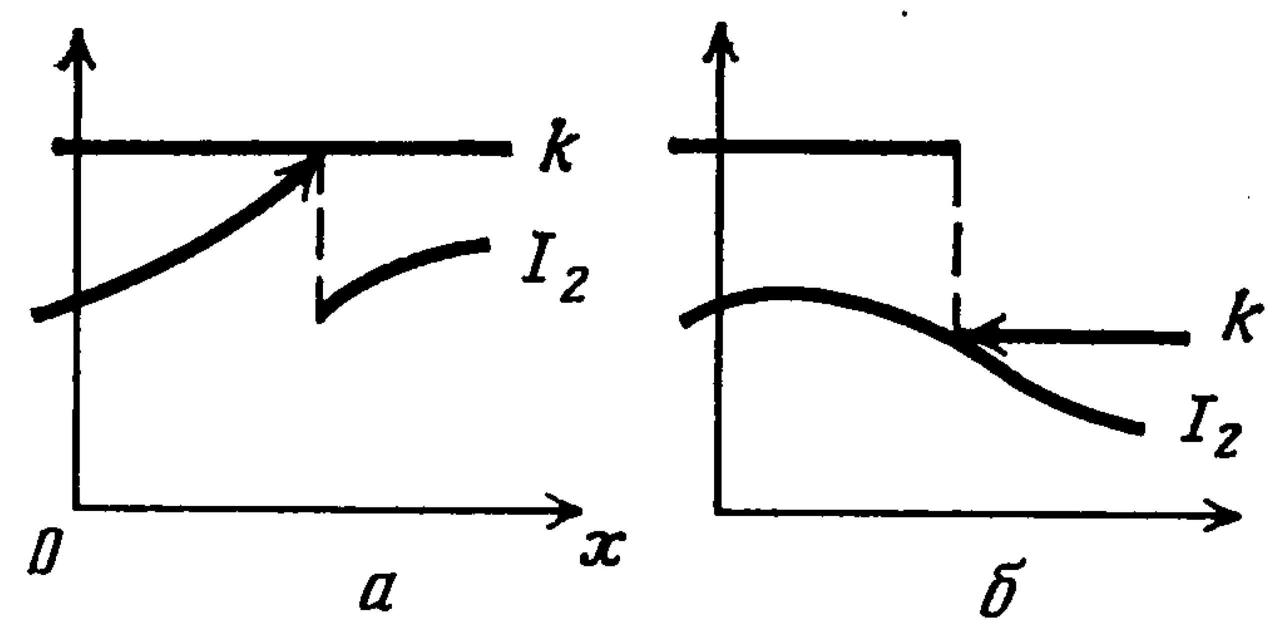
$$m_k = \frac{D(e)}{\langle \gamma^{-1} s_\gamma, e\rangle}, \quad m_k^\circ = \frac{D^\circ(e)}{\langle \gamma^{-1} s_\gamma, e\rangle} = m_k - \gamma$$

и связь соответствующих предельных коэффициентов: $\beta = \beta^\circ + \gamma$.

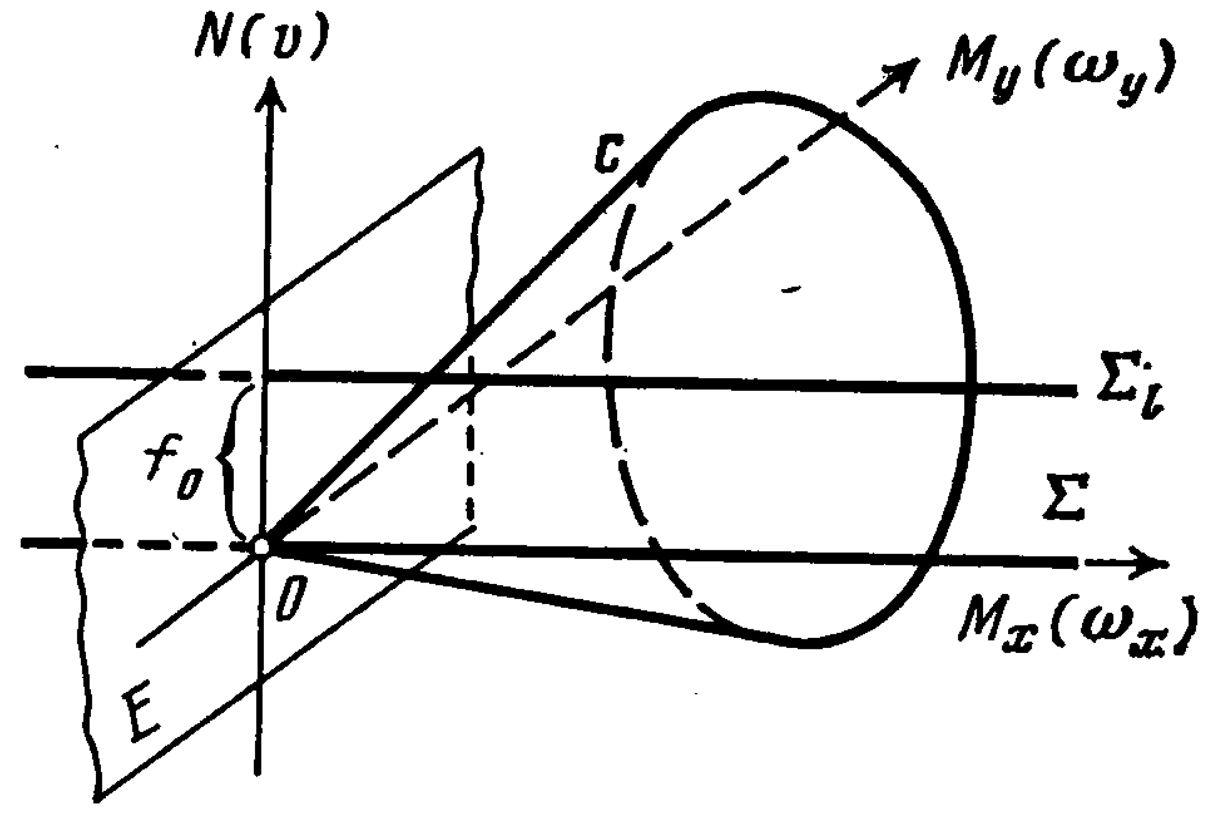
Поскольку s_γ — безопасные усилия для исходной системы, то $\sigma = 0$ — внутренняя точка множества пластически допустимых усилий вспомогательной системы, для которой тем самым выполнены условия [6], достаточные для равенства $\alpha^\circ = \beta^\circ$. В силу установленной выше связи α и α°, β и β° находим тогда, что и $\alpha = \beta$. Первая часть утверждения доказана.

Пусть $0 < \mu < \alpha(l)$; покажем, что нагрузка μl может быть уравновешена некоторыми безопасными усилиями σ_μ. При $0 < \mu \leqslant \gamma$ возьмем $\sigma_\mu = \mu\gamma^{-1}\sigma_\gamma$. Действительно, так как σ_γ входит в множество C допустимых усилий вместе с некоторой окрестностью V, то σ_μ входит в C вместе с окрестностью $\mu\gamma^{-1} V$ (см. фиг. 1, *а*); усилия σ_μ безопасны. При $\gamma < \mu < \alpha(l)$ найдется такое μ' $(\mu < \mu' < \alpha(l))$, что нагрузка $\mu' l$ уравновешивается некоторыми допустимыми усилиями $\sigma_{\mu'}$. Представим тогда μ в виде $\mu = a\gamma + (1 - a)\,\mu'$ $(0 < a < 1)$ и возьмем $\sigma_\mu = a\sigma_\gamma + (1 - a)\,\sigma_{\mu'}$. Видно, что σ_μ безопасны, так как входят в C вместе с окрестностью $aV + (1 - a)\,\sigma_{\mu'}$ (фиг. 1, *б*). Итак, в обоих случаях нагрузка μl уравновешивается безопасными усилиями, и следовательно, система остается жесткой [4]. Утверждение доказано.

Таким образом, для указанного класса нагрузок остается справедливым основное утверждение теории предельной нагрузки: коэффициент запаса можно рассчитывать кинематическим или статическим методом, при этом предельные оценки совпадают. Для нагрузок рассматриваемого



Фиг. 2



Фиг. 3

класса остается обычным также смысл коэффициента запаса α (l) $= \beta$ (l): нагрузка μl при $\mu > \alpha$ (l) не может быть уравновешена пластически допустимыми усилиями, а при $0 < \mu < \alpha$ (l) не вызывает деформации (разрушения). Единственное отличие от обычной ситуации имеется при $\mu = 0$: нулевая нагрузка является предельной; так будет, например, для идеально сыпучей среды. В этом случае изменение нагрузки, приложенной к системе, следует рассматривать начиная не с нулевой нагрузки, а с некоторой нагрузки, уравновешенной безопасными напряжениями (например, для идеально сыпучей среды — с действия гидростатического давления).

Доказательство утверждения в общем случае сплошной среды ничем не отличается от приведенного в дискретном случае. Дадим только некоторые пояснения используемых понятий. Конечномерное пространство внутренних усилий заменяется в случае сплошной среды функциональным пространством S полей напряжений (аналогично для пространства скоростей деформаций F). Предполагается, что для S, F выполнены условия теоремы 2 [6]. Безопасное поле напряжений определяется, как выше, т. е. входит в множество C пластически допустимых полей напряжений вместе с некоторой окрестностью. Под окрестностью понимается шар пространства напряжений (если оно нормировано) или вообще окрестность в топологии, в которой F является сопряженным к S (подробно см. в [6, 11]).

Отметим, что используемое здесь определение безопасности поля напряжений несколько более ограничительное, чем обычное (когда поле напряжений σ называется безопасным, если в каждой точке тела выполнено неравенство $\Phi_x(\sigma(x)) < 0$, где $\Phi_x(\sigma) = 0$ — условие текучести, соответствующее точке x). Пусть, например, для условия пластичности Мизеса $I_2(\sigma(x)) = k(x)$ зависимости второго инварианта девиатора напряжений $I_2(\sigma)$ и предела текучести k от x имеют вид, показанный на фиг. 2, *а* (терпит разрыв поле напряжений) или на фиг. 2, *б* (тело неоднородно, терпит разрыв предел текучести). В обоих случаях σ безопасно в обычном смысле, но не безопасно в используемом здесь смысле.

Замечание. Для доказательства второй части утверждения существенно не то, что напряжения s_γ, безопасны, т. е. входят в множество C допустимых полей напряжений вместе с некоторой окрестностью, а лишь, что они входят в C вместе с множеством вида $s_\gamma + Q$, где Q — поглощающее множество. (Множество Q называется поглощающим, если для любого σ из S найдется такое число $\lambda > 0$, что $\lambda\sigma$ попадает в Q.)

2. Отметим еще один вид условий, обеспечивающих для любой нагрузки совпадение ее статического и кинематического предельных коэффициентов,— замкнутость множества $C + \Sigma$, где Σ — совокупность всех самоуравновешенных, т. е. уравновешивающих нагрузку $1 = 0$, полей напряжений из S. Действительно, замкнутость $C + \Sigma$ эквивалентна [12] замкнутости множества $C^\wedge$, введенного в [5]. В [6] показано, что из замкнутости $C^{\wedge}$ вытекает равенство $\alpha = \beta$, а в качестве ее достаточного условия использовалась ограниченность C.

3. Покажем теперь на примере, что может случиться, когда не выполнены обычно принимаемые в теории предельной нагрузки ограничения на поверхность текучести, а приложенная нагрузка не относится к классу, выделенному в п. 1. Именно, опишем некоторую систему и действующую на нее нагрузку $\mathbf{l}$, хотя и предельную, но для которой кинематический метод дает значение предельного кинематического коэффициента $\beta(\mathbf{l}) = +\infty$, или, другими словами, не дает никакой верхней оценки предельной нагрузки. В частности, в этом случае статический и кинематический предельные коэффициенты не совпадают ($\alpha(\mathbf{l}) < +\infty$, $\beta(\mathbf{l}) = +\infty$). Теряет смысл также нижняя оценка предельной нагрузки при помощи статически допустимых напряжений: при нагрузке $\mu(\mathbf{l})$ с коэффициентом $0 < \mu < \alpha(\mathbf{l})$ имеются статически допустимые напряжения, тем не менее эта нагрузка — предельная, в теле под ее действием начинается течение (разрушение).

Рассмотрим балку, жестко заделанную на одном конце и работающую на изгиб с растяжением под действием продольной силы и момента, приложенных на другом конце. Пусть x, y, z — ортогональные координаты, причем ось z направлена вдоль оси балки и балка занимает отрезок $0 \leqslant z \leqslant L$. Обозначим $N(z)$, $Q_x(z)$, $Q_y(z)$, $M_x(z)$, $M_y(z)$, соответственно, продольное усилие, перерезывающие силы и изгибающие моменты в точке z, а $v(z)$ и $\omega(z)$ — скорость в точке z и угловую скорость поворота соответствующего поперечного сечения.

На заделанном конце балки выполнены условия

$$v(0) = 0, \quad \omega(0) = 0 \tag{3.1}$$

Пусть на другом конце балки отсутствуют поперечные силы и выполнено кинематическое условие

$$Q_x(L) = 0, \quad Q_y(L) = 0; \quad \omega_x(L) = 0 \tag{3.2}$$

Балка нагружена продольной силой f и изгибающим моментом относительно оси y — m_y, приложенными на конце $z = L$ балки. Таким образом, на этом конце кроме (3.2) заданы условия

$$M_y(L) = m_y, \quad N(L) = f \tag{3.3}$$

Заметим, что так как при $0 < z < L$ внешние силы отсутствуют, то из уравнений равновесия балки и первых двух условий (3.2) вытекает равенство $Q_x(z) = Q_y(z) = 0$. Тогда из уравнений равновесия и условий (3.3) находим: $M_x = \mathrm{const}$, $M_y = \mathrm{const} = m_y$, $N = \mathrm{const} = f$ (система статически неопределима: величина M_x, связанная с реакцией связи, соответствующей последнему условию (3.2), не определена). Таким образом, при равновесии с рассматриваемой нагрузкой усилия в балке характеризуются тремя числами: M_x, M_y, N.

Пример 1. Рассмотрим дискретную жестко идеально пластическую систему с внутренними усилиями $\sigma = (M_x, M_y, N)$ из пространства $\mathrm{S} = \mathbf{R}^3$, скоростями деформаций $\mathbf{e} = (\omega_x, \omega_y, v)$ из пространства $\mathbf{F} = \mathbf{R}^3$ и мощностью пластической работы $\langle \sigma, \mathbf{e} \rangle = M_x\omega_x + M_y\omega_y + Nv$.

Кинематические условия примем в виде

$$\omega_x = 0 \tag{3.4}$$

Эти условия выделяют множество E кинематически допустимых скоростей деформаций.

Условия равновесия имеют вид $M_y = m_y$, $N = f$ (m_y, f — заданная внешняя нагрузка).

В качестве поверхности текучести рассмотрим конус $M_x M_y = N^2$, $M_x \geqslant 0$; соответственно множество пластически допустимых усилий

$$C = \{(M_x, M_y, N) \in \mathbf{R}^3 : N^2 \leqslant M_x M_y,\ M_x \geqslant 0\}$$

Пусть на балку действует нагрузка $\mathbf{l} : f = f_0 > 0$, $m_y = 0$. На фиг. 3 показаны множества пластически допустимых усилий C, кинематически допустимых скоростей деформаций E, самоуравновешенных усилий Σ и усилий Σ_1, уравновешивающих нагрузку $\mathbf{l}$.

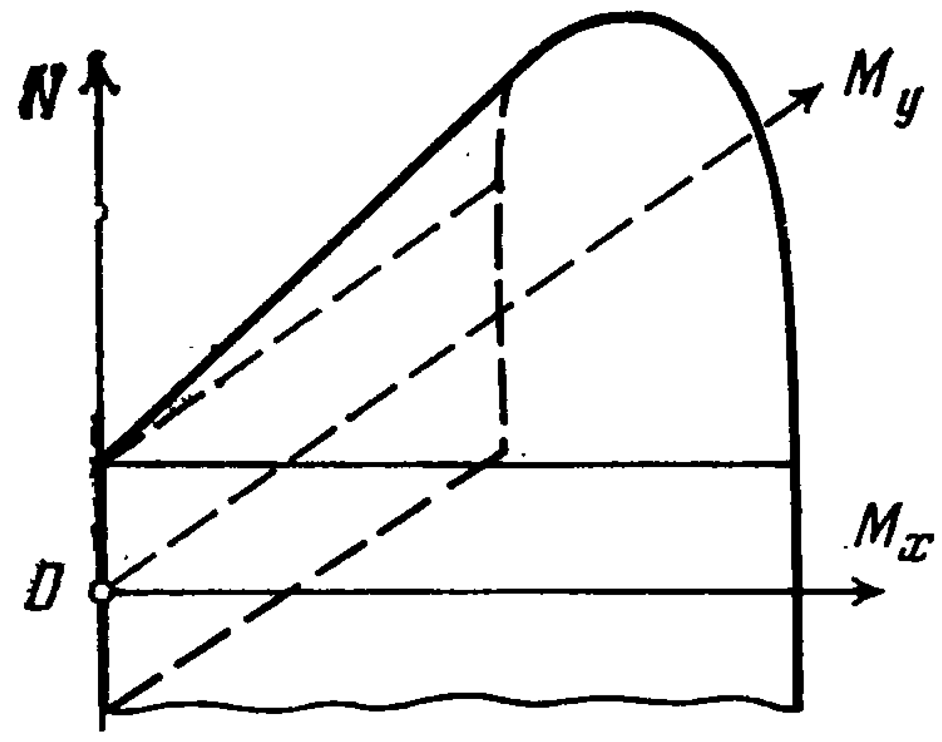
Найдем кинематический предельный коэффициент нагрузки

$$\beta(\mathbf{l}) = \inf\{D(\mathbf{e})/(f_0 v) : \mathbf{e} = (0, \omega_y, v),\ v > 0\} \tag{3.5}$$

Здесь первое условие указывает общий вид вектора скоростей деформаций **e**, кинематически допустимых для рассматриваемой системы, а второе — условие положительной мощности работы внешних сил $f_0 v > 0$; величина D (**e**), как всегда, определена соотношением

(3.6) $$D(\mathbf{e}) = \sup \{ \langle \tau, \mathbf{e} \rangle : \tau \in C \}$$

Покажем, что $\beta(\mathbf{l}) = +\infty$. Для этого достаточно проверить, что для вектора **e**, указанного в (3.5), верхняя грань в (3.6) равна $+\infty$. Действительно, для такого вектора **e** возьмем усилие $\sigma_A = (2A(\omega_y/v)^2, A, A\sqrt{2}|\omega_y|/v)$, очевидно, являющееся пластически допустимым. Тогда $D(\mathbf{e}) \geqslant \langle \sigma_A, \mathbf{e} \rangle = A(\omega_y + \sqrt{2}|\omega_y|)$. При $\omega_y \neq 0$ отсюда в силу произвольности $A > 0$ следует, что $D(\mathbf{e}) = +\infty$. Если $\omega_y = 0$, аналогичный вывод получается при $\sigma_A = (A, A, A)$.



Фиг. 4

Таким образом, $\beta(\mathbf{l}) = +\infty$. Другими словами, если попытаться по заданному кинематически допустимому вектору **e** (при положительной мощности работы внешних сил) найти усилия σ, которые были бы связаны с **e** ассоциированным законом, то окажется, что таких усилий нет. Это и означает, что кинематический метод не дает здесь оценки предельной нагрузки.

Замечание. Для рассматриваемой нагрузки **l** ни при каком $\mu > 0$ нагрузка $\mu\mathbf{l}$ не может быть уравновешена пластически допустимыми усилиями (фиг. 3). Однако невозможность применения кинематического метода оценки связана не с этим. Приведенный пример легко изменить так, чтобы нагрузка уравновешивалась пластически допустимыми усилиями. Для этого достаточно взять поверхность текучести, показанную на фиг. 4. При этом по-прежнему $\beta(\mathbf{l}) = +\infty$. Отметим еще, что в рассматриваемом примере множество $C + \Sigma$ незамкнуто.

Пример 2. Рассмотрим ту же балку с указанной нагрузкой как непрерывную систему. В этом случае усилия и скорости деформаций

$$\sigma = (M_x, M_y, N), \quad \mathbf{e} = \left(\frac{d\omega_x}{dz}, \frac{d\omega_y}{dz}, \frac{dv}{dz} \right)$$

— функции на отрезке $0 \leqslant z \leqslant L$; мощность пластической работы

$$\langle \sigma, \mathbf{e} \rangle = \int\limits_0^L \left(M_x(z) \frac{d\omega_x}{dz} + M_y(z) \frac{d\omega_y}{dz} + N(z) \frac{dv}{dz} \right) dz$$

Диссипация $D(\mathbf{e}) = \sup \langle \sigma, \mathbf{e} \rangle$, где верхняя грань вычисляется по всем усилиям, удовлетворяющим условию $N^2(z) \leqslant M_x(z) M_y(z)$, $M_x(z) \geqslant 0$, при $0 \leqslant z \leqslant L$. В частности, можно взять

$$\sigma = \sigma_A \equiv (M_{xA}, M_{yA}, N_A)$$

$$M_{xA}(z) = 2A \left(\frac{\omega_y(L)}{v(L)} \right)^2, \quad M_{yA} = A, \quad N(z) = A\sqrt{2} \frac{|\omega_y(L)|}{v(L)}$$

Тогда, поскольку $\omega_x(L) = 0$, имеем $D(e) \geqslant \langle \sigma_A, \mathbf{e} \rangle = A(\omega_y(L) + \sqrt{2}|\omega_y(L)|)$ и, как в примере 1, $D(\mathbf{e}) = +\infty$ и $\beta(\mathbf{l}) = +\infty$, т. е. кинематический метод не дает оценки коэффициента запаса нагрузки.

Приведенные примеры показывают, что предположения, принимаемые в [1—7] или выше в пп. 1, 2, существенны для выполнения известных утверждений теории предельной нагрузки.

Авторы благодарят В. Д. Клюшникова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гвоздев А. А.* Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации.— В кн.: Труды конференции по пластическим деформациям. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1938, с. 19—30.

2. *Гвоздев А. А.* О предельном равновесии.— Инж. сб., 1948, т. 5, вып. 1, с. 32—57.
3. *Фейнберг С. М.* Принцип предельной напряженности.— ПММ, 1948, т. 12, вып. 1, с. 63—68.
4. *Друккер Д., Прагер В., Гринберг Х.* Расширенные теоремы о предельном состоянии для непрерывной среды.— Механика. Сб. перев. и иностр. статей, 1953, № 1, с. 98—106.
5. *Nayroles B.* Essai de theorie fonctionnele des structures rigides plastiques parfaites.— J. méc., 1970, vol. 9, N 3, p. 491—506.
6. *Каменярж Я. А.* О двойственных задачах теории предельной нагрузки для идеально пластических тел.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 1, с. 51—54.
7. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
8. *Соколовский В. В.* Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 243 с.
9. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
10. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
11. *Каменярж Я. А.* О постановках задачи теории идеальной пластичности.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 490—496.
12. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1071 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.1984